

Modélisation mathématique des risques financiers: Nouveaux défis et nouveaux horizons

Rama CONT

Horizon Maths 2013
Fondation des Sciences Mathématiques de Paris

En collaboration avec

- Marco AVELLANEDA (New York University)
- Lakshithe WAGALATH (Doctorant LPMA- Univ Paris VI)
- Adrien DE LARRARD (Doctorant LPMA- Univ Paris VI)
- Andreea MINCA (Cornell University)
- Hamed AMINI (EPFL, Lausanne)
- Equipe de Stabilité Financière, Banque Centrale de Norvège
- Division Stabilité Financière, Banque d'Angleterre

La modélisation statistique des risques financiers

- La pratique de la mesure, gestion et la régulation des risques financiers est dominée par le paradigme de la **modélisation statistique** des prix de marché des instruments financiers.
- Cette approche représente les rendements des actifs financiers (prix, taux de change, taux d'intérêt ,indices,...) comme des variables aléatoires dont le modèle spécifie la distribution
- Cette loi est ensuite **estimée** sur des données de rendements (journaliers, haute fréquence,...) et utilisée pour **calculer** ou **simuler** la distribution des pertes de portefeuilles, mesurer leur risque, les optimiser, valoriser les contrats financiers (produits dérivés), simuler des **scénarios de stress**,..
- Des dizaines de milliers de variables, des fréquences d'observations allant de $10^{-3}s$ à 10^4 (jour)
- Une grande variété de modèles statistiques: modèles à facteurs statiques Gaussiens, modèles GARCH, modèles de diffusion, processus de Lévy, processus à sauts, ...

La modélisation statistique des risques financiers

Néanmoins tous ces modèles statistiques de risque ont certains traits en commun:

- Représentation des risques de marché comme aléa **exogène**.
- La modélisation statistique des **rendements**: facteurs de risque = rendements d'indices, d'instruments de référence.
- Hypothèse de stationnarité: le comportement statistique du marché dans le passé prédit son comportement statistique dans le futur.
- **Linéarité** des prix: valeur de 100 contrats = $100 \times$ valeur d'un contrat...
- Modélisation des variations de 'prix/valeur de marché', par opposition à la *valeur liquidative*.
- Représentation et calcul des risques au niveau de portefeuilles statiques: Value at Risk, capital réglementaire,...

Ces modèles statistiques ont, à plusieurs reprises, failli lorsque confrontés à des crises de marché:

- Krach de 1987
- La faillite du fonds LTCM (1998)
- La crise des 'subprimes' et la 'perte de diversification' des investisseurs institutionnels
- "Quant crash" d' Aout 2007: grosses pertes de - 20% / jour pendant 3 jours consecutifs dans les hedge funds 'neutres au marché' investis dans les actions américaines.
- La turbulence de marché suite au défaut de Lehman Brothers en Sept 2008
- La 'Baleine de Londres': perte de > 5 Milliards \$ lors du débouclage des 'Credit Default Swaps' de JP Morgan
- Effets de contagion de la crise de l'Euro: Grèce, Chypre,...

Ces situations sont caractérisées par des variations soudaines / "décrochages" de prix et de paramètres de **volatilités et corrélations** des facteurs de risque: changement de régime?

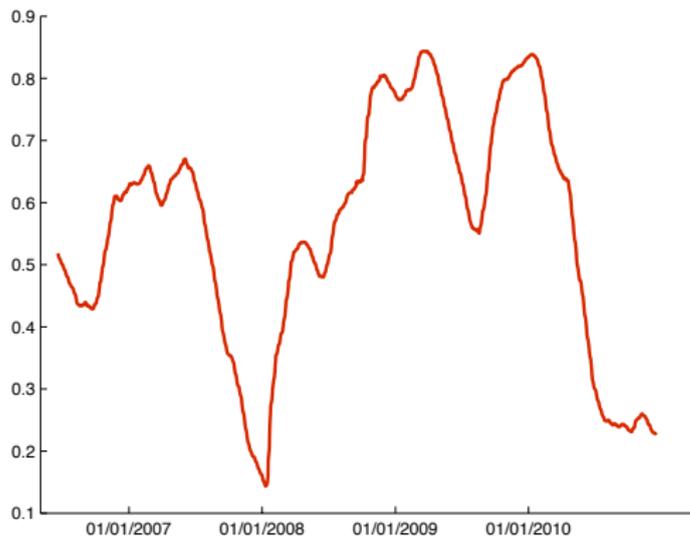
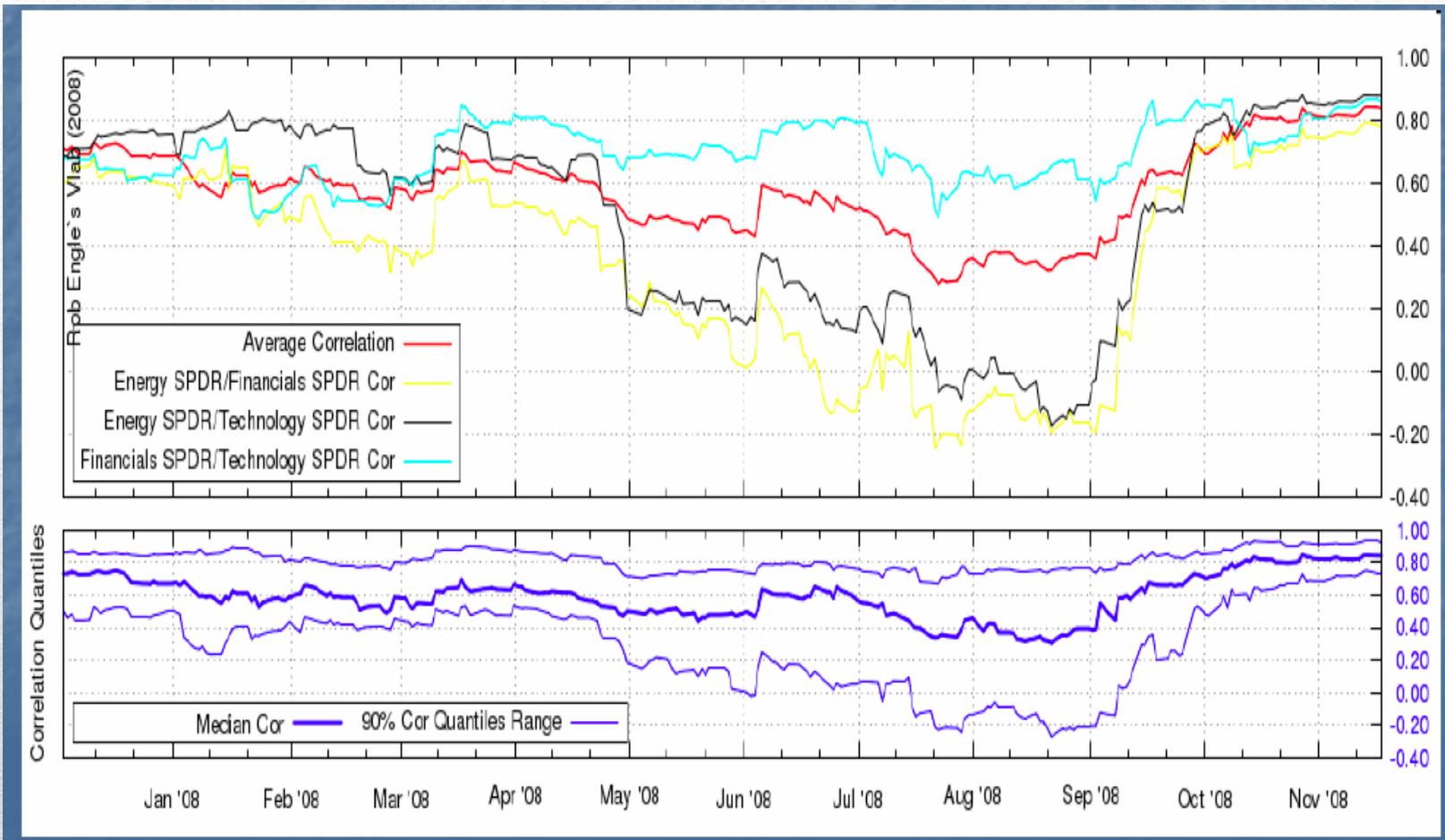
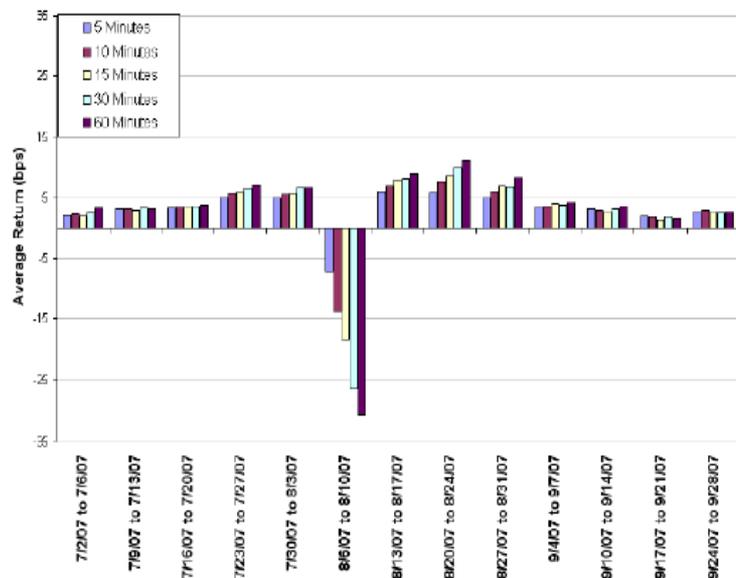


Figure: EWMA average correlation in Eurostoxx 50 returns, 2006-2010.

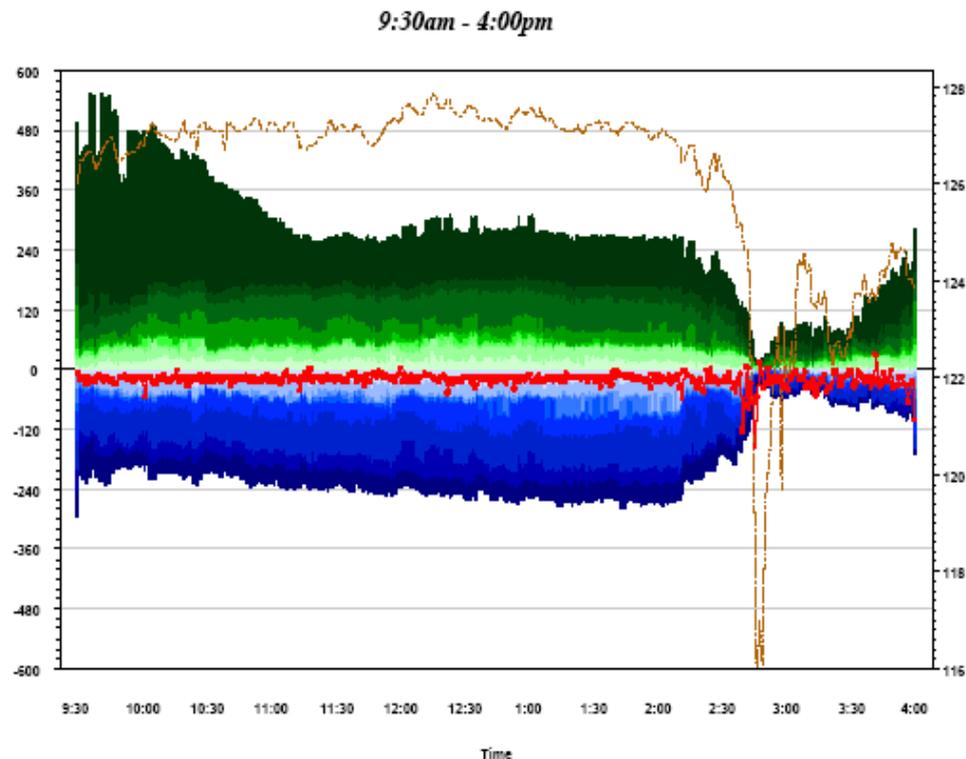


Correlations among US stock returns,
2008

Average return of a long-short market-neutral equity fund (July-Sept 2007). Source: Lo & Khandani (2009)



The Quant crash of August 2007 (Lo & Khandani, 2009).



Flash Crash: Intraday evolution of prices and transaction volume on IBM Shares, May 6, 2010.

$$Y_t = \gamma_0 + \sum_{k=1}^4 \gamma_{1k} Y_{t-k} + \gamma_{2k} I_{2006} ABX_{t-k} + \gamma_{3k} I_{2007} ABX_{t-k} + \epsilon_{it}$$

Y	ABX	γ_{21}	γ_{22}	γ_{23}	γ_{24}	γ_{31}	γ_{32}	γ_{33}	γ_{34}	$p(\gamma_2 = 0)$	$p(\gamma_3 = 0)$	Adj. R^2
One-Year Treasury	AAA	-0.36	-0.21	-0.11	-0.16	2.68	2.71	3.50	0.44	0.988	0.000	0.249
	AA	0.48	0.06	0.09	0.10	3.94	1.43	5.12	-0.73	0.993	0.000	0.322
	A	-0.53	0.49	-0.84	-0.67	0.47	0.77	6.47	-0.21	0.760	0.000	0.364
	BBB	-0.16	0.14	-0.20	-0.06	-0.05	-0.47	5.57	1.35	0.999	0.000	0.303
	BBB-	-0.08	0.41	-0.50	-0.06	0.22	-1.11	5.43	2.60	0.983	0.000	0.323
Ten-Year Treasury	AAA	0.25	-0.20	0.17	0.69	0.69	2.60	0.79	1.57	0.887	0.009	0.081
	AA	1.51	1.58	0.68	0.50	1.44	1.30	2.59	1.13	0.337	0.003	0.135
	A	-0.48	0.45	-1.07	-0.88	0.75	0.66	3.00	0.97	0.638	0.002	0.131
	BBB	-0.37	0.05	-0.77	0.31	0.63	0.47	3.48	0.56	0.931	0.000	0.155
	BBB-	-0.13	0.91	-1.26	0.29	1.37	0.33	2.61	1.46	0.716	0.001	0.152
S&P 500 Financials	AAA	-0.90	-0.09	0.26	0.26	3.17	-1.86	1.12	1.92	0.905	0.007	0.287
	AA	-0.90	-0.13	0.19	0.08	3.67	-2.61	3.48	1.00	0.903	0.000	0.363
	A	-1.28	-0.93	-0.70	-0.44	1.86	-0.50	3.76	0.71	0.462	0.000	0.359
	BBB	-0.50	-0.76	-0.94	-0.11	1.76	0.79	3.58	1.18	0.756	0.000	0.386
	BBB-	-0.34	-0.75	-0.44	0.32	2.04	1.84	2.35	0.06	0.861	0.000	0.355

Correlation between subprime ABX index returns and SP500 returns: negative before 2006, positive after 2007!

Longstaff (2009): The subprime credit crisis and contagion in financial markets.

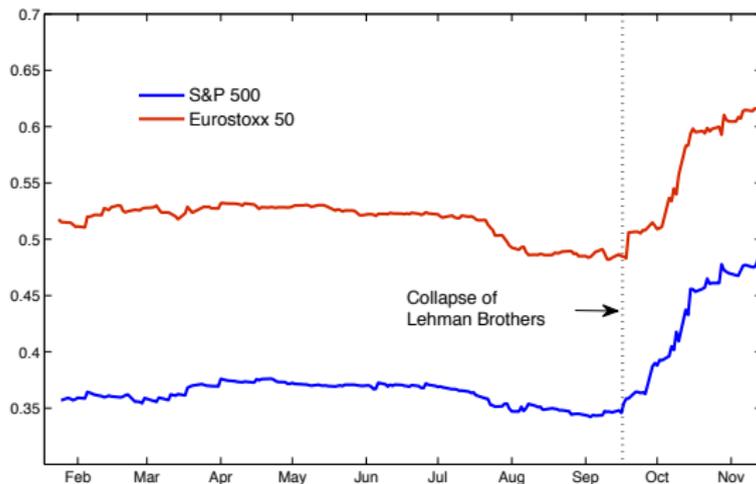


Figure: EWMA average correlation among SPDRs and Eurostoxx 50

La modélisation quantitative face aux crises

- Dans tous ces exemples un *événement de marché* fait passer abruptement d'un régime de comportement de marché 'calme' à un régime 'turbulent'.
- Les modèles statistiques usuels n'ont pas d'explication convaincante ni pour les fluctuations anormales observées ni pour leur concentration dans le temps et les règles de couverture et de gestion 'optimale' qui en découlent ont échoué dans ces cas.

La modélisation quantitative face aux crises

- Dans tous ces exemples un *événement de marché* fait passer abruptement d'un régime de comportement de marché 'calme' à un régime 'turbulent'.
- Les modèles statistiques usuels n'ont pas d'explication convaincante pour ces fluctuations anormales et leur concentration dans le temps et les règles de couverture et de gestion 'optimale' qui en découlent ont échoué dans ces cas.
- Face à ces exemples, l'argument qui consiste à dire que 'les modèles ont été utilisés hors de leur contexte' n'est pas tenable: qui veut un parapluie qui ne fonctionne pas quand il pleut?
- Au contraire: nous pensons que, loin d'être des 'aberrations' ('outliers'), ces exemples fournissent la **clé** pour explorer de meilleures approches de modélisation.

'Cygne Noir': une contre-vérité qui arrange (certains)?

(avec nos excuses à Nassim Taleb et Al Gore)

- Il est convenable (ex-post) d'appeler de tels événements des risques 'totalement imprévisibles –ou 'cygnes noirs': cela a le mérite d'enlever toute responsabilité aux gestionnaires de risques, régulateurs et modélisateurs...
- Cette position est renforcée par certains pourfendeurs des mathématiques qui, sans comprendre l'enjeu de la modélisation quantitative des risques, en profitent pour dire que tout système humain échappe à la modélisation mathématique.
- Nous essaierons d'argumenter, au contraire, que l'échec des modèles statistiques de risques n'est pas tant dû à des occurrences 'parfaitement imprévisibles' mais à des mécanismes économiques *prévisibles* que l'on peut modéliser de façon *déterministe* et qui permettent de comprendre et de démystifier ces 'cygnes noirs'...

Une idée simple: l'impact des transactions sur le prix

- Les transactions de grande taille, notamment d'investisseurs institutionnels, influencent le prix de marché. Ce phénomène bien documenté est connu sous le nom d'**impact** d'un ordre sur le marché: il peut être modélisé de façon linéaire ou non-linéaire (Obizhaeva 2008; Cont Kukanov Stoikov 2010): après une transaction de taille X le prix varie selon

$$\frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{S(t)} = \sigma\epsilon(t) + I\left(\frac{X}{\lambda}\right)$$

- $r(t)$: variable aléatoire (bruit) représentant l'aggrégation des autres facteurs influençant le prix
- $I(\cdot)$: price impact function/ price elasticity of demand
- λ measures the market depth.

A stylized model of fire sales

Consider a large institutional investor with positions i in asset (classes), with prices

$$\frac{\Delta S_i(t)}{S_i(t)} = \sum_j A_{ij} \epsilon_j(t)$$

A_{ij} reflect 'historical' / normal volatilities / correlations . Fund value $V(t) = \sum \alpha_i S_i(t)$

We want to model how fire sales in such a portfolio impact price dynamics, realized volatility and realized correlations of assets liquidated by the fund.

A stylized model of fire sales

- "Market stress": Fund value drops to $V^*(t) < V(t)$
- If loss $V(t) - V^*(t)$ exceeds a threshold (linked to capital requirements, liquidity ratios or performance with respect to a benchmark) fund liquidates positions over horizon T .
- Liquidation strategy: $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$ with $X_i(0) = \alpha_i$, $X_i(T) = 0$
- Market impact of liquidation:

$$\frac{\Delta S_i(t)}{S_i(t)} = \sum_j A_{ij} \epsilon_j(t) + \overbrace{I \left(\frac{\Delta X_i(t)}{\lambda_i} \right)}^{\text{Market impact}}$$

$\epsilon_i(t)$: risk factors, A_{ij} = factor loadings, λ_i market depth.

Deleveraging schedule

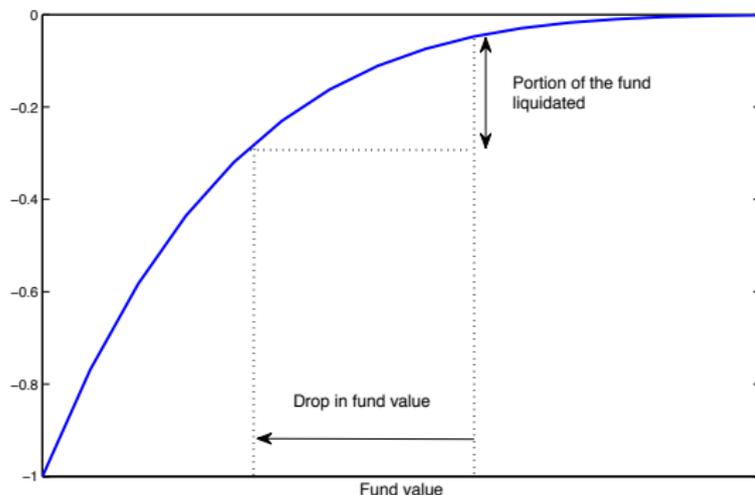


Figure: As fund value drops, manager/investors exit their positions: this is modeled by a 'liquidation schedule' $f(\cdot)$: $X_i(t) = \alpha_i f(V(t)/V(0))$

Death spiral: endogenous collapse

Consider a large fund invested in 3 asset classes, whose returns are 'fundamentally uncorrelated': fundamental covariances are assumed ZERO.

The fund quickly reduced by 20% its positions over a one month period, generating a volume which is 10% of market depth during this period.

What is the impact on market correlation/ volatility of the assets?

What is the volatility/correlation experienced by the fund during its liquidation period?

'Fundamentally uncorrelated' assets can correlate during liquidation!

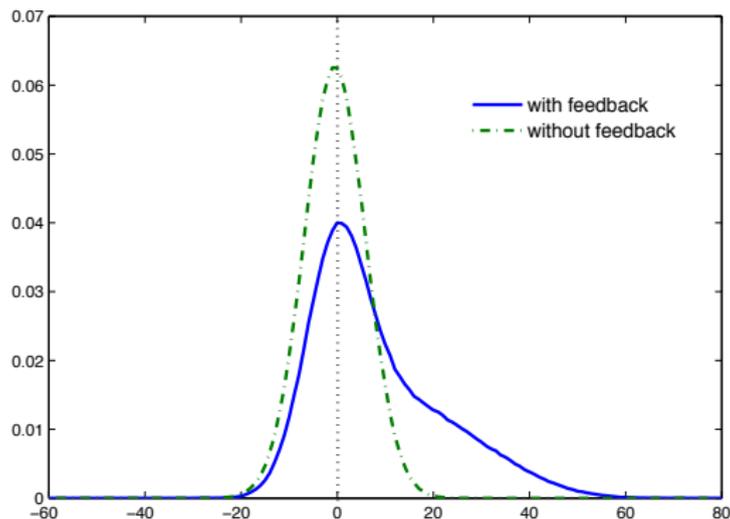
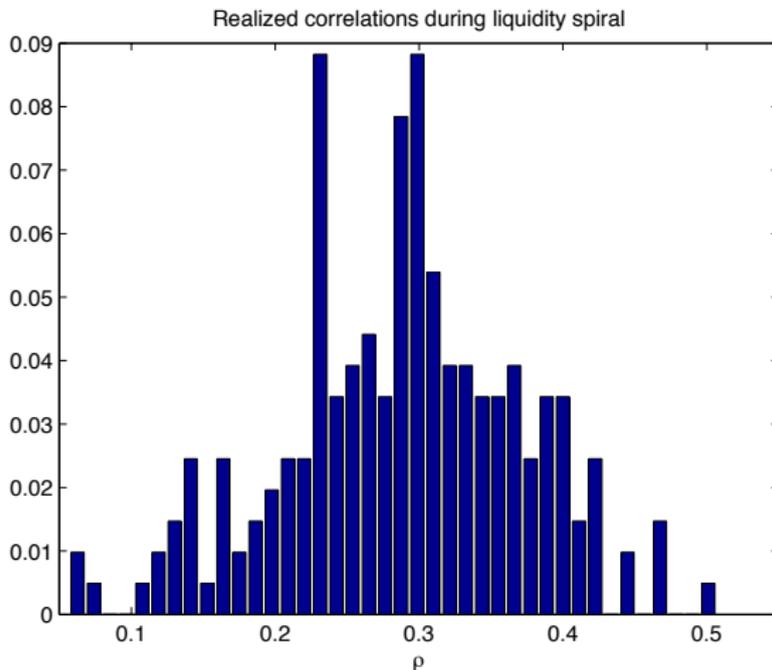


Figure: Distribution of realized correlation between the two securities

Simulation example: 3 uncorrelated asset classes



Diffusion limit

Theorem

Under the assumption that $f \in C_b^3$ such that $\sup |xf'(x)| < \min \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$ and that $\mathbb{E}(|\xi|^4) < \infty$, $S_{\lfloor t/\tau \rfloor}^{(\tau)}$ converges weakly towards a diffusion $P_t = (P_t^1, \dots, P_t^n)^t$ when τ goes to 0 where

$$\frac{dP_t^i}{P_t^i} = \mu_i(P_t)dt + (\sigma(P_t)dW_t)_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\mu_i(P_t) = \frac{\alpha_i}{2\lambda_i} f''\left(\frac{V_t}{V_0}\right) \frac{\langle \pi_t, \sum \pi_t \rangle}{V_0^2}; \quad \sigma_{i,j}(P_t) = A_{i,j} + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} f'\left(\frac{V_t}{V_0}\right) \frac{(A^t \pi_t)_j}{V_0}$$

- $\pi_t = (\alpha_1 P_t^1, \dots, \alpha_n P_t^n)^t$ is the (dollar) allocation of the fund
- $V_t = \sum \alpha_i P_t^i$ is the value of the fund

Realized covariance

Proposition

The realized covariance between securities i and j between 0 and t is equal to $\frac{1}{t} \int_0^t C_s^{i,j} ds$, where $C_s^{i,j}$, the instantaneous covariance between i and j , is given by:

$$C_s^{i,j} = \Sigma_{i,j} + \frac{\alpha_j}{\lambda_j} f' \left(\frac{V_s}{V_0} \right) \frac{(\sum \pi_s)_i}{V_0} + \frac{\alpha_i}{\lambda_i} f' \left(\frac{V_s}{V_0} \right) \frac{(\sum \pi_s)_j}{V_0} \\ + \frac{\alpha_i \alpha_j}{\lambda_i \lambda_j} (f')^2 \left(\frac{V_s}{V_0} \right) \frac{\langle \pi_s, \sum \pi_s \rangle}{V_0^2}$$

with $\pi_s = (\alpha_1 P_s^1, \dots, \alpha_n P_s^n)^t$.

Realized covariance is *path-dependent*. It is the sum of a fundamental covariance and a *liquidity-dependent excess*

Spillover effects

Consider now a small fund with (dollar) positions

$$\pi_t^\mu = (\mu_t^1 P_t^1, \dots, \mu_t^n P_t^n)^t.$$

Proposition

When a large fund with positions π^α liquidates its positions, the small fund experiences a volatility given by

$$\begin{aligned} & \langle \pi_t^\mu, \Sigma \pi_t^\mu \rangle + \frac{2}{V_0} f' \left(\frac{V_t}{V_0} \right) \langle \pi_t^\mu, \Sigma \pi_t^\alpha \rangle \langle \Lambda, \pi_t^\mu \rangle \\ & + \frac{1}{V_0^2} (f' \left(\frac{V_t}{V_0} \right))^2 \langle \pi_t^\alpha, \Sigma \pi_t^\alpha \rangle (\langle \Lambda, \pi_t^\mu \rangle)^2 \end{aligned}$$

where $\Lambda = (\frac{\alpha_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\alpha_n}{\lambda_n})^t$ represents the positions of the fund in each market as a fraction of the respective market depth.

Portfolio overlaps as a factor for contagion

Excess volatility generated by price-mediated contagion is driven by the **overlap** between portfolios, weighted by market depth:

$$\langle \Lambda, \pi_t^\mu \rangle = \sum_i \mu_i \alpha_i \frac{P^i}{\lambda_i}$$

In particular, under the 'orthogonality' condition:

$$\langle \Lambda, \pi_t^\mu \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{\alpha_i}{\lambda_i} \mu_t^i P_t^i = 0$$

distressed selling in fund α *does not affect* fund μ 's variance!

If all assets equally 'liquid' \rightarrow a dollar neutrality condition.

On the contrary, contagion is maximized when allocations have large overlap.

Risque endogène: implications pour la régulation

- Existence de règles **autodestructrices**: certaines contraintes imposées sur le capital ou fonds propres des banques peuvent, dans un scénario de crise, les pousser à déboucler **simultanément** et **rapidement** leurs portefeuilles, amplifiant ainsi les instabilités de prix et générant une **instabilité systémique**.
- La contagion d'un portefeuille à l'autre étant fonction de leur 'overlap', plus les portefeuilles sont diversifiés (ce qui est en principe 'bénéfique' pour leur risque), plus on crée des couplages entre différents marchés...
- **Diversification vs diversité**: en effet, la contagion est maximale dans un marché où tous les portefeuilles sont diversifiés de façon similaire, donc alignés. A l'opposé, le risque systémique est diminué avec la **diversité** des portefeuilles.

Applications

- Incorporation du risque endogène dans les modèles de risque de portefeuille.
- Etude/simulation de l'impact sur le marché de la liquidation d'un grands fonds
- Simualtion de **scénarios de stress systémiques** tenant compte de la contagion et le risque endogène résultant
- Modélisation du lien entre liquidité et risque de marché.

Chantiers en cours avec:

- Equipe de Stabilité Financière, Banque Centrale de Norvège
- Division Stabilité Financière, Banque d'Angleterre

Le défi de la Haute Fréquence

Ces problèmes sont rendus plus complexes dans les marchés électroniques où divers types d'intervenants envoient des ordres sur une large gamme de fréquences, allant de la **milli-seconde** (trading haute fréquence) au **mois** (fonds de pension, assurances).

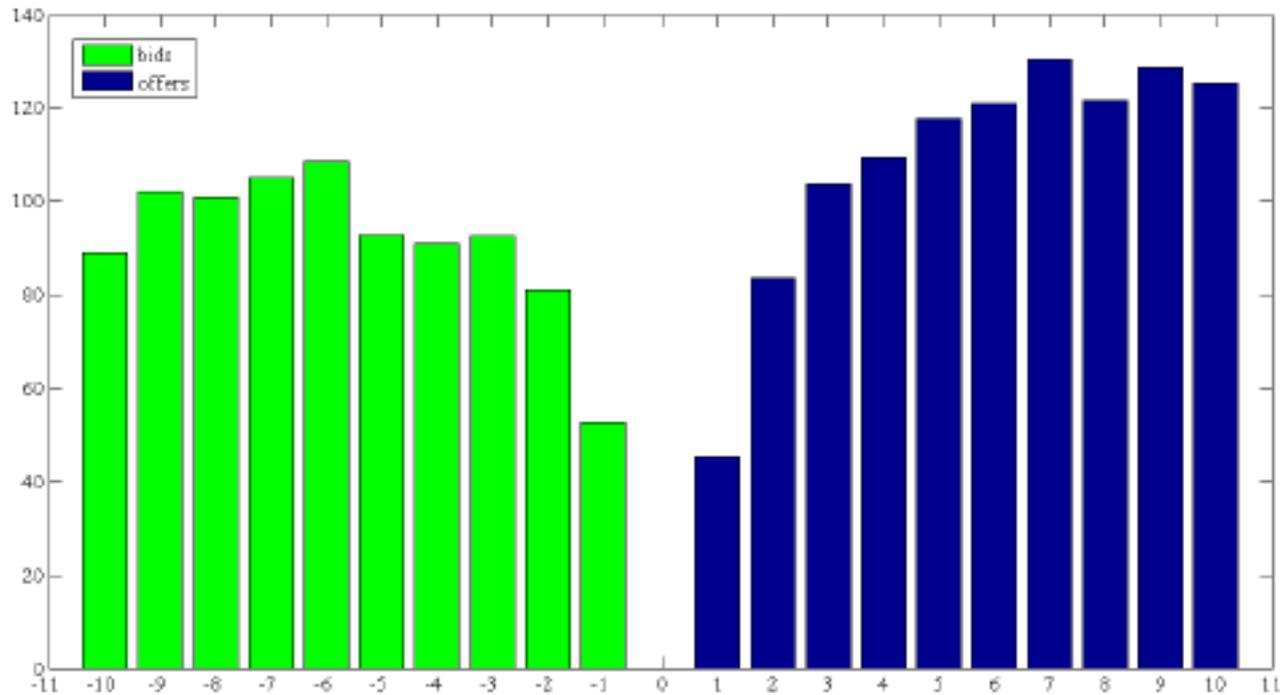
- Ordres de vente et achat centralisés dans un carnet d'ordre électronique qui exécute les ordres selon des règles de priorité en temps et en prix et génère une suite de prix de transaction.
- "BigData": plusieurs TeraOctets de messages envoyés par les intervenants de marché chaque jour
- Dynamique discrète à haute fréquence ($10^{-3} - 10^{-1}$ sec): prix déterminés par le flux d'ordre dans le carnet (modèles de file d'attente: C & Larrard, 2011, 2012)
- Dynamique de type diffusion à basse fréquence (heure, jour)
- Dynamique intermédiaire plus complexe: coexistence de variables diffusives ('homogénéisées) et discrètes (composante basse fréquence): liquidité finie + volatilité.

A limit order

Order Book		
	SHARES	PRICE
ASKS ↑	22	69900
	17	69800
	140	69700
	24	69600
	6	69500
BIDS ↓	42	69300
	42	69200
	41	69100
	32	69000
	21	68900

Order Book		
	SHARES	PRICE
ASKS ↑	22	69900
	17	69800
	140	69700
	24	69600
	6	69500
BIDS ↓	4	69400
	42	69300
	42	69200
	41	69100
	32	69000

Limit Order book: average profile



Tracking traders in the LOB

[-] ttable	[751]("	", 0x001f5848 {working_orders=[1]((641689455042,
+ [0]		"	", 0x001f5848 {working_orders=[1]((641689455042, 0x003
+ [1]		"	', 0x00707848 {working_orders=[1]((641689329220, 0x0070
+ [2]		"	", 0x0072ac40 {working_orders=[1]((641689463184, 0x0072
[-] [3]		"	', 0x003a49c0 {working_orders=[5]((641689452709, 0x00
+ [-] first		"	"
[-] second		0x003a49c0 {working_orders=[5]((641689452709, 0x003a4ce8 {side=0 size=20 showsize=20 ...}),	
[-] working_orders		[5]((641689452709, 0x003a4ce8 {side=0 size=20 showsize=20 ...}), (641689452885, 0x00835ee8 {s	
+ [0]		(641689452709, 0x003a4ce8 {side=0 size=20 showsize=20 ...})	
[-] [1]		(641689452885, 0x00835ee8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...})	
[-] first		641689452885	
[-] second		0x00835ee8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...}	
side		1	
size		20	
showsize		20	
maxshow		0	
+ otit		(641689452885, 0x00835ee8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...})	
+ ttit		"	', 0x003a49c0 {working_orders=[5]((641689452709, 0x00
+ backptr		0x00835cc4 (135925, [11])0x00835da8 {side=' ' size=30 showsize=30 ...}, 0x00835ee8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...}	
+ pos		0x00835ee8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...}	
+ [2]		(641689451628, 0x008121d8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...})	
+ [3]		(641689451816, 0x00828580 {side=' ' size=20 showsize=20 ...})	
+ [4]		(641689453161, 0x008473d8 {side=' ' size=20 showsize=20 ...})	
+ [4]		"	", 0x003b4f90 {working_orders=[3]((641689452667, 0x00:
+ [5]		"	', 0x007edcc8 {working_orders=[1]((641689455088, 0x0
+ [6]		"	', 0x00414ca0 {working_orders=[3]((641689453638, 0x00

Classification des types de flux d'ordre

Etude des données de la CFTC (Cont, Kukanov, Vinkovskaya 2012)

- Données brutes de message en format FIX avec identifiant du participants de marché
- Classification des flux d'ordres des participants avec des critères statistiques: algorithme CART (Breiman et al).
- Cette classification montre une division claire en catégories,
 - Traders Haute Fréquence: fréquence $\sim 10^{-3}s$, n'accumulent pas d'inventaire, ordres allant en haut du carnet, bcp d'annulations ($> 80\%$) en vrac
 - Teneurs de marché (market makers)
 - Acheteurs et vendeurs directionnels à "basse fréquence": longues séquence d'ordres dans le meme sens
- Existence de plusieurs échelles de temps

La gamme des échelles de temps en finance

Régime	Echelle de temps	Sujets
Ultra-haute fréquence	$\sim 10^{-3} - 1$ s	Microstructure, Latence
Haute Fréquence (HF)	$\sim 10 - 10^2$ s	Execution d'ordres
"Journalier"	$\sim 10^3 - 10^4$ s	Stratégies de trading, Couverture des risques

L'existence de cette hiérarchie suggère l'emploi de **méthodes asymptotiques** pour relier les dynamiques à différentes fréquences. Idée: partir d'une description statistique du flux d'ordre à échelle fine et en déduire l'asymptotique de la dynamique de marché à des échelles plus grandes

Analogie avec les limites hydrodynamiques des modèles de particules en physique.

Représentation du carnet d'ordre comme une paire de *mesures* (aléatoires) $\eta^N = (\eta_-^N, \eta_+^N)$ représentant le nombre et l'emplacement des ordres de vente et achat dans le carnet d'ordre.

Theorem (Dynamique d'un marché multi-fréquence)

Sous des hypothèses d'échelle (correspondant aux observations empiriques) lorsque le nombre d'intervenants $N \rightarrow \infty$, le carnet $\eta^N = (\eta_-^N, \eta_+^N)$ converge faiblement vers une paire de mesures avec densités $(\rho_+, (t, x), \rho_-, (t, x), t \geq 0, x > 0)$ solution d'un problème aux frontières libres stochastique:

$$\frac{\partial \rho_+}{\partial t} = \frac{\sigma_+^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_+}{\partial x^2} + b_+ \frac{\partial \rho_+}{\partial x} \quad x < S_t; \quad \rho_+(x) = 0 \quad x > S_t$$

$$\frac{\partial \rho_-}{\partial t} = \frac{\sigma_-^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_-}{\partial x^2} + b_- \frac{\partial \rho_-}{\partial x} \quad x > S_t; \quad \rho_-(x) = 0 \quad x < S_t$$

$$dS_t = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\left(\frac{\partial \rho_+}{\partial x} - \frac{\partial \rho_-}{\partial x} \right)}_{\text{Demande agrégée}} + \gamma dW_t$$

Comportement du carnet dans un marché multi-fréquence

- Problème de Stefan' avec terme de bruit blanc à la frontière libre.
- Version stochastique du modèle de formation de prix étudié par Lasry & Lions (2007), Caffarelli et al (2012)
- Fournit une fondation micro-structurel du modèle de Lasry & Lions (2007)
- Permet d'étudier l'impact du trading haute fréquence sur la stabilité, volatilité et liquidité de marché.
- Lien avec 'jeux à champs moyen' (Lasry Lions 2006).

Synthèse

De multiples situations, caractérisées par l'impact non-négligeable de l'offre/demande de participants de marché sur le prix, où il n'est pas suffisant, pour modéliser les risques financiers, d'avoir une représentation statistique –exogène et stationnaire– des mouvements de prix.

Traits communs: risque endogène, prise en compte de la **liquidité** et du **mécanisme de formation de prix**

Bonne nouvelle: des approches de modélisation mathématique existent et sont tractables/ accessibles:

- Modèles dynamique de **rétroaction** (feedback) non-linéaire prix/ demande
- Méthodes asymptotiques et lien entre dynamique à différentes échelles

Ces modèles jettent un nouveau regard sur le risque de portefeuille, la valeur liquidative vs prix nominal de marché, le lien entre haute et basse fréquence et l'anatomie des *Cygnés Noirs*

Conclusion

- On ne peut pas tout représenter tous les risques financiers avec une approche de modélisation (purement) statistique: il faut distinguer risques récurrents -extrêmes ou pas- des risques **endogènes** déclenchés par l'action des intervenant de marché.
- Les situations de crise comportent une composante non-négligeable de **risque endogène** qu'on ne peut décrire comme un aléa statistique indépendante.
- La modélisation du couplage entre l'action des intervenants de marché et les fluctuations de prix qui en résulte passe par le mécanisme (déterministe) de formation de prix, tenant compte de la liquidité du marché.
- Lorsqu'on tient compte du risque endogène, des règles de 'gestion/minimisation de risque' peuvent en fait générer des instabilités et augmenter le risque...
- Cela appelle à mieux intégrer les règles de gestion et mécanismes de régulation dans les modèles de **risque**.

Références: risque endogène

- R Cont, L Wagalath (2013)
Running for the Exit: Distressed Selling and Endogenous Correlation in Financial Markets, **Mathematical Finance**.
<http://ssrn.com/abstract=1722508>.
- R Cont, L Wagalath (2012)
Fire sale forensics: measuring endogenous risk,
<http://ssrn.com/abstract=2051013>.
- R Cont, A Moussa, E B Santos (2013) Network Structure and Systemic Risk in Banking Systems, Handbook of Systemic Risk, Cambridge Univ Press,

Références: données haute fréquence

- Rama CONT (2011) Statistical modeling of high frequency data: facts, models and challenges, IEEE SIGNAL PROCESSING, Vol 28, No 5, 16–25.
- Rama Cont and Adrien de Larrard (2010) Price dynamics in a Markovian limit order market, SIAM Journal on Financial Mathematics, <http://ssrn.com/abstract=1735338>.
- Rama Cont and Adrien de Larrard (2011) Order book dynamics in liquid markets: limit theorems and diffusion approximations, <http://ssrn.com/abstract=1757861>.
- Rama Cont and Adrien de Larrard (2012) Price dynamics in limit order markets: linking volatility with order flow, Working Paper.