Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 1

I/ Deux charges ponctuelles placées comme l'indique la figure 1. Etudier, en fonction de x, les variations de l'intensité de la force électrostatique $\vec{F}_{01}$ qui s'exerce sur q_1.
Etudier les variations de la composante de cette même force sur l'axe des X. Conclure.

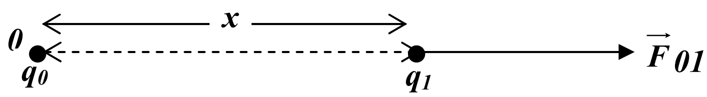


Figure 1

II/ Un système moléculaire est équivalent à quatre charges de valeur q et une cinquième charge de valeur Q placées comme le montre le schéma de la figure 2. Déterminer la valeur de Q pour que tout le système soit stable.

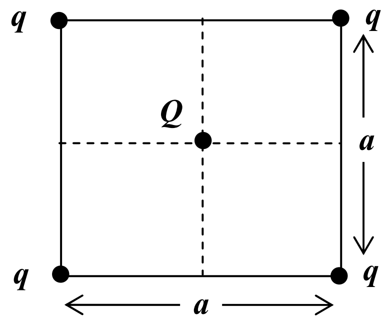


Figure 2

III/ Deux charges ponctuelles de même valeur $+q$ sont placées respectivement en $A(-a,0)$ et $B(a,0)$. Calculer le champ électrostatique au point $M(0,y)$. Tracer les variations du champ en fonction de y (y>0). En déduire au point M l'expression de la force électrostatique.

IV/ Un segment de droite AB, de longueur $2a$, porte une distribution continue de charges dont la densité linéique λ supposée positive est uniforme. On prend cette droite comme axe des X; l'origine O étant au milieu de AB. Soit OY l'axe perpendiculaire à OX.
1- En considérant deux éléments de charge centrés en deux points P_1 et P_2, symétriques par rapport à l'origine O, montrer que le champ électrostatique sur l'axe OY est porté par ce dernier.
2- Calculer la valeur de ce champ.
3- Examiner ce que devient l'expression obtenue quand la distance AB augmente indéfiniment.

V- Un disque plan circulaire de rayon R porte une distribution de charges superficielle uniforme de densité σ. Un point M de l'axe de révolution du disque est repéré par sa distance z au centre O.
1- Calculer $E(M)$
2- En déduire le champ crée par un plan infini.

VI- Une charge q est placée au centre d'une sphère de rayon r. Soit $\vec{E}$ le champ électrostatique crée par cette charge. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère.
La charge q est maintenant placée au centre d'un cylindre de rayon R et de hauteur $2L$. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre.
La charge q est maintenant placée entre deux plan P_1 et P_2 parallèles et indéfinis. Calculer le flux de $\vec{E}$ à travers ces deux plans.
Quelle conclusion fondamentale peut-on tirer de cette étude ?

VII- On considère la surface fermée d'un cube d'arête a placé dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique $\vec{E} = x^2\vec{i}$
1- Calculer le flux du champ électrostatique à travers la surface total du cube.
2- En déduire la charge intérieure du cube.
3- Retrouver la charge totale dans le cube en calculant, en tout point de l'espace, la densité volumique de charges ρ.

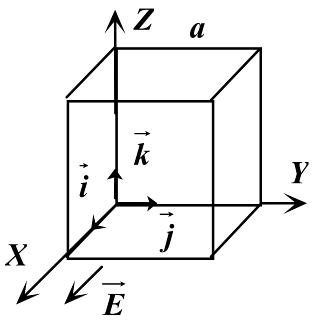


Figure 3

VIII- Soit une sphère, de centre O et de rayon R portant une charge répartie en volume avec une densité ρ non constante.
Calculer le champ électrostatique en un point M à la direction r' de O ($r' > R$) dans les deux cas suivants :
1- $\rho = a\,r \quad \text{où} \quad 0 < r < R$
2- $\rho = b / r$

IX- On considère deux distributions de charges dont le champ électrostatique est donnés par :
$$\vec{E}_1 = 2axy\,\vec{i} + a\left(x^2 - y^2\right)\vec{j}$$
$$\vec{E}_2 = -2ax\,\vec{i} - 2ay\,\vec{j} - 2bz\,\vec{k}$$
Déterminer dans chacun des cas la densité volumique de charges ρ.

Année Universitaire 2013-2014

Faculté des Sciences
Département de Physique

Travaux dirigés d'Electricité 1
SMP/SMC/SMA/SMI
Série 1

Solution

I/

$$\vec{F}_{01} = k\frac{q_0 q_1}{x^2}\vec{u}$$

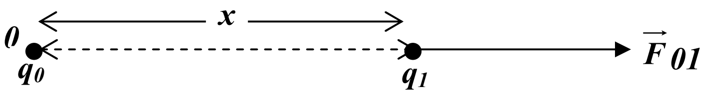
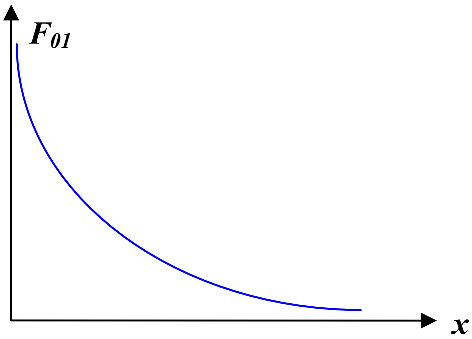
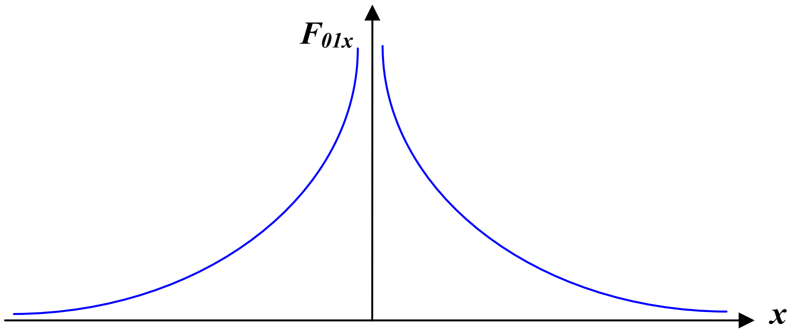


Figure 1

Avec $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9\ SI$, l'intensité ou module est $F_{01} = k\left|\dfrac{q_0 q_1}{x^2}\right|$

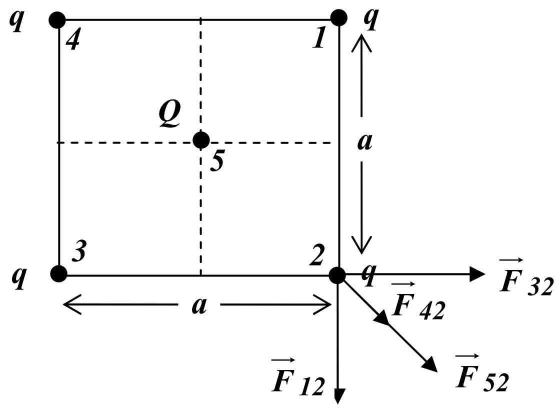




La variation de F_{01} par rapport à x serait :
La composante unique F_{01x} sur OX peut prendre des valeurs positives ou négatives, la variation serait :
Plus x est faible, (q_1 s'approche de q_0) plus F_{01} est grande. Quand les deux charges entrent en contacte, la force devient infinie pour reprendre des valeurs finies de l'autre coté de x = 0. La force coulombienne est discontinue à la traversée d'une zone (ici un point ponctuel et en général une surface sans épaisseur) chargée.

II/ On numérote les sites des charges. On applique la somme des forces = 0 sur toutes les charges. Le choix de $\vec{F}_{52}$ est au hasard. De toute façon la résultante doit s'annuler. Comme il y a deux types de charges q et Q et vu la symétrie du problème, on n'étudiera par exemple que les sites 2 et 5.
La somme des forces = 0 appliquée sur Q ne donnera que 0 = 0. Il reste le site 2 :

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{52} = \vec{0}$$



$$k\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_1 + k\frac{q^2}{a^2}\vec{u}_3 + k\frac{q^2}{2a^2}\vec{u}_4 + k\frac{2qQ}{a^2}\vec{u}_5 = \vec{0}$$

$$k\frac{q}{a^2}\left(q\vec{u}_1 + q\vec{u}_3 + \frac{1}{2}q\vec{u}_4 + 2Q\vec{u}_5\right) = \vec{0}$$

On projette su r OX :

$$k\frac{q}{a^2}\left(q + \frac{1}{2}q\cos\frac{\pi}{4} + 2Q\cos\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$k\frac{q}{a^2}\left(q + \frac{1}{2}q\frac{\sqrt{2}}{2} + 2Q\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\text{Soit : } Q\sqrt{2} = -q\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$Q = -q\frac{2+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -0{,}6q$$

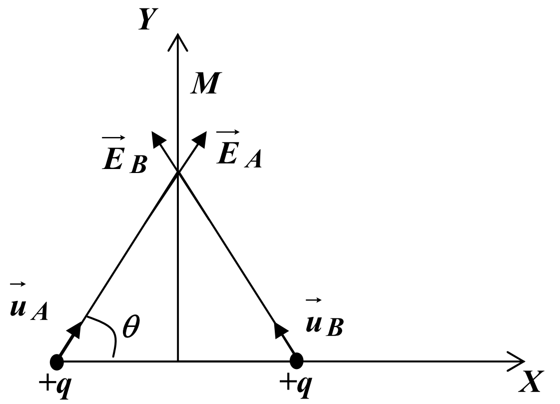
Noter que la projection sur ***OY*** donnerait la même équation.

$$\text{III/ } \vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_A + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\vec{u}_B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}\left(\vec{u}_A + \vec{u}_B\right)$$

La somme vectorielle des vecteurs unitaires est un vecteur appartenant à l'axe OY, donc le champ total est porté par ***OY***.

Projection sur ***OY*** :

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2+y^2}2\sin\theta\ .$$



Soit : $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$

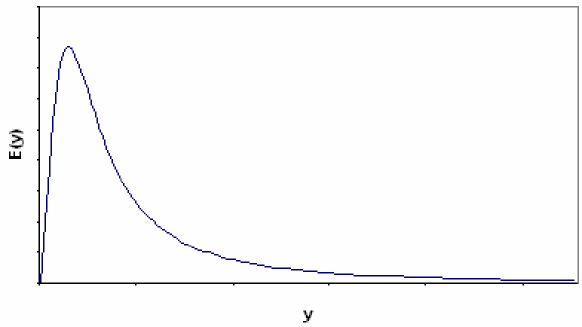
et donc $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2y}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}\vec{j}$

$$E' = \frac{qa^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\left(a^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2-2y^2\right)}{\left(a^2+y^2\right)^3},$$

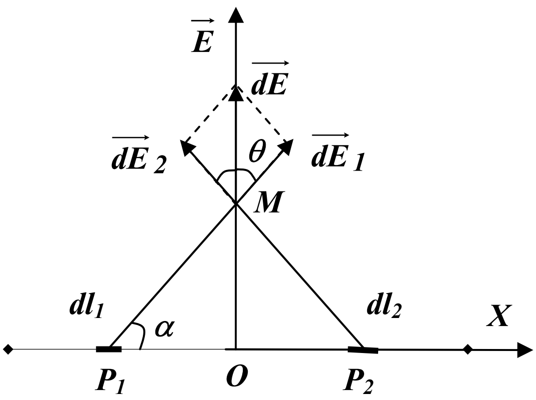
La dérivée de ***E*** a le signe de $\left(a^2 - 2y^2\right)$, le reste de l'expression est toujours positif. Donc ***E' ≥ 0*** si ***y*** est comprise entre $-\dfrac{a}{\sqrt{2}} \le y \le \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et il est négatif à l'extérieur de ces racines. Comme le problème est limité aux ***y ≥ 0*** nous avons :

y	0	$\frac{a}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
$E'(y)$	+ + +	- - -	
$E(y)$	0 $\nearrow$	$E = \frac{4}{3\sqrt{3}}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2}$ $\searrow$	0

Le champ passe par un extremum, s'annule à l'infini et au centre entre les charge. Le champ ici reste continu. Bien entendu au point M il n'y a pas de charge donc il n'y a pas de force électrique.



IV/ 1- dl_1 crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE_1}$ faisant θ avec la verticale, dl_2 symétrique à dl_1 par rapport à OY crée au point M le champ $\overrightarrow{dE_2}$ symétrique aussi à $\overrightarrow{dE_1}$. Le champ résultant $\overrightarrow{dE}$ est donc porté par OY. En considérant, de cette façon, deux à deux tous les éléments symétriques, nous obtenons un champ $\vec{E}$ total porté par OY.



2- Le champ élémentaire résultant est :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE_1} + \overrightarrow{dE_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\, dl}{r^2}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right)$$

Où $dl = dl_1 = dl_2$

Projection sur OY : $dE = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\, dl}{r^2}\, 2\sin\alpha = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\lambda\, dl}{r^2}\, 2\cos\theta$

Avec $\cos\theta = \dfrac{y}{r}$, $tg\theta = \dfrac{l}{y}$ et donc $\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = \dfrac{dl}{y}$, nous aurons :

$$dE = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y\,d\theta}{\cos^2\theta}\frac{\cos^2\theta}{y^2}\, 2\cos\theta$$

Soit après simplification $dE = \dfrac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta\ d\theta$.

Le champ total sera après intégration :

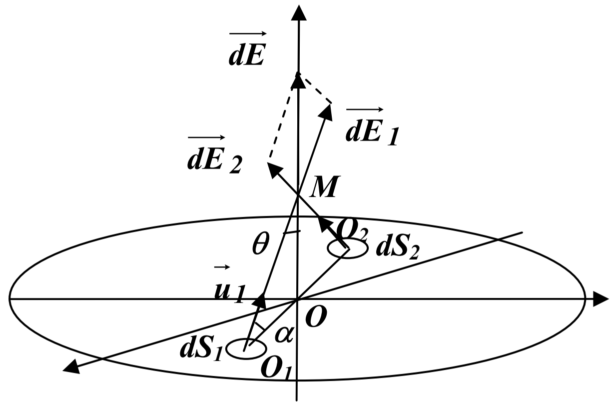
$$E = \int_0^{\theta_1} \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\cos\theta\ d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\sin\theta_1 \text{ . Avec } \sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la longueur chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où
$$E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{a}{y\sqrt{y^2 + a^2}}$$

3- Si a devient infinie, alors $E(y) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{y}$. C'est le champ, au point M, crée par un fil infini portant une distribution linéique de charge.

V- 1- dS_1 contient dq_1 et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_1}{O_1M^2}\vec{u}_1$ faisant l'angle θ avec OZ.



dS_2 symétrique à dS_1 contient $dq_2 = dq_1$ et crée au point M le champ élémentaire $\overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq_2}{O_2M^2}\vec{u}_2$ faisant le même angle θ avec OZ. Si l'on note $dq = dq_1 = dq_2$ et sachant que $O_1M = O_2M$, alors le champ résultant sera forcement porté par OZ :

$$\overrightarrow{dE} = \overrightarrow{dE}_1 + \overrightarrow{dE}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}\left(\vec{u}_1 + \vec{u}_2\right) \text{ où } \rho = O_1O = O_2O.$$

<u>Projection sur OZ</u> :

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\sin\alpha \quad \text{ou} \quad dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{O_1M^2}2\cos\theta.$$

Avec $dq = \sigma dS$, $\cos\theta = \frac{z}{O_1M}$, $tg\theta = \frac{\rho}{z}$ et donc $\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{d\rho}{z}$, nous aurons :

$$dE = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dS}{\frac{z^2}{\cos^2\theta}}2\cos\theta.$$ En coordonnées cylindrique $dS = \rho\, d\rho\, d\varphi$. Le champ total sera :

$$dE = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho d\rho\, d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\frac{z\,tg\theta\frac{z\,d\theta}{\cos^2\theta}d\varphi}{z^2}\cos^3\theta = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Si l'on intègre :

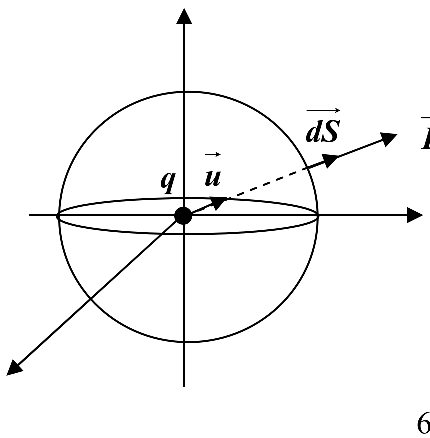
$$E = \int_0^{\theta_0}\frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{2\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\left(1-\cos\theta_0\right)2\pi \quad \text{. Avec } \cos\theta_0 = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

L'intégrale porte sur la moitié de la surface chargée puisque l'on a considéré au début deux éléments de charge.

D'où $$E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)$$

2- $Z \Rightarrow +\infty$, $E(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ est le champ crée par un plan chargé en surface.

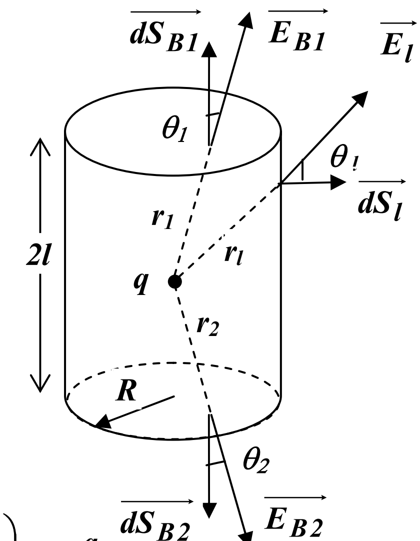
VI- 1/ $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\vec{u}$ est le champ électrostatique crée par q en tout point M de la surface de la sphère. Par définition le flux de $\vec{E}$ à travers la sphère est $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S \vec{E}\,\overrightarrow{dS}$. Or $\vec{E}$ et $\overrightarrow{dS}$ sont parallèles. Le flux devient : $\Phi\left(\vec{E}/S\right) = \iint_S E\,dS$.



Comme E ne dépend que de R et que tous les points de S sont à la même distance R de O, le module du champ est uniforme :

$$\Phi(\vec{E}/S) = E\iint_S dS = ES = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}4\pi R^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

2- Le cylindre est composé d'une surface latérale S_L et de deux surfaces de bases S_{B1} et S_{B2}.



Le flux de $\vec{E}$ à travers le cylindre est

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S \vec{E}\vec{dS} = \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS} + \iint_S \vec{E}\vec{dS}.$$

$$= \iint_{Sl} E_L dS_L \cos\theta_L + \iint_{SB1} E_{B1} dS_{SB1}\cos\theta_1 + \iint_{SB2} E_{B2} dS_{B2}\cos\theta_2$$

Avec $E_L = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_L^2}$, $E_{B1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2}$ et $E_{B2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}$.

Si Ω_L, Ω_1 et Ω_2 sont les angles solides sous lesquels on observe du point O respectivement les surface S_L, S_{B1} et S_{B2} alors l'expression du flux devient :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\iint_{SL}\frac{dS_L\cos\theta_L}{r_L^2} + \iint_{SB1}\frac{dS_{B1}\cos\theta_1}{r_1^2} + \iint_{Sl}\frac{dS_{B2}\cos\theta_2}{r_2^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\Omega_L + \Omega_{B1} + \Omega_{B2})$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}4\pi$$

Où $\Omega = 4\pi$ est l'angle solide sous lequel on observe tout l'espace.

On retrouve $\Phi(\vec{E}/S) = \frac{q}{\varepsilon_0}$

De même pour deux plans on retrouve le même rapport q/ε_0 car l'angle solide sous lequel on voit un plan est 2π Srd et donc l'angle solide sous lequel on voit deux plans est 4π Srd (espace).

Remarque : - les surfaces étudiées sont toutes fermées. Deux plans parallèles et espacés sont considérés comme une surface fermée.

Conclusion : Le flux du champ électrique crée par une charge à travers une surface fermée contenant la charge est toujours égal au rapport q/ε_0 : théorème de Gauss.

VII- 1- $\vec{E} = x^2\vec{i}$ possède une seule composante. Le champ sera donc perpendiculaire à tous les vecteurs de surface (flux nul) sauf ceux des faces parallèle au plan OZ. Le flus total est alors :

$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_{S1} x^2\vec{i}\,\vec{dS}_1 + \iint_{S2} x^2\vec{i}\,\vec{dS}_2$ Or sur le plan appartement à OYZ $x = 0$ et sur le plan parallèle $x = a$ d'où :

$$\Phi(\vec{E}/S) = \iint_S a^2\,dS + 0 = a^2a^2 = a^4$$

2- La surface étant fermée, $\Phi(\vec{E}/S) = a^4 = \frac{q}{\varepsilon_0}$, soit $q = a^4\varepsilon_0$

3- On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Ce qui nous emmène à : $\frac{dx^2}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ soit $\rho = 2\varepsilon_0 x$. La densité n'est pas uniforme mais varie linéairement avec x. C'est-à-dire que l'on a des plans "équicharges" tous parallèles à OYZ. Sur le plan OYZ ($x = 0$) il y a absence de charges. Plus on s'éloigne plus la quantité de charges augmente. La charge contenue dans le cube est la somme de toutes ces charges. Soit dans le cube un volume élémentaire dV contenant la charge dq. On peut écrire : $dq = \rho dV$. La charge du cube serait :

$$q = \int_{\substack{volume \\ du\,cube}} \rho dV = \iiint_{\substack{volume \\ du\,cube}} 2\varepsilon_0 xdxdydz = 2\varepsilon_0 \int_0^a xdx \int_0^a dy \int_0^a dz$$

Et on retrouve $q = a^4 \varepsilon_0$

VIII- Théorème de Gauss : $\iint_S \vec{E}\vec{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_v \rho\, dv$ où S est la sphère de Gauss de centre O et de rayon r'. v est le volume chargé.

1- $E 4\pi r'^2 = \frac{a}{\varepsilon_0}\iiint_v r\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{a}{\varepsilon_0}\int_0^R r^3\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{a}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^4}{4} 2\, 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{aR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

2- $E 4\pi r'^2 = \frac{b}{\varepsilon_0}\iiint_v \frac{1}{r} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \frac{b}{\varepsilon_0}\int_0^R r\, dr \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$

$$E = \frac{b}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R^3}{3} 2\, 2\pi \frac{1}{r'^2} = \frac{bR^3}{3\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}$$

IX- On utilise l'équation de Poisson : $div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

$div\vec{E}_1 = 2ay - 2a \Rightarrow \rho = 2\varepsilon_0 a(y-1)$. ρ est une fonction de y

$div\vec{E}_2 = -2a - 2a - 2b = -4a - 2b \Rightarrow \rho = -2\varepsilon_0(2a+b)$. ρ est uniforme