

Devoir Surveillé de Mathématiques Financières

Durée : une heure.

Les calculatrices non programmables sont autorisées. Le téléphone portable, les calculatrices programmables et les autres appareils électroniques sont interdits.

*La copie que vous rendrez contiendra **impérativement** vos feuilles de brouillon (même inutilisées) ainsi que l'énoncé du devoir.*

Exercice 1. (2 pts)

Vous empruntez aujourd'hui au taux annuel i une somme S que vous rembourserez dans un an exactement.

Justifiez la formule $i' = i/(1-i)$ qui donne le taux annuel effectif i' de cet emprunt lorsque les intérêts sont précomptés.

Les intérêts $S \times i$ sont versés aujourd'hui puisqu'ils sont précomptés. Ainsi la somme effective dont vous disposez aujourd'hui est $S_0 = S - S \times i$ et ce que vous rembourserez dans un an, $S_1 = S$. Le taux d'intérêt effectif est donc :

$$i' = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{S - (S - S \times i)}{(S - S \times i)} = \frac{S \times i}{S \times (1 - i)} = \frac{i}{(1 - i)}.$$

Exercice 2. (4 pts)

Vous placez un capital C à 2% (taux annuel) pendant dix ans. On envisage les deux situations suivantes : (a) les intérêts sont simples (b) les intérêts sont composés.

De combien d'années faut-il prolonger votre placement pour doubler le montant des intérêts dans chacune des deux situations ?

Vos réponses auraient-elles été les mêmes avec un taux d'intérêt annuel de 4% ?

a. Intérêts simples.

Le montant des intérêts générés par un capital C placé au taux i durant n périodes est : $C \times i \times n$. Quel que soit le taux i ce montant est proportionnel à n . Ainsi que le taux soit de 2% ou de 4%, il faut doubler la durée de votre placement pour doubler le montant des intérêts (le montant de vos intérêts doublera si vous prolongez votre placement de dix ans).

b. Intérêts composés.

Le montant des intérêts générés par un capital C placé au taux i durant n périodes est : $C \times ((1+i)^n - 1)$. En prolongeant le placement de k années vous doublez le montant de vos intérêts ; cela se traduit par :

$$C \times ((1+i)^{n+k} - 1) = 2 \times C \times ((1+i)^n - 1) \quad (1)$$

La solution de (1) est $k = \ln[2 \times ((1+i)^n - 1)] / \ln(1+i) - n$. Ainsi, lorsque $n = 10$ on obtient $k \approx 8,3$ ou $k \approx 7,2$ selon que $i = 0,02$ ou $i = 0,04$: pour doubler le montant de vos intérêts il faut prolonger de neuf ans au moins un placement dont le taux est de 2% et de huit ans au moins un placement dont le taux est de 4%.

Exercice 3. (4 pts)

Un conseiller financier vous propose de placer 10000€ à 3% pendant quatre ans puis à 4% durant les trois années suivantes (les taux sont annuels et les intérêts sont composés).

1. Quelle est la valeur de votre placement au terme des sept années ?

2. Quel est le taux moyen du placement ?

Le capital acquis au terme des sept années du placement est : $10000 \times 1,03^4 \times 1,04^3 = 12660,44\text{€}$. Le taux moyen annuel du placement (i_m) vérifie : $10000 \times (1+i_m)^7 = 10000 \times 1,03^4 \times 1,04^3$; donc $i_m = 1,03^{4/7} \times 1,04^{3/7} - 1$. Le taux moyen annuel du placement est de 3,43% environ.

Vous acceptez l'offre à condition de pouvoir retirer votre argent à tout moment au cours de la septième année. Les intérêts seront alors considérés comme simples entre le début de la septième année et la fin du placement.

3. Quelle est le capital acquis si vous retirez votre argent après six ans et neufs mois ?

Le capital acquis après six ans et neuf mois est : $10000 \times 1,03^4 \times 1,04^2 \times (1 + 0,75 \times 0,04) = 12538,71\text{€}$ puisque les intérêts sont considérés comme simples durant les neuf derniers mois du placement (capitalisation mixte).

4. Quel capital aurait-il fallu placer pour retirer 13000€ au bout de six ans et trois mois ?

On cherche C de sorte que : $C \times 1,03^4 \times 1,04^2 \times (1 + 0,25 \times 0,04) = 13000\text{€}$ puisque les intérêts sont considérés comme simples durant les trois derniers mois du placement. On obtient $C = 13000 / (1,03^4 \times 1,04^2 \times (1 + 0,25 \times 0,04))$. Il aurait fallu placer 10573,2€ pour retirer 13000€ après six ans et trois mois.

Exercice 4. (2 pts)

Sur un compte à 4% (le taux est annuel et les intérêts sont composés), monsieur Borel versera la même somme à la fin de chaque mois entre le 30 Mars 2014 et le 30 Août 2016. La valeur acquise de ces trente versements actualisée au 30 Janvier 2016 est de 4705,8€.

1. Quelle est la valeur de l'ensemble des versements actualisée au 30 Avril 2015 ?

Le taux mensuel équivalent est $i_e = 1,04^{1/12} - 1 \approx 0,0033$. Si l'on note V_{23} la valeur acquise des trente versements actualisée au 30 Janvier 2016 alors la valeur actualisée au 30 Avril 2014 est $V_{14} = V_{23} / (1 + i_e)^9 \approx 4569,4\text{€}$.

2. Quelle somme monsieur Borel place-t-il chaque mois sur son compte ?

La valeur au 30 Août 2016 de l'ensemble des placements est $V_{30} = V_{23} \times (1 + i_e)^7 \approx 4814,7\text{€}$. Or $V_{30} = F \times ((1 + i_e)^{30} - 1) / i_e$ où F désigne le montant en euros que M. Borel verse chaque mois sur son compte. On en déduit $F = i_e \times V_{30} / ((1 + i_e)^{30} - 1) \approx 153\text{€}$. A la fin de chaque mois, M. Borel place 153€ sur son compte.

Exercice 5. (4 pts)

Le 30 Mars 2014 monsieur Weill versera une première somme S (en euros) sur un compte à 3% (le taux est annuel et les intérêts sont composés). Ensuite, jusqu'à sa retraite (le 30 Juin 2050) il versera à la fin de chaque mois 0,5% de plus que le mois précédent. Il espère ainsi obtenir un complément de retraite de 1000€/mois.

Quelle est la valeur de S dans chacune des situations suivantes :

- le complément de retraite est versé durant dix ans à la fin de chaque mois,
- le complément de retraite est versé de façon perpétuelle la fin de chaque mois,
- le complément de retraite est versé durant onze ans au début de chaque mois ?

Les $n = 436$ versements de monsieur Weill sont en progression géométrique de raison $q = 1,005$ et le taux mensuel équivalent est $i_e = 1,03^{1/12} - 1 \approx 0,002466$. Comme $1 + i_e \neq q$ le capital acquis le jour où M. Weill prend sa retraite est : $V_r = S \times ((1 + i_e)^n - q^n) / ((1 + i_e) - q)$.

- situation 1 : le complément de retraite $C = 1000\text{€}$ est versé durant dix ans ($n_1 = 120$ mois) à la fin de chaque mois. La valeur actualisée au jour de la retraite de l'ensemble de ces flux est : $A_r = C \times (1 - (1 + i_e)^{-n_1}) / i_e \approx 103762,4\text{€}$. Or la capitalisation des versements de M. Weill doit être égale à l'actualisation au jour de la retraite de ses compléments : $V_r = A_r$. On en déduit : $S = A_r \times ((1 + i_e) - q) / ((1 + i_e)^n - q^n) \approx 44,8\text{€}$. M. Weill doit verser chaque mois 44,8€ pour espérer obtenir 1000€ de complément de retraite à la fin de chaque mois durant dix ans.

- situation 2 : le complément de retraite $C = 1000\text{€}$ est versé de façon perpétuelle à la fin de chaque mois. La valeur actualisée au jour de la retraite de l'ensemble de ces flux est : $A_r = C / i_e \approx 405470,6\text{€}$. Or la capitalisation des versements de monsieur Weill doit être égale à l'actualisation au jour de la retraite de ses compléments : $V_r = A_r$. On en déduit : $S = A_r \times ((1 + i_e) - q) / ((1 + i_e)^n - q^n) \approx 175,0\text{€}$. M. Weill doit verser chaque mois 175,0€ environ pour espérer obtenir 1000€ de complément de retraite à la fin de chaque mois de façon perpétuelle.

- situation 3 : le complément de retraite $C = 1000\text{€}$ est versé durant onze ans ($n_3 = 132$ mois) au début de chaque mois. La valeur actualisée au jour de la retraite de l'ensemble de ces flux est : $A_r = C \times [1 - (1 + i_e)^{-n_3}] / i_e \times (1 + i_e) = 112827,6\text{€}$. Comme dans les situations 1 et 2, de : $V_r = A_r$ on déduit : $S = A_r \times ((1 + i_e) - q) / ((1 + i_e)^n - q^n) \approx 48,7\text{€}$. M. Weill doit verser chaque mois 48,7€ pour obtenir 1000€ de complément de retraite au début de chaque mois durant onze ans.

Exercice 6. (4 pts)

En mai 2014 vous emprunterez 100000€ à 4% (taux annuel) que vous rembourserez grâce à six annuités consécutives versées de mai 2015 à mai 2020.

Dressez le tableau d'amortissement de cet emprunt sachant que (i) les deux premières annuités sont égales (ii) les annuités augmentent de 1000€ chaque année de mai 2016 à mai 2018 et (iii) les annuités augmentent de 2% par an de mai 2018 à mai 2020.

flux	date	montant	valeur actualisée (30/05/2014)
1	30/05/2015	A	$A/(1+i)$
2	30/05/2016	A	$A/(1+i)^2$
3	30/05/2017	$A+r$	$(A+r)/(1+i)^3$
4	30/05/2018	$A+2r$	$(A+2r)/(1+i)^4$
5	30/05/2019	$(A+2r) \times q$	$(A+2r) \times q/(1+i)^5$
6	30/05/2020	$(A+2r) \times q^2$	$(A+2r) \times q^2/(1+i)^6$

Table 1: *Montant de chaque annuité et valeur actualisée à la date de l'emprunt*

Table 1 indique le montant et la valeur actualisée à la date de l'emprunt de chacune des six annuités en fonction de : A le montant inconnu de la première annuité, i le taux d'intérêt annuel ($i = 0,04$), r la différence entre deux annuités successives de mai 2016 à mai 2018 ($r = 1000$) et q le quotient entre deux annuités successives de mai 2018 à mai 2020 ($q = 1,02$).

La valeur des six annuités à la date de l'emprunt est égale au capital C emprunté ($C = 100000$). En notant $j = (1+i)^{-1}$ on en déduit :

$$Aj + Aj^2 + (A+r)j^3 + (A+2r)j^4 + (A+2r)qj^5 + (A+2r)q^2j^6 = C \quad (2)$$

et :

$$A = (C - rj^3(1 + 2j + 2qj^2 + 2q^2j^3))/(j + j^2 + j^3 + j^4 + qj^5 + q^2j^6) \approx 17782,84 \quad (3)$$

De cette valeur de la première annuité on déduit le tableau d'amortissement Table 2.

période	date verst	annuité	amortissement	intérêts	capital restant dû
0	30/05/2014	-	-	-	100000,0
1	30/05/2015	17782,8	13782,8	4000,0	86217,2
2	30/05/2016	17782,8	14334,2	3448,7	71883,0
3	30/05/2017	18782,8	15907,5	2875,3	55975,5
4	30/05/2018	19782,8	17543,8	2239,0	38431,7
5	30/05/2019	20178,5	18641,2	1537,3	19790,4
6	30/05/2020	20582,1	19790,4	791,6	0,0

Table 2: *Tableau d'amortissement*



SESSION 2004

EXAMEN BLANC

EPREUVE : MATHEMATIQUES FINANCIERES ET RECHERCHE
OPERATIONNELLE

DUREE : 3 H

COEF. : 2

CLASSE : BTS INFORMATIQUE DE GESTION

MATHEMATIQUES FINANCIERES

- 1) Pour rembourser une dette de 910 000 F contractée le 1^{er} septembre 2003 au taux annuel de 18%, le débiteur a choisi la solution suivante : acceptation de 5 effets de commerce de même valeur nominale échéant tous les deux (2) mois, la 1^{ère} échéance étant fixée au 1^{er} novembre 2003.

Travail à faire

Calculer la valeur nominale de chaque effet.

2)

a - Le 1^{er} mars, un commerçant remet à son créancier, pour acquitter une dette, deux effets de commerce et 456 000 F en espèce. La dette est ainsi complètement remboursée. L'échéance du premier effet, dont la valeur nominale est de 900 000 F est au 1^{er} avril ; l'échéance du 2^{ème} effet est au 12 mai et l'escompte qu'il supporte est trois (3) fois plus élevé que celui du premier.

Travail à faire

Calculer le montant de la dette sachant que le taux d'escompte est 6% (intérêts simples)

b - En vue de s'acquitter d'une dette d'un montant V_0 , une cliente décide de verser cinq (5) trimestrialités, la première étant versée trois (3) mois après l'achat. Les montants des trimestrialités sont les suivants, respectivement 6 000 000 F ; 4 750 000 F ; 4 500 000 F ; 3 500 000 F et 3 500 000 F.

Travail à faire

Déterminer au taux trimestriel de 4% le montant V_0 de la dette. (Arrondir la valeur au millier de francs près) (intérêts composés).

- 3) M. KASSI travaille dans une usine de fabrication d'ustensiles. Il estime être mal rémunéré et désire retourner à la terre dans sa région natale où il compte acheter une ferme le 1^{er} janvier 2004 ; il doit pouvoir disposer à cette date d'une somme de 4 000 000 F.

Travail à faire

- a) En vue de constituer ce capital il projette effectuer les 3 placements suivants à intérêts composés au taux annuel de 8% : 1 000 000 F le 01/01/00 ; et 1 000 000 F le 01/01/02. Aura-t-il atteint son objectif le 01/01/04 ? Justifier la réponse.

- b) Quelle somme devrait-il placer le 01/01/98 à intérêts composés au taux de 8% et réaliser son objectif le 01/01/04 ?
- 4) Trois personnes A, B, C ont placé des capitaux égaux à intérêts composés pendant 2 ans, aux conditions suivantes :
- A : taux annuel 6%, capitalisation des intérêts à la fin de chaque année ;
B : taux semestriel 3%, capitalisation des intérêts à la fin de chaque semestre ;
C : taux trimestriel 1,5%, capitalisation des intérêts à la fin de chaque trimestre.

Travail à faire

- a) Au bout des 2 ans, les intérêts produits par les capitaux placés par les deux premières personnes présentent une différence de 85 905 F. Calculer la valeur commune des trois sommes placées.
- b) Quelle est la différence des intérêts produits par les placements de B et C ?
- c) A quels taux annuels A, B, C devraient-ils placer leurs capitaux à intérêts simples, également pendant 2 ans, pour que les intérêts soient les mêmes que précédemment ?
- d) A quel taux annuel A devrait-il placer son capital à intérêts composés pour que les intérêts produits au bout des 2 ans soient égaux aux intérêts du placement fait par C ?
- e) A quel taux semestriel B devrait-il placer son capital à intérêts composés pour que les intérêts produits au bout de 2 ans soient égaux aux intérêts du placement fait par C ?

NB : Les questions 1, 2, 3 et 4 sont indépendantes.

RECHERCHE OPERATIONNELLE

M. KOUAO est un exploitant agricole dans la région d'AKOUPÉ. En vue d'enrichir ses terres il a besoin de 60 kg de potassium, 120 kg de sodium et 90 kg de calcium par hectare. Ces composants peuvent être obtenus à partir de deux types d'engrais A1 et A2. Un paquet d'engrais de type A1 contient 1kg de potassium, 2 kg de sodium et 2kg de calcium. Le paquet d'engrais de type A2 contient quant à lui, 3 kg de potassium, 3 kg de sodium et 1 kg de calcium. Ces paquets d'engrais sont vendus à 1 000 F le paquet de type A1 et à 900 F le paquet de type A2.

Travail à faire

Sachant que les plantations de M. KOUAO couvrent une superficie de 40 Ha qu'il souhaite fertiliser au moindre coût il demande de l'aider à déterminer les quantités optimales d'engrais à acquérir. Pour cela :

- 1) Déterminer le programme linéaire relatif au problème de M. KOUAO
- 2) Résoudre ce programme linéaire par la méthode du simplexe.
- 3) Quel composant a été acheté en surplus ? Préciser la quantité.

Mathématiques financières(S2-SEG) - Session Mai 2018

Durée:1H30min

Pr.NOKAIRI

Questionnaire à choix unique : Cochez la bonne réponse.

N.B:DANS VOS CALCULS, PRENEZ UNIQUEMENT DEUX CHIFFRES APRES LA VIRGULE SANS ARRONDIR.

1) La valeur acquise par un capital de 2500 DH à intérêt simple au taux de 6% sera égale au bout de combien de temps à 2625 DH ?

- A. 9 mois
- ✓B. 10 mois
- C. 120 jours
- D. 280 jours

2) Un capital de 9000 DH est placé à 8% du 10 Mars 2016 au 30 Août 2016. Sa valeur acquise est égale à :

- ✓A. 9346 DH
- B. 9360 DH
- C. 9343 DH
- D. 346 DH

3) Quel est le taux d'intérêt réel d'un prêt de 5000 DH accordé pendant 6 mois au taux annoncé de 8%, si les frais retenus par la banque s'élèvent à 200 DH ?

- A. 7,50%
- B. 8,21%
- C. 8,11%
- ✓D. 8,33%

4) On considère les trois capitaux suivants :

C1 = 18.500 DH du 01/07/15 au 05/11/15 à 9%

C2 = 15.000 DH du 12/11/15 au 29/12/15 à 8,5%

C3 = 23.500 DH du 04/04/15 au 12/10/15 à 10,5%

Quel est le taux moyen de placement de ces trois capitaux ?

- A. 9,77%
- B. 8,46%
- ✓C. 9,84%
- D. 9,64%

5) Un commerçant souhaite remplacer un effet de valeur nominale de 8500 DH qu'il doit payer dans 60j par un autre effet échéant dans 180j. Quel doit être le montant de cet effet, sachant que le taux d'escompte est de 10% ?

- A. 8780,12 DH
- ✓B. 8798,24 DH
- C. 8516,46 DH
- D. 8788,24 DH

6) Quelle est la valeur acquise par un capital de 1400 DH au taux de 6% au bout de 3 ans et 4 mois par capitalisation annuelle ? (solution rationnelle).

- ☒ A. 1700,77 DH
- B. 1699,79 DH
- C. 1710,23 DH
- D. 1732,11 DH

7) Un capital de 2000 DH est placé à intérêts composés au taux de 8,5%. Au bout de combien de temps (approximativement) aura-t-il acquis une valeur de 3120 DH ?

- A. 4 années et 5 mois
- B. 6 années et 3 mois
- C. 3 années et 5 mois
- ☒ D. 5 années et 5 mois

8) Un emprunt est remboursé par le versement d'une suite de mensualités différées de 3 mois. Cela signifie que le versement de la première mensualité intervient :

- A. Immédiatement après la remise du capital emprunté
- B. 2 mois après la remise du capital emprunté
- ☒ C. 3 mois après la remise du capital emprunté
- D. 4 mois après la remise du capital emprunté
- E. 1 semestre après la remise du capital emprunté

9) Un capital de 15.000 DH emprunté à un taux annuel de 6% est amorti par le versement d'une suite de 48 mensualités en début de période. Calculer le montant de la mensualité en utilisant le taux proportionnel.

- ☒ A. 350,52 DH
- B. 354,12 DH
- C. 361,45 DH
- D. 440,50 DH

10) Un particulier place sur un compte, 6 semestrialités de 2000 DH versées à la fin de chaque période. Quelle est la valeur acquise au bout de cette période, sachant que le taux annuel est de 9% (en utilisant le taux équivalent).

- A. 13.000,04 DH
- B. 12.400,12 DH
- C. 13.200,50 DH
- ☒ D. 13.400,04 DH

Mathématiques financières (S2-SEG) E 7 - Session de Mai 2019

Durée 1 heure 30 min.

Questionnaire à choix unique

N.B.: Pour vos calculs, prenez deux chiffres après la virgule

1) Un capital de 5000 Dh est placé à 4% du 1er juillet 2018 au 31 décembre 2018. Sa valeur acquise au bout de cette période sera:

- A. 5101,00 Dh
- ✓B. 5100,00 Dh
- C. 5123,13 Dh
- D. 5145,22 Dh

2) Quelle est la valeur acquise par un capital de 315.000 Dh placé à intérêt composé, au bout de 4 ans et 6 mois, par capitalisation semestrielle, sachant que le taux annuel est de 8%? (taux équivalent avec trois chiffres après la virgule)

- ✓A. 444.478,21 Dh
- B. 444.456,12 Dh
- C. 444.315,01 Dh
- D. 444.490,25 Dh

3) Une personne place des annuités constantes de 1000 Dh. La date du 1er versement est le 30 Janvier 2010 et la date du dernier versement est le 30 janvier 2018. Quelle sera la valeur acquise 2 ans après le dernier versement, sachant que le taux de capitalisation est de 4%.

- A. 38.467,34 Dh
- B. 38.481,30 Dh
- C. 38.456,12 Dh
- ✓D. 38.486,35 Dh

4) Au bout de combien de temps, un capital placé à intérêt composé et à 5% double t-il sa valeur?

- A. 14 ans 3 mois 4 j
- B. 14 ans 2 mois 25 j
- ✓C. 14 ans 2 mois 12 j
- D. 14 ans 3 mois 20 j

5) Un responsable financier souhaite remplacer un effet de valeur nominale : 40.000 Dh, échéant dans 30 j par un autre effet échéant dans 90 j. Quelle est la valeur de l'effet de remplacement, sachant que le taux d'escompte est de 8%?

- ✓A. 40.544,21 DH
- B. 40.560,12 DH
- C. 40.548,11 DH
- D. 40.534,10 DH

6) Soient les trois placements suivants: 10.500 Dh pendant 5 mois à 8%; 13.000 Dh pendant 2 mois à 10%; 25.000 Dh pendant 7 mois à 9%. Calculez le taux moyen de placement de ces trois capitaux.

- A. 8,79%
- B. 9,97%
- ✓C. 8,89%
- D. 10%

7) Vous envisagez le placement d'un capital de 800.000 Dh pendant 4 ans et 6 mois. Parmi ces deux solutions, laquelle vous rapportera plus ?

- A. un placement à 9% l'an avec capitalisation annuelle
- ✓B. un placement à 4% par semestre avec capitalisation semestrielle

8) Un particulier s'engage, auprès d'un organisme de capitalisation, à verser 8 annuités constantes de 20.000 Dh chaque fin de mois. Le taux est de 9% l'an. Le capital constitué 4 mois après la date du dernier versement est : (solution commerciale)

- ✓A. 226.997,40 Dh
- B. 226.890,20 Dh
- C. 227.080,00 Dh
- D. 227.110,30 Dh

9) Pour acheter un logement, une personne a emprunté la somme de 450.000 Dh qu'elle va rembourser en 10 années sous forme de mensualités. Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 6% et que le versement de la première annuité a eu lieu après 1 mois, quel est le montant de la mensualité? (taux proportionnel)

- A. 4920,31 DH
- B. 4991,20 DH
- ✓C. 4995,95 DH
- D. 5000,00 DH

10) Quel est le taux réel de placement d'un capital de 10.100 Dh, sachant que la banque facture des frais de dossier de 100 Dh et que le taux annoncé est de 8%?

- ✓A. 8,08%
- B. 8,07%
- C. 8,06%
- D. 8,09%

Auditoire : LF Gestion 1

Mathématiques Financières

Examen Final

(Session 1)

EXERCICE 1 : (8 points)

La société « Centrale U. » remet à l'escompte le 10/01 trois effets de commerce de valeurs nominales 4500 €, 2600 € et 1200 € et d'échéance respectives 20/03, 15/2 et 30/01. Le taux étant 12%.

- 1- Calculer pour chaque effet l'escompte et la valeur actuelle.
- 2- Déterminer l'échéance moyenne des trois effets.

EXERCICE 2 : (8 points)

Une suite de 12 annuités est ainsi constituée :

- 4 annuités de 1500 € chacune
- 4 annuités de 2000 € chacune
- 4 annuités de 2500 € chacune

- 1- Calculer la valeur actuelle et la valeur acquise de cette série d'annuités au taux de 11%

Si le taux de capitalisation des 4 premières annuités est de 9%, celui des 4 annuités suivantes est de 10,5% et celui des 4 dernières annuités est de 12%.

- 2- Calculer la valeur actuelle et la valeur acquise de cette série d'annuités.

EXERCICE 3 : (4 points)

Pour combien de mois faut-il verser 100 € pour avoir une valeur acquise de 2000 € sachant que le taux de capitalisation est de 1%. Analyser les deux solutions possibles et vérifier les calculs.

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Partiel, première session - Décembre 2019 - 2h00

CALCULATRICES SANS MODULE DE CALCUL FORMEL AUTORISÉES
FORMULAIRE SANS ANNOTATION AUTORISÉ
LES PORTABLES DOIVENT ÊTRE ÉTEINTS ET RANGÉS.

Le barème est donné à titre indicatif

CONSIGNES DE RÉDACTION

Vous devez :

- Présenter vos calculs, en précisant quelle est l'inconnue cherchée.
- Préciser le numéro de la formule utilisée et l'écrire avec les données numériques.
- Isoler l'inconnue cherchée (lorsque c'est possible), ou bien préciser que vous utilisez le solveur de votre calculatrice.
- Donner votre solution : arrondir au centime lorsqu'il s'agit d'une valeur monétaire, arrondir également les taux d'intérêts annuels à deux chiffres après la virgule (par exemple 3,14%), et les taux d'intérêts mensuels à quatre chiffres après la virgule (par ex. 0,1234%)

La notation tiendra compte de ces consignes.

Exercice 1 - 5 points

Les questions de cet exercice sont indépendantes les unes des autres.

1. Un capital de 150 000 € prêté le 24 septembre 2019 à 1,8% a une valeur acquise à la fin du prêt de 150 765 €. A quelle date le prêt sera-t-il remboursé ? (intérêts simples commerciaux)
2. Un établissement financier vous propose un placement d'une durée de 10 ans. Ce placement est rémunéré au taux de 7% pendant 4 ans, puis 3% pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel du placement ?
3. Un établissement financier propose un nouveau placement au taux $r\%$. Mais celui-ci verse les intérêts tous les trimestres **au taux proportionnel**. Le taux effectif de ce placement est $r_e = 2\%$. Quel est alors le taux r annoncé ?
4. Un nouveau produit de placement propose de « récompenser » la fidélité de ses souscripteurs : le taux d'intérêt annuel annoncé est 1,8%, mais si le capital (et les intérêts produits) restent bloqués pendant 10 ans, à l'issue de la dixième année, l'épargnant reçoit une prime égale à 10% des intérêts acquis pendant ces années. Quel est dans ce cas le taux effectif de ce placement ?

Exercice 2 - 4 points

Un emprunt de 300 000 €, contracté sur une durée de 15 ans au taux annuel de 2%, est remboursable par annuités NON constantes. La première annuité est égale à $A_1 = 3\,343,78$ €, et les 14 annuités suivantes sont toutes égales à A €.

1. Calculer le montant de A (arrondir à l'euro près).
2. Calculer le montant du capital restant dû après le versement de la 8^{ième} annuité.
3. Une banque concurrente propose un prêt de 300 000 €, également sur une durée de 15 ans, où cette fois la première annuité est de 0 €, et les 14 annuités suivantes sont toutes égales à 25 000 €. Quel est le taux annuel de ce prêt ?

Exercice 3 - 3 points + 2 points Hors Barème

En janvier 2014, Jean-Pierre et Catherine Billard ont contracté un emprunt immobilier auprès de leur banque pour un montant de 556 000 €, au taux annuel de 1,74%, qu'ils remboursent par mensualités constantes sur 18 ans à partir du 1er février 2014.

1. Calculer le montant de la mensualité du prêt initial contracté par M. et Mme Billard. **Vous arrondirez la mensualité à l'euro près.**
En janvier 2019, Jean-Pierre et Catherine héritent de 300 000 euros de leur grand-tante Danielle. Ils décident alors de renégocier leur prêt auprès de leur banque. Celle-ci leur propose de régler en février 2019 une mensualité exceptionnelle de 303 000 €, sans pénalité, puis de terminer le remboursement de leur emprunt par 60 mensualités de 2 000 € à compter de mars 2019.
2. Déterminer le capital restant dû par M. et Mme Billard juste après le versement de la 60^{ième} mensualité.
3. Calculer le taux mensuel, puis le taux annuel, de la proposition faite par la banque à partir de mars 2019.
4. **Question hors barème** Déterminer le taux actuariel mensuel puis annuel de cette opération financière pour M. et Mme Billard.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 4 - 8 points

Un emprunt obligataire possède les caractéristiques suivantes :

- Date d'émission : 01/01/2014.
- Nombre d'obligations émises : $N = 1\,000\,000$
- Valeur nominale d'une obligation : $V_N = 200\text{ €}$
- Valeur d'émission d'une obligation : $V_E = 198\text{ €}$
- Remboursement au pair.
- Taux d'intérêt nominal : $r = 5,5\%$
- Amortissement sur $n = 12$ ans par annuités presque constantes.

1. Calculer le montant théorique de l'annuité A .
2. Déterminer le nombre d'obligations amorties la première puis la seconde année, ainsi que le montant exact des deux premières annuités.
3. Au bout de combien d'échéances l'émetteur aura-t-il amorti la moitié du capital ?
4. Calculer le taux de revient actuariel t à l'émission pour l'émetteur.
5. Calculer le taux de rendement actuariel x pour un obligataire qui verrait son obligation remboursée la 5^{ième} année.
6. On suppose que l'émetteur supporte à l'émission des frais bancaires égaux à 1% du nominal de l'emprunt. Calculer dans ce cas le taux de revient t' à l'émission pour l'émetteur.
7. Le 1^{er} janvier 2019, immédiatement après le détachement du 5^{ième} coupon, le taux du marché passe à 4%. Quelle est à cette date la valeur de l'obligation (en supposant qu'elle sera remboursée la dernière année) ?

FIN 201 : MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Corrigé du Partiel - Session 1 - Décembre 2019

Exercice 1 - 5 points

1. **● 1,5 point** Soit j la durée du prêt en jours, on a $C_0 = 150\,000\text{€}$ et $C_j = 150\,765\text{€}$. Avec la formule (II.2), on a :

$$150765 = 150000 \left(1 + 0,018 \times \frac{j}{360}\right) \iff 765 = 7,5j. \text{ Donc } j = 102 \text{ jours.}$$
Le prêt sera remboursé le 4 janvier 2020 (6 j. en septembre sans le premier jour, 31 j. en octobre, 30 j. en novembre, 31 j. en décembre et 4 j. en janvier).
2. **● 1 point** Formule (II.5) : La valeur acquise au bout des 10 années est

$$C_{10} = C_0 \times 1,07^4 \times 1,03^6.$$
Le taux moyen annuel r vérifie alors : $C_{10} = C_0 \times (1+r)^{10}$
Donc $r = \left(1,07^4 \times 1,03^6\right)^{1/10} - 1 \approx 4,582\%$
3. **● 1 point** Le taux trimestriel $r_4 = \frac{r}{4}$ vérifie donc (formule (II.7)) :

$$(1+r_4)^4 - 1 = r_e = 0,02 \text{ donc } r_4 = (1,02)^{1/4} - 1 \approx 0,4963\%$$
et $r = 4r_4 \approx 1,9852\%$
4. **● 1,5 point** Soit C_0 le capital placé. Le montant des intérêts I perçus est (II.5)

$$I = C_{10} - C_0 = C_0 \times (1,018^{10} - 1)$$
Dans ce cas la prime P est égale à $P = 0,1 \times I = C_0 \times 0,1 \times (1,018^{10} - 1)$
Le taux d'intérêt effectif r_e vérifie :

$$C_0 \times (1+r_e)^{10} = C_0 + I + P = C_{10} + P = C_0(1,018^{10} + 0,1 \times (1,018^{10} - 1))$$

$$\iff (1+r_e)^{10} \approx 1,214832605 \text{ et } r_e \approx 1,214832605^{1/10} - 1 \approx 1,965\%$$

Exercice 2 - 4 points

1. **2 points** On applique la règle fondamentale N°2 (formule (IV.6a))

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{A_k}{1,02^k} = 300\,000 \iff \frac{3343,78}{1,02} + A \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{1,02^k} = 300\,000$$

$$\iff 3278,22 + A \times 1,02^{-2} \left(\frac{1 - 1,02^{-14}}{1 - 1,02^{-1}} \right) = 300\,000 \text{ (Formule (I.6b))}$$

$$\iff A \times 1,02^{-1} \left(\frac{1 - 1,02^{-14}}{0,02} \right) = 296721,78 \iff A = 25\,000 \text{ €}$$

2. ● **1 point** On utilise la Règle N°4 (formule (IV.8)) :

$$C_8 = A_9 \times 1,02^{-1} + A_{10} \times 1,02^{-2} + \dots + A_{15} \times 1,02^{-7} = 25\,000 \times 1,02^{-1} \left(\frac{1 - 1,02^{-7}}{1 - 1,02^{-1}} \right)$$

$$C_8 = 25\,000 \left(\frac{1 - 1,02^{-7}}{0,02} \right) = 161\,799,78 \text{ €}$$

Remarque : On pouvait également utiliser la règle N°3 (formule (IV.7)) :

$$C_8 = C_0(1+r)^8 - \sum_{k=1}^8 A_k(1+r)^{8-k}$$

3. ● **1 point** Soit r le taux annuel de cette proposition : r vérifie

$$300\,000 = \sum_{k=1}^{15} \frac{A_k}{(1+r)^k} = \sum_{k=2}^{15} \frac{25000}{(1+r)^k} = \frac{25000}{1+r} \times \frac{1 - (1+r)^{-14}}{r}$$

Il faut utiliser le solveur de la calculatrice : $\frac{1 - (1+r)^{-14}}{(1+r)r} = 12 : r \approx 1,8632\%$

Exercice 3 - 3 + 2 HB = 5 points

1. ● **1 point** Il s'agit d'un prêt immobilier : le taux mensuel est donc le taux proportionnel (Formule (II.8)) : $r_{12} = \frac{1,74}{12} = 0,145\%$.

Mensualité du premier prêt ((IV.9)) : $M = \frac{0,00145 \times 556\,000}{1 - (1,00145)^{-216}} \approx 3000 \text{ €}$.

2. ● **1 point** Capital restant dû après versement de la 60^{ième} mensualité (IV.12) :

$$C_{60} = 556\,000 \times \left(\frac{1,00145^{216} - 1,00145^{60}}{1,00145^{216} - 1} \right) \approx 418\,578,44 \text{ €}$$

3. ● **1 point** Une fois versés 303 000 € en février 2019, les Billard doivent encore rembourser 115 578,44 €. Le nouveau taux proportionnel r'_{12} vérifie alors :

Alors : $2000 = \frac{r'_{12} \times 115\,578,44}{1 - (1+r'_{12})^{-60}}$. Il faut s'aider du solveur financier pour trouver : $r'_{12} \approx 0,12392\%$ et le taux annuel est alors : $r' \approx 1,4870\%$

4. ● **Hors barème : 2 points** Le taux mensuel actuariel r vérifie (Formule (III.5))

$$556\,000 = \sum_{k=1}^{60} \frac{3000}{(1+r)^k} + \frac{303\,000}{(1+r)^{61}} + \sum_{k=62}^{121} \frac{2000}{(1+r)^k}$$

$$\iff 556 = 3 \times \frac{1 - (1+r)^{-60}}{r} + \frac{303}{(1+r)^{61}} + \frac{2}{(1+r)^{62}} \times \frac{1 - (1+r)^{-60}}{1 - (1+r)^{-1}} \text{ ((I.6d) et (I.6b))}$$

$$\iff 556 = 3 \times \frac{1 - (1+r)^{-60}}{r} + \frac{303}{(1+r)^{61}} + \frac{2}{(1+r)^{61}} \times \frac{1 - (1+r)^{-60}}{r}$$

$$\iff 556 = 3 \times \frac{1 - (1+r)^{-60}}{r} + \frac{303}{(1+r)^{61}} + 2 \times \frac{(1+r)^{-61} - (1+r)^{-121}}{r}$$

Il faut s'aider du solveur pour déterminer la valeur de $r \approx 0,14113\%$

Soit un taux annuel effectif : $R = (1+r)^{12} - 1 \approx 1,7068\%$

Exercice 4 - 8,5 points

- Date d'émission : 01/01/2014.
- Nombre d'obligations émises : $N = 1\,000\,000$
- Valeur nominale d'une obligation : $V_N = 200\text{ €}$
- Valeur d'émission d'une obligation : $V_E = 198\text{ €}$
- Remboursement au pair.
- Taux d'intérêt nominal : $r = 5,5\%$
- Amortissement sur $n = 12$ ans par annuités presque constantes.

1. **• 0,5 point** Soit A l'annuité constante « théorique » : la formule (V.6) donne :

$$A = 1\,000\,000 \times 200 \times \left(\frac{0,055}{1 - 1,055^{-12}} \right) \approx 23\,205\,846,24\text{ €}.$$

2. **• 2 points** Le nombre μ_1 d'obligations amorties la première année est (V.7) :

$$\mu_1 = 1\,000\,000 \times \frac{0,055}{1,055^{12} - 1} = 61\,029 \text{ (arrondi à l'unité).}$$

$$A_1 = \mu_1 \times V_R + 0,055 \times N \times V_N = 61\,029 \times 200 + 0,055 \times 200\,000\,000 = 23\,205\,800\text{ €}.$$

- La suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = 1 + r = 1,055$, (V.7) donc $\mu_2 = \mu_1 \times 1,055 = 64\,386$.

$$\text{et } A_2 = \mu_2 \times V_R + 0,055 \times 200 \times (1\,000\,000 - 61\,029) = 64\,386 \times 200 + 11 \times 938\,971 = 23\,205\,881\text{ €}.$$

3. **• 1 point** Soit N le nombre d'échéances minimum nécessaires pour rembourser (au moins) la moitié du nominal (soit 500 000 obligations). N vérifie :

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_N \geq 500\,000 \iff \mu_1 \left(\frac{1 - 1,055^N}{1 - 1,055} \right) \geq 500\,000$$

$$\iff \mu_1(1 - 1,055^N) \geq -27\,500 \iff N \geq \frac{\ln 1,450605}{\ln 1,055} \approx 6,95$$

soit au bout de la 7^{ième} année.

4. **• 1,5 point** Soit t le taux de rendement actuariel pour l'obligataire à l'émission : on compare à la date 0 le capital reçu et la valeur actuelle de la suite des annuités évaluées au taux t (formule (V.10))

$$198 \times 1\,000\,000 = \sum_{k=1}^{12} A_k(1+t)^{-k} = A \times \left(\frac{1 - (1+t)^{-12}}{t} \right)$$

$$\iff 198 = 23,20584624 \times \left(\frac{1 - (1+t)^{-12}}{t} \right)$$

On résout : $\frac{1 - (1+t)^{-12}}{t} \approx 8,532333$ à l'aide du solveur et on obtient : $t \approx 5,68\%$

5. **• 1,5 point** Si l'obligataire voit son obligation remboursée la 5^{ième} année, il a reçu 11 € les 4 premières années et 2011 € la 5^{ième} année. Soit x le taux cherché et on écrit à la date 0 l'égalité entre les sommes engagées et les sommes perçues (actualisées) (formule (V.10) pour UNE obligation)

$$198 = \sum_{k=1}^4 11 \times (1+x)^{-k} + 211 \times (1+x)^{-5}$$

$$198 = 11 \times \left(\frac{1 - (1+x)^{-4}}{x} \right) + 211(1+x)^{-5}. \text{ Le solveur donne : } x \approx 5,7357\%.$$

6. ● **1 point** L'emprunteur supporte des frais bancaires par obligation de $200 \times 0,01 = 2 \text{ €}$: il ne recevra de l'établissement financier qui gère son emprunt que 196 € par obligation

Le taux de revient t' pour l'emprunteur vérifie :

$$196 = 200 \times \left(\frac{0,055}{1 - 1,055^{-12}} \right) \times \left(\frac{1 - (1 + t')^{-12}}{t'} \right)$$

$$\iff 196 = 23,20584624 \times \left(\frac{1 - (1 + t')^{-12}}{t'} \right) \iff \frac{1 - (1 + t')^{-12}}{t'} \approx 8,44615$$

et $t' \approx 5,8652\%$

7. ● **1 point** Le 1^{er} janvier 2019, juste après le détachement du coupon, 5 amortissements ont eu lieu.

A cette date, la valeur actuelle d'équilibre d'une obligation, en supposant qu'elle sera remboursée la dernière année, est la valeur actualisée (au 01/01/2019, au taux $r^* = 0,04$) des 7 flux qu'elle produira (formule **(V.22)**) :

$$P = \sum_{k=1}^7 A_k (1 + r^*)^{-k} \text{ où } A_1 = \dots = A_6 = 11 \text{ € et } A_7 = 211 \text{ €}$$

$$P = 11 \times \left(\frac{1 - 1,04^{-6}}{0,04} \right) + \frac{211}{1,04^7} = 218,01 \text{ €} \text{ (La valeur de l'obligation s'accroît lorsque le taux de marché diminue)}$$