Mathématiques financières

Table des matières

Les deux premiers chapitres de ce script sont très largement inspirés du support de cours sur les mathématiques financières de MM. Jean-Marc Faillétaz et André Waser, enseignants au gymnase de Burier.
Les trois derniers chapitres sont inspirés du livre de M. André Ross, *Mathématiques appliquées à l'administration*, les éditions Le griffon d'argile.

Carmen Mermoud,
gymnase de Burier,
août 2013

1 Intérêt simple

Lorsque la durée d'un placement est courte (en général moins d'une année), on calcule un intérêt simple. Celui-ci est directement proportionnel au capital placé, à la durée du placement et au taux d'intérêt.
L'intérêt simple ne tient donc pas compte de la capitalisation des intérêts, contrairement à l'intérêt composé qu'on utilise lors de placement à plus longue échéance (plus d'une année).

On définit

C_0	capital initial ou valeur actuelle,
C_n	capital final ou valeur acquise après n périodes,
$t\%$	taux par période, exprimé en pourcent,
$i = \dfrac{t}{100}$	taux par période, exprimé en code décimal,
n	durée du placement, en nombre de périodes.

Le montant de l'intérêt simple I rapporté par le placement d'un capital C_0 durant n périodes à un taux périodique de $t\%$ est donné par

$$I = C_0 \frac{t}{100} n = C_0 \, i \, n$$

et on a la relation

$$C_n = C_0 + I = C_0 \, (1 + \frac{t}{100} n) = C_0 \, (1 + i \, n) \tag{1}$$

Sans autre précision, le taux d'intérêt est annuel. Pour le calcul de la durée de placement n, on utilise l'année commerciale qui compte 360 jours répartis en 12 mois de 30 jours.

1.1 Exercices

Exercice 1 A partir de la relation (1), calculer les valeurs de C_0, i et n.

$$\left(\text{Rép : } C_0 = \frac{C_n}{1 + i \cdot n} \;;\; i = \frac{C_n - C_0}{n \cdot C_0} = \frac{I}{n \cdot C_0} \;;\; n = \frac{C_n - C_0}{i \cdot C_0} = \frac{I}{i \cdot C_0})\right)$$

Exercice 2 Quel montant faut-il placer aujourd'hui au taux annuel simple de 3% pour obtenir un capital de 5'000 francs dans 120 jours ? (Rép : 4950.50 francs)

Exercice 3 On place 5'000 francs pendant 90 jours et l'on obtient 5'050 francs. Quel est le taux d'intérêt ? (Rép : 4%)

Exercice 4 On place 5'000 francs au taux annuel simple de 3.35% et l'on obtient 5'110 francs. Quelle est la durée du placement en jours ? (Rép : 237 jours)

Exercice 5 On place 5'000 francs au taux annuel simple de 3% pendant 45 jours. Quel est le montant des intérêts obtenus ? (Rép : 18.75 francs)

2 Intérêt composé

Lorsque la durée d'un placement est longue (en général plus d'une année), on calcule un intérêt composé. L'intérêt est calculé non seulement sur le capital initial, mais également sur les intérêts rapportés au fur et à mesure du placement.
Soit C_0 un capital initial et i le taux d'intérêt pour une période de capitalisation, c'est-à-dire la période au bout de laquelle les intérêts sont ajoutés au capital (le plus souvent une année).
Après une période de placement, les intérêts s'élèvent à $C_0\ i$. Ainsi le capital C_1 acquis après une période s'élève à

$$C_1 \;=\; C_0 + C_0\, i \;=\; C_0\,(1+i)$$

Pour la deuxième période de placement, les intérêts sont calculés sur le capital C_1. Il s'élèvent donc à $C_1\ i$. Ainsi le capital C_2 acquis après la deuxième période de placement vaut

$$C_2 \;=\; C_1 + C_1\, i \;=\; C_1\,(1+i) \;=\; C_0\,(1+i)\,(1+i) \;=\; C_0\,(1+i)^2$$

En répétant le raisonnement par itérations successives, il vient que le capital C_n accumulé après n périodes de placement vaut

$$C_n \;=\; C_0\,(1+i)^n \tag{2}$$

où C_0 est le capital initial, i le taux d'intérêt par période de capitalisation et n le nombre de période de capitalisation.

Définitions : valeur future et valeur actuelle
On appelle *valeur future* (ou valeur cumulée) d'un capital la valeur C_n (ou $C(n)$) obtenue en plaçant ce capital à un taux périodique fixe pour n périodes.
On appelle *valeur actuelle* d'une somme C_n payable dans n périodes le capital C_0 qu'il faut placer à un taux périodique fixe pendant n périodes pour accumuler la somme C_n.

Remarques
Si un capital est retiré au cours d'une période de placement, la somme finale peut être calculée de deux façons :

a) en utilisant la formule (2) des intérêts composés avec une valeur de n non entière (approche théorique des mathématiques financières),

b) en utilisant la formule (1) des intérêts simples, puisque la période de capitalisation n'est pas échue (pratique bancaire en usage).

Exemple 1
On place un capital de 25'800 francs à un taux d'intérêt annuel de 7.5%.

a) Déterminer un modèle mathématique décrivant la valeur du capital après n années.

b) Quelle est la valeur du capital après 6 ans ?

c) Quelle est la valeur acquise après 15 ans et 3 mois selon la pratique bancaire ?

Solution

a) $C_0 = 25'800$, $i = 0.075$ donc $C_n = C(n) = 25'800 \cdot 1.075^n$

b) La valeur future après 6 ans vaut $C_6 = 25'800 \cdot 1.075^6 \;=\; 39'817.18$

c) $C_{15} = 25'800 \cdot 1.075^{15} \;=\; 76'339.04$ francs
Pour les 3 mois restant, on utilise la formule des intérêts simples. Après 15 ans et 3 mois, la capital vaut donc $C_{15.25} \;=\; C_{15}\left(1 + 0.075\,\dfrac{3}{12}\right) \;=\; 76'339.04 \cdot 1.01875 \;=\; 77'770.40$ francs

Exemple 2
A quel taux faut-il placer un capital de 10'000 francs pour obtenir une somme de 16'771 francs 6 ans plus tard ?

Solution
Sans autre précision, il s'agit d'un taux i capitalisé annuellement. On veut donc que

$$10'000(1+i)^6 = 16'771 \qquad \text{d'où} \qquad 1+i = \sqrt[6]{\frac{16'771}{10'000}} = 1.09 \qquad \text{et} \qquad i = 0.09.$$

Le taux annuel doit être de 9%

Exemple 3
Un capital placé il y a 10 ans à 5.25% vaut 32'000 francs aujourd'hui. Quel était le capital initial ?

Solution
On cherche un capital initial C_0 tel que $C_0 \cdot (1+0.0525)^{10} = 32'000$ d'où

$$C_0 = \frac{32'000}{1.0525^{10}} = 19'183.55$$

Le capital initial était de 19'183.55 francs

Exemple 4
Pendant combien de temps doit-on placer un capital de 8'000 francs à un taux semestriel de 3.5% pour doubler ce capital ?

Solution
La valeur actuelle est de 8'000 francs, la valeur future est de 16'000 francs et le taux de 0.035 est semestriel. On a

$$16'000 = 8'000\,(1+0.035)^n \qquad \text{d'où} \qquad 2 = 1.035^n$$

En prenant le logarithme des deux membres de l'égalité, il vient

$$ln(1.035^n) = ln(2) \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad n\,ln(1.035) = ln(2) \qquad \text{d'où} \qquad n = \frac{ln(2)}{ln(1.035)} = 20.15...$$

Il faut donc placer le montant pendant 20.15 semestres (approche théorique mathématique), soit 20 semestres et $0.15 \cdot 180 = 27$ jours.
Selon la pratique bancaire, on doit calculer $C_{20} = 8'000 \cdot 1.035^{20} = 15'918.31$, puis déterminer le nombre de jours m tel que $15'918.31 \left(1 + m \cdot \frac{0.035}{180}\right) = 16'000$.
On trouve $m = \left(\frac{16'000}{15'918.31} - 1\right) \cdot \frac{180}{0.035} = 26.39$, c'est-à-dire aussi 27 jours.

2.1 Taux nominal, taux périodique, taux réel

Dans les exemples présentés jusqu'ici, on donnait toujours le taux capitalisé annuellement. En pratique, les institutions financières affichent parfois un taux annuel qui est capitalisé plusieurs fois dans l'année. On parle alors de taux nominal.

Exemple 5
Vous voulez placer un montant de 2'000 francs et vous avez consulté trois banques. La première banque B_1 offre un taux annuel de 9%, capitalisé annuellement. La seconde banque B_2 offre un taux nominal de 9% capitalisé trimestriellement, c'est-à-dire que l'intérêt est capitalisé quatre fois par année au taux de $\frac{9\%}{4} = 2.25\%$. La troisième banque B_3 offre un taux nominal de 9%,

capitalisé mensuellement, c'est-à-dire que l'intérêt est capitalisé douze fois par année au taux de $\frac{9\%}{12} = 0.75\%$. Quelle institution offre les meilleures conditions ?
Pour la banque B_1, il y a une période de capitalisation à un taux de 9%, ce qui donne $C(1) = 2'000\ 1.09^1 = 2'180$ francs, soit un intérêt de 180 francs.
Pour la banque B_2, il y a quatre périodes de capitalisation à un taux de 2.25%, ce qui donne $C(1) = 2'000\ 1.0225^4 = 2'186.17$ francs, soit un intérêt de 186.17 francs.
Pour la banque B_3, il y a douze périodes de capitalisation à un taux de 0.75%, ce qui donne $C(1) = 2'000\ 1.0075^{12} = 2'187.61$ francs, soit un intérêt de 187.61 francs.
Ainsi la banque B_3 offre les meilleures conditions.

Définitions : Taux nominal, taux périodique, taux réel et taux équivalents
On appelle *taux nominal* que l'on note $(j; m)$ un taux annuel j qui est composé m fois par année au taux périodique $i = j/m$.
On appelle *taux périodique* le taux i qui s'applique à chaque période de capitalisation.
On appelle *taux réel* ou *taux effectif* le taux r réellement payé annuellement. On l'obtient en ramenant le taux périodique à un taux annuel.
Deux taux sont *équivalents* s'ils correspondent au même taux réel.
Attention : lorsqu'on parle d'un taux j capitalisé semestriellement (par exemple), il s'agit toujours d'un taux nominal $(j; 2)$, qui est équivalent à un taux semestriel $i = j/2$.

Ainsi, dans l'exemple précédent, la banque B_1 propose un taux périodique annuel de 9% qui est le taux réel. La banque B_2 propose un taux nominal de $(9\%, 4)$. Le taux trimestriel est de $9\%/4 = 2.25\%$ et le taux réel r est tel que $1 + r = 1.0225^4 = 1.0931$, c'est-à-dire un taux annuel r égal à 9.31%. La banque B_3 propose un taux nominal de $(9\%, 12)$. Le taux semestriel est de $9\%/12 = 0.75\%$ et le taux réel $r = 1.0075^{12} - 1 = 9.38\%$ est le taux annuel équivalent.

2.2 Exercices

Exercice 6 A partir de la relation (2), calculer les valeurs de C_0, i et n.

$$\left(\text{Rép : } C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}\ ;\ i = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} - 1\ ;\ n = \frac{\log(C_n) - \log(C_0)}{\log(1+i)}\right)$$

Exercice 7 On place un capital de 10'000 francs à un taux annuel de 5.25%. Quelle somme aura-t-on accumulé (selon la pratique bancaire) après 5 ans ? 10 ans ? 6 mois ? 11 ans et 8 mois ?
(Rép : 12'915.48 francs, 16'680.96 francs, 10'262.50 francs, 18'171.20 francs)

Exercice 8 Un de vos ancêtres a placé une somme à la banque en l'an 810. Comme un intérêt bancaire de 2% a été capitalisé annuellement jusqu'à aujourd'hui, vous allez recevoir en 2010 une somme de 209'028'794 francs. Quel était le placement de votre ancêtre ? (Rép : 1 centime)

Exercice 9 On place un capital de 100'000 francs à un taux de 12%. Quelle somme aura-t-on selon la pratique bancaire après 6 ans et 3 mois si la capitalisation est annuelle ? semestrielle ? trimestrielle ? (Rép : 203'303.74 francs, 207'256.24 francs, 209'377.79 francs)

Exercice 10 A quel taux nominal capitalisé semestriellement a-t-on placé un capital de 100'000 francs si l'on obtient un capital de 166'817.25 francs après 8 ans ? (Rép : (6.5% , 2))

Exercice 11 Combien de temps faut-il placer un capital initial de 12'000 francs à un taux nominal de 8% capitalisé semestriellement pour obtenir 527'272.09 francs selon la pratique bancaire ?
(Rép : 48 ans, 2 mois et 20 jours)

Exercice 12 Un capital C_0 est placé à 6% l'an. Après combien d'années entières a-t-il triplé ? a-t-il été multiplié par dix ? Montrer que le temps nécessaire pour centupler le capital est le double du temps nécessaire à le décupler. (Rép : 19 ans , 40 ans)

Exercice 13 Quel est le taux d'intérêt annuel d'un capital qui double en dix ans si la capitalisation est annuelle ? Et si la capitalisation est semestrielle ? (Rép : 7.18%, 7.05%)

3 Annuités

Dans les sections précédentes, nous avons analysé la croissance d'un capital placé en un seul versement pour une durée donnée. Dans la pratique, on constitue plutôt un capital par des versements périodiques qu'on appelle *annuités*. A l'origine, le terme annuités désignait des versements annuels. C'est devenu un terme générique qui désigne tout paiement périodique. On distingue toutefois les versements mensuels qu'on appelle *mensualités*.

Définition : annuités, annuités de début de période, annuités de fin de période
On appelle *annuités* les versements égaux que l'on fait à intervalle régulier pour constituer un capital ou rembourser un emprunt. Les versements permettant de constituer un capital sont appelés *annuités de début de période*, ceux permettant de rembourser un emprunt *annuités de fin de période*.

Exemple 6
Vous décidez de constituer un capital en faisant 4 versement semestriels de 500 francs à un taux nominal de 6% capitalisé semestriellement. En complétant le tableau suivant, déterminer l'évolution du capital en tenant compte des versements effectués et de l'intérêt reçu.

On remarque que dans ce cas, la capitalisation coïncide avec les versements. La période est de ____________________ pour les versements et pour la capitalisation.

Taux nominal (________%, ________) Taux périodique $i =$ ________

Montant des annuités $A =$ ________ Nombre de périodes $n =$ ________

Période	Valeur accumulée (début de période)	Versement (annuité)	Capital total (début de période)	Intérêt pour la période	Valeur accumulée (fin de période)
1					
2					
3					
4					

On constate que les calculs seraient fastidieux si on effectuait un grand nombre de versements. Pour être plus performant dans les calculs, il faut voir le procédé de capitalisation sous un autre angle, en considérant chaque versement comme un capital distinct.
Le premier versement de 500 francs est placé durant 4 périodes à un taux périodique de 3%. Sa valeur à échéance est donc de $500 \cdot 1.03^4$ francs.
Le second versement de 500 francs est placé durant 3 périodes au même taux périodique de 3%. Sa valeur à échéance est de $500 \cdot 1.03^3$ francs.
De même, le troisième versement de 500 francs est placé durant 2 périodes au même taux. Sa valeur à échéance est de $500 \cdot 1.03^2$ francs.
Le dernier versement de 500 francs est placé durant 1 période. Sa valeur à échéance est de $500 \cdot 1.03$ francs.
Le capital accumulé est égal à la somme des valeurs à échéance, soit

$$500 \cdot 1.03 + 500 \cdot 1.03^2 + 500 \cdot 1.03^3 + 500 \cdot 1.03^4 = 2154.56 \text{ francs.}$$

La somme à effectuer ci-dessus est une somme de termes qui forment ce qu'on appelle une *progression géométrique*. Nous allons voir qu'il existe une formule directe pour calculer la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

3.1 Progression géométrique

Une *progression géométrique* est une suite ordonnée de nombres telle que chaque nombre de la suite, à l'exception du premier, satisfait à la règle de récurrence

$$a_n = a_{n-1} \cdot r$$

où a_n est le terme de rang n, a_{n-1} est le terme de rang $n-1$ et r est un nombre réel constant appelé *raison*.
La progression est croissante lorsque $r > 1$, décroissante lorsque $0 < r < 1$ et alternée si $r < 0$.

Exemple 7
Parmi les suites de nombres

a) $\{4 \,;\, 12 \,;\, 36 \,;\, 108 \,;\, 324 \,;\, \cdots\}$

b) $\left\{1 \,;\, \frac{1}{2} \,;\, \frac{1}{4} \,;\, \frac{1}{8} \,;\, \cdots\right\}$

c) $\left\{2 \,;\, -\frac{2}{3} \,;\, \frac{2}{9} \,;\, -\frac{2}{27} \,;\, \frac{2}{81} \,;\, \cdots\right\}$

d) $\{1 \,;\, 2 \,;\, 3 \,;\, 4 \,;\, 5 \,;\, \cdots\}$

e) $\{15 \,;\, 20 \,;\, 25 \,;\, 30 \,;\, 35 \,;\, 40 \,;\, 45\}$

f) $\{1^2 \,;\, 2^2 \,;\, 3^2 \,;\, 4^2 \cdots\}$

g) $\left\{1 \,;\, \frac{1}{2} \,;\, \frac{1}{3} \,;\, \frac{1}{4} \,;\, \cdots \,;\, \frac{1}{n}\right\}$

les suites ______________________ sont des progressions géométriques et les suites ______________________ sont des progressions *arithmétiques* (le terme suivant est obtenu du précédant par l'addition de la raison r).

On montre facilement par récurrence (cf exercice 15) que le terme général a_n d'une progression géométrique de raison r et de premier terme a_1 est donnée par

$$a_n = a_1\, r^{n-1} \tag{3}$$

La somme des n premiers termes d'une progression géométrique est donnée par

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r} \tag{4}$$

On démontre ce résultat dans l'exercice 16.

3.2 Capitalisation par annuités de début de période

Puisque nous allons parler de placements et de remboursements, nous distinguerons la valeur actuelle VA et la valeur cumulée VC d'une suite d'annuités. Par ailleurs, les indices d et f seront utilisés pour indiquer s'il s'agit d'annuités de début de période ou d'annuités de fin de période. Nous noterons donc

VA_d	la valeur actuelle d'annuités de début de période
VC_d	la valeur cumulée à l'échéance d'annuités de début de période
VA_f	la valeur actuelle d'une suite d'annuités de fin de période
VC_f	la valeur cumulée à l'échéance d'annuités de fin de période

Relevons ici que la valeur cumulée est aussi appelée *valeur définitive* ou *valeur future*, selon les auteurs.

Comme le montre le schéma ci-dessous, la valeur cumulée de n annuités de début de période placées à un taux périodique i est égal à la somme des n premiers termes d'une progression géométrique.

Périodes

• 1 • 2 • 3 • ⋯ • n-2 • n-1 • n •

Annuités		
1	A	$A(1+i)^n$
2	A	$A(1+i)^{n-1}$
3	A	$A(1+i)^{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	A	$A(1+i)^2$
n	A	$A(1+i)^1$
	Valeur cumulée VC_d :	$\sum_{k=1}^{n} A(1+i)^k$

On a $\quad VC_d = A(1+i) + A(1+i)^2 + A(1+i)^3 + \cdots + A(1+i)^n$.
C'est la somme S_n des n premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme $a_1 = A(1+i)$ et la raison $r = 1+i$. Ainsi, en appliquant la formule $S_n = \dfrac{a_1\,(1-r^n)}{1-r}$, la valeur cumulée de n annuités de début de période placées à un taux périodique i vaut

$$VC_d = \frac{A(1+i)\,[(1+i)^n - 1]}{i} \tag{5}$$

La valeur actuelle VA_d d'une suite de versements de début de période est le montant qu'il faudrait placer au début de la première période au même taux i pour obtenir la valeur cumulée VC_d après n périodes. On a donc, par définition

$$VC_d = VA_d(1+i)^n \tag{6}$$

Exemple 8
Vous désirez constituer un capital en déposant 50 francs par mois à un taux mensuel de 0.6%. Quel est le capital accumulé dans cinq ans ? dans dix ans ? dans quinze ans ?

Solution
On cherche la valeur accumulée par une suite de versements $A = 50$ francs placés à un taux périodique $i = 0.006$ pour $n = 12 \cdot 5 = 60$ périodes (pour 5 ans). En substituant ces valeurs dans la formule (5), la valeur cumulée s'élève à

$$VC_d = \frac{50(1+0.006)\left[(1+0.006)^{60} - 1\right]}{0.006} = 3'619.83 \text{ francs.}$$

Pour dix ans, $n = 12 \cdot 10 = 120$ et la valeur cumulée est égale à

$$VC_d = \frac{50 \cdot 1.006\left[1.006^{120} - 1\right]}{0.006} = 8'802.65 \text{ francs.}$$

Pour quinze ans, $n = 12 \cdot 15 = 180$ et la valeur cumulée est égale à

$$VC_d = \frac{50 \cdot 1.006\left[1.006^{180} - 1\right]}{0.006} = 16'223.36 \text{ francs.}$$

Exemple 9
Quel montant trimestriel faut-il placer à un taux de trimestriel de 2% pour constituer un capital de 15'000 francs en 10 ans ? Quel est le gain en intérêts ? Quelle est la valeur actuelle de ces annuités ?

Solution
On cherche le montant de l'annuité A sachant que la valeur cumulée $VC_d = 15'000$ francs, le taux périodique $i = 0.02$ et le nombre de périodes $n = 4 \cdot 10 = 40$. En substituant ces valeurs dans la formule (5), on a

$$15'000 = \frac{A(1+0.02)\left[(1+0.02)^{40}-1\right]}{0.02}$$

et en isolant A, il vient

$$A = \frac{15'000 \cdot 0.02}{1.02\left[1.02^{40}-1\right]} = 243.47 \text{ francs.}$$

On trouve le gain en intérêt en soustrayant le montant total placé avec les versements de la valeur cumulée. Le montant placé est de $A \cdot n = 243.47 \cdot 40 = 9'738.80$ francs.
Le gain en intérêt est donc de 15'000 - 9'738.80 = 5'261.20 francs.

La valeur actuelle VA_d de ces annuités est le montant qu'il faudrait placer au même taux trimestriel de 2% pendant la même durée de 40 trimestres pour obtenir un capital de 15'000. Ainsi,

$$15'000 = VA_d \, 1.02^{40} \quad \text{d'où} \quad VA_d = \frac{15'000}{1.02^{40}} = 6'793.36 \text{ francs.}$$

Il faudrait donc placer 6'793.36 francs aux mêmes conditions de taux pour obtenir un capital de 15'000 francs 10 ans plus tard.

3.3 Remboursement par annuités de fin de période

Les annuités de fin de période servent à calculer les versements à effectuer pour rembourser un emprunt, car le versement se fait à la fin de chaque période. Par exemple, si on désire rembourser un emprunt par des versements mensuels, le premier versement est effectué un mois après avoir contracté l'emprunt.

Exemple 10
Vous effectuez un emprunt de 2'000 francs pour trois ans et le taux d'intérêt nominal est de 10% capitalisé semestriellement. Pour la banque, ce prêt constitue un placement qui doit rapporter des intérêts selon le taux en vigueur. La valeur actuelle de l'emprunt $VA_f = 2'000$ francs. La valeur cumulée de ce montant dans trois ans, soit six semestres, sera $VC_f = 2'000(1.05)^6 = 2'680.19$ francs. C'est le montant que vous devriez payer si vous remboursiez votre dette en un seul versement dans trois ans. Les intérêts seraient alors de 2'680.19 - 2'000 = 680.19 francs.
Cependant, vous pouvez aussi choisir de rembourser votre dette par annuités réparties sur les trois ans de votre emprunt. Ainsi, votre dette diminue au fur et à mesure de vos versements et vous payez moins d'intérêts.
De son côté, la banque ne perd rien si elle réinvestit dans d'autres affaires et au même taux l'argent que vous lui remboursez.
Si vous décidez de rembourser votre dette en six annuités semestrielles, comment déterminer le montant de ces annuités ?

Dans une annuité de fin de période, il y a une période capitalisation de moins que dans celle de début de période, comme l'illustre la figure suivante.

Périodes

	• 1	• 2	• 3	• $\cdots$	• n-2	• n-1	• n •	
Annuités 1		A	....	....	....	....	....	$A(1+i)^{n-1}$
2			A	....	....	....	....	$A(1+i)^{n-2}$
3				A	....	....	....	$A(1+i)^{n-3}$
$\vdots$				$\vdots$				$\vdots$
$n-1$							A	$A(1+i)$
n								A
					Valeur cumulée VC_f :			$\sum_{k=1}^{n} A(1+i)^{k-1}$

On a donc la progression géométrique $VC_f = A + A(1+i) + A(1+i)^2 + \cdots + A(1+i)^{n-1}$. C'est la somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme $a_1 = A$ et la raison $r = 1+i$. Ainsi, en appliquant la formule $S_n = \dfrac{a_1\,(1-r^n)}{1-r}$, la valeur cumulée de n annuités de fin de période placées à un taux périodique i vaut

$$VC_f = \frac{A\,[(1+i)^n - 1]}{i} \tag{7}$$

Dans l'exemple précédent, le taux semestriel $i = 0.05$, le nombre de semestres $n = 6$, et la valeur cumulée $VC_f = 2'680.19$. Ainsi, le montant A des annuités sera défini de sorte que

$$VC_f = 2'680.19 = \frac{A\left[(1.05)^6 - 1\right]}{0.05}$$

et en isolant A, il vient

$$A = \frac{2'680.19 \cdot 0.05}{(1.05)^6 - 1} = 394.03$$

Le remboursement de l'emprunt de 2'000 francs pourra se faire en six annuités semestrielles de 394.03 francs. Dans ce cas, le montant total des versements sera de $6 \cdot 394.03 = 2'364.18$ francs et les intérêts s'élèveront à 2'364.18 - 2'000 = 364.18 francs.

Les annuités de fin de période servent d'une part à couvrir les intérêts de la dette et d'autre part à l'amortir. Les intérêts étant proportionnels à la dette, la part consacrée à l'amortissement augmente à mesure que la dette diminue.

Exemple 11
Une personne emprunte 10’000.- francs au taux de 4% et s’engage à rembourser sa dette par annuité sur 5 ans. Calculer le montant de l’annuité et compléter le tableau suivant.

Année	Valeur de la dette (début d’année)	Intérêt annuel de la dette	Annuité	Amortissement	Solde de la dette (fin de l’année)
1	10’000.-	400.-			
2	8’153.75				
3					
4					
5					0.-

Exemple 12
Quel est le montant des versements mensuels qu’il faut effectuer pour rembourser un emprunt de 6’000 francs en cinq ans, sachant que l’intérêt est de 9% capitalisé mensuellement ? Quel est le coût en intérêts ?

Solution
La valeur actuelle de l’emprunt $VA_f = 6'000$ francs, la période est le mois, le taux périodique $i = \dfrac{9\%}{12} = 0.75\%$ et le nombre de périodes en cinq ans est $n = 5 \cdot 12 = 60$. La valeur cumulée de l’emprunt dans cinq ans est $VC_f = 5'000(1.0075)^{60} = 9'394.09$ francs. Ainsi, on doit avoir

$$VC_f = 9'394.09 = \frac{A\left[1.0075^{60} - 1\right]}{0.0075}$$

et en isolant A, il vient

$$A = \frac{9'394.09 \cdot 0.0075}{1.0075^{60} - 1} = 124.55 \text{ francs.}$$

Le paiement total s’élèvera à $124.55 \cdot 60 = 7'473$ francs.
Le coût en intérêts sera de 7’473 - 6000 = 1’473 francs.

Remarques

a) Dans la pratique, le montant d’une annuité de début de période se calcule en général à partir de la valeur future VC_d correspondant au capital que l’investisseur souhaite accumuler.

b) Le montant d’une annuité de fin de période se calcule à partir de la valeur actuelle VA_f qui correspond au montant emprunté. On calcule VC_f avec la formule $VC_f = VA_f(1+i)^n$, puis le montant de l’annuité avec la formule (7)

$$VC_f = \frac{A\left[(1+i)^n - 1\right]}{i}$$

c) Que l’on ait affaire à des annuités de début ou de fin de période, la relation entre la valeur cumulée et la valeur actuelle a toujours la forme $VC = VA(1+i)^n$.

Exemple 13
Vous empruntez 100'000.- au taux annuel de 5% et vous devez rembourser cette dette en 10 annuités. Après avoir versé 6 annuités, vous oubliez de régler la 7ème annuité. De quel montant les 3 dernières annuités devront-elles être majorées afin de rembourser la dette dans le délai initialement prévu ?

Solution
La valeur actuelle de l'emprunt $VA_f = 100'000$ francs, la période est annuel, le taux périodique $i = 5\%$ et le nombre de périodes est $n = 10$. La valeur cumulée de l'emprunt dans dix ans est $VC_f = 100'000 \cdot 1.05^{10} = 162'889.46$ francs. Ainsi, on doit avoir

$$VC_f = 100'000 \cdot 1.05^{10} = \frac{A\left(1.05^{10}-1\right)}{0.05} \qquad \text{d'où} \qquad A = \frac{162'889.46 \cdot 0.05}{1.05^{10}-1} = 12'950.46 \text{ francs.}$$

Pour calculer le montant des annuités suite à l'omission du versement de la 7ème annuités, il faut calculer la valeur de la dette à la fin de cette 7ème période. On peut procéder de deux façons :

1ère méthode :
Après 7 périodes, la valeur initiale empruntée a produit des intérêts et vaut

$$100'000(1.05)^7 = 140'710.04 \text{ francs.}$$

Dans le même temps, on a versé 6 annuités qui ont permis de cumuler à la fin de la 6ème période la somme de

$$\frac{12'950.46\left(1.05^6-1\right)}{0.05} = 88'087.88 \text{ francs.}$$

Cette somme rapporte des intérêts au cours de la 7ème période et vaut à la fin de cette 7ème période

$$\frac{12'950.46\left(1.05^6-1\right)}{0.05} \cdot 1.05 = 92'492.28 \text{ francs.}$$

N.B. On peut aussi calculer la valeur cumulée à la fin de la 7ème période et lui soustraire la 7ème annuité qui n'a pas été versée :

$$\frac{12'950.46\left(1.05^7-1\right)}{0.05} - 12'950.46 = 92'492.28 \text{ francs.}$$

Ainsi la valeur de la dette à la fin de la période 7 vaut 140'710.04 - 92'492.28 = 48'217.76 francs.

2ème méthode :
A la fin de la 6ème période, il reste à verser 4 annuités de 12'950.46 francs chacune qui permettent de cumuler

$$\frac{12'950.46\left(1.05^4-1\right)}{0.05} = 55'818.09; \text{francs}$$

à la fin des 10 périodes. Cette somme correspond à une valeur de dette en fin de période 7 de

$$\frac{55'818.09}{1.05^3} = 48'217.76; \text{francs.}$$

Cette dette de 48'217.76 francs à la fin de la 7ème période, correspondant à une valeur cumulée de $55'818.09$ francs à la fin de la 10ème période, doit désormais être remboursée en 3 annuités A'. On pose donc

$$55'818.09 = \frac{A'\left(1.05^3-1\right)}{0.05} \qquad \text{d'où} \qquad A' = \frac{55'818.09 \cdot 0.05}{1.05^3-1} = 17'706.98 \text{ francs.}$$

Ainsi la majoration de l'annuité est de $A' - A = 17'706.98 - 12'950.46 = 4'755.52$ francs.

3.4 Exercices

Exercice 14 Trouver les six premiers termes des progressions géométriques suivantes :
a) $a_1 = 8$ et $r = 1/2$ b) $a_1 = 1$ et $r = 2$ c) $a_1 = 37$ et $r = -1/3$

Exercice 15 Montrer par récurrence que le n-ième terme a_n d'une progression géométrique s'exprime en fonction du premier terme a_1 et de la raison r comme $a_n = a_1\, r^{n-1}$

Exercice 16 Montrer que la somme des n premiers termes d'une progression géométrique dont le premier terme est a_1 et la raison r est donnée par $S_n = \dfrac{a_1\,(1-r^n)}{1-r}$

Exercice 17 Calculer la somme des huit premiers termes de la progression géométrique définie par $a_1 = 8$ et $r = 1/2$ (Réponse : $\dfrac{255}{16}$)

Exercice 18 Calculer la somme des six premiers termes de la progression géométrique définie par $a_1 = 42$ et $a_2 = 14$ (Réponse : $\dfrac{5'096}{81}$)

Exercice 19 Calculer la somme des douze premiers termes de la progression géométrique

$$\left\{1; 1.07; 1.07^2; 1.07^3; \dots\right\}$$

(Réponse : $17,88\dots$)

Exercice 20 En prenant les points milieux des côtés d'un carré d'un mètre de côté comme sommets, on construit un deuxième carré inscrit dans le premier. En prenant les points milieux de ce deuxième carré comme sommets, on trace un troisième carré inscrit dans le deuxième, et ainsi de suite.

a) Faire un schéma avec les trois premiers carrés ainsi construits.

b) Quel est la longueur du côté du septième carré et quelle est son aire ?

c) En poursuivant le processus indéfiniment, quelle est la somme des aires de tous les carrés ainsi construits ?

(Réponse : b) côté de $\dfrac{1}{8}\,m$, aire de $\dfrac{1}{64}\,m^2$ c) $2\ m^2$)

Exercice 21 Trouver la valeur future et la valeur actuelle d'un placement constitué de huit versements annuels de 1'500 francs chacun, sachant que le taux d'intérêt est de 8% capitalisé annuellement. Expliquer ce que représentent la valeur future et la valeur actuelle, comparativement au montant total placé par versements. (Rép : $VC_d = 17'231.34$ francs et $VA_d = 9'309.56$ francs)

Exercice 22 Quelle est la valeur du capital constitué par des versements mensuels de 100 francs pendant quinze ans à un taux de 7.5% capitalisé mensuellement ? Quel est le gain en intérêts ? (Rép : $VC_d = 33'318.17$ francs, gain de $15'318.17$ francs)

Exercice 23 Quels versements trimestriels devrez-vous effectuer pour constituer un capital de 10'000 francs en dix ans, le taux étant de 8% capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ? (Rép : $A = 162.31$ francs, gain de $3'507.60$ francs)

Exercice 24 Vous devez préparer le contrat de deux clients empruntant chacun 2'000 francs. L'un désire rembourser en deux ans et l'autre en quatre ans. Le taux pour les prêts personnels est de 12% capitalisé mensuellement. Quels sont les versements mensuels que chacun doit effectuer et quel est le coût en intérêts de ces prêts ? (Rép : en deux ans $A = 94.15$ francs, coût de 259.60 francs, en quatre ans $A = 52.67$ francs, coût de 528.16 francs)

Exercice 25 Vous versez 100 francs par mois pour rembourser une dette. Le taux est de 14.4% capitalisé mensuellement. Déterminer la valeur actuelle de la dette s'il vous reste quatre ans pour la rembourser. (Rép : $VA_f = 3'632.72$ francs)

Exercice 26 Vous achetez une automobile de 13'500 francs en versant 3'500 francs comptant. Vous empruntez le reste à 12% capitalisé mensuellement, que vous devez rembourser en cinq ans. Quels sont les versements mensuels et le coût de cet emprunt ?

(Rép : $A = 222.44$ francs, coût de $3'346.40$ francs.)

Exercice 27 Vous remboursez actuellement un emprunt par des versements mensuels de 80 francs. Il vous reste dix ans pour rembourser le tout et vous désirez augmenter le montant des annuités afin de vous acquitter de la dette en cinq ans. Quels seront les nouveaux versements sachant que le taux est de 12% capitalisé mensuellement ?

(Rép : $VA_f = 5'576.04.44$ francs, $A = 124.04$ francs)

Exercice 28 Vous placez 30 francs par semaine à un taux de 7.8% capitalisé annuellement. Dans combien de temps aurez-vous accumulé le montant de 10'000 francs ?

(Rép : 272 semaines, soit 5 ans et 12 semaines)

Exercice 29 Vous avez emprunté 50'000.- au taux de 5% que vous devez remboursez en 15 ans. A la fin de la 10ème année, vous convertissez votre emprunt au taux de 4%. L'annuité est alors recalculée. Calculer l'économie annuelle des 5 dernières années.

(Rép : $A_1 = 4'817.10$ et $A_2 = 4'684.71$. Économie annuelle = 132.39 francs)

Exercice 30 Vous avez effectué 10 versements annuels de 2'000.- francs, le premier il y a 17 ans ; le taux a été de 4% les 6 premières années et de 5% par la suite. De quelle somme disposerez-vous dans une année ? (Rép : $38'149.53$ francs)

Exercice 31 M. Dupont décide de se constituer un 3ème pilier en versant 15 annuités de 1'000.- francs au taux de 5%. Il effectue son premier versement le 31 décembre 2000. Pour des raisons financières, M. Dupont est dans l'incapacité de verser les 6ème et 7ème annuités.
De quelle somme disposera-t-il une année après son dernier versement, sachant que le taux a augmenté de 1% le 1er janvier 2011. (Rép : $20'314.41$ francs)

Exercice 32 M. Durand emprunte 40'000.- francs aujourd'hui au taux de 6.5%. Son contrat prévoit qu'il remboursera sa dette par annuité fixe en 13 ans, mais en effectuant le 1er versement dans 3 ans seulement.

a) Déterminer le solde de la dette au début de la 12ème année, comptée à partir d'aujourd'hui.

b) Déterminer le montant du 7ème amortissement.

c) Déterminer la valeur de l'intérêt de la dette lors du versement de la 10ème annuité

(Rép : a) $10'742.55$ francs b) $4'306.64$ francs c) 698.27 francs)

4 Annuités générales

Dans les exemples présentés jusqu'ici le nombre de versements annuels coïncidait avec le nombre de capitalisations annuelles. Dans la pratique, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple, vous pouvez rembourser un prêt par des versement mensuels alors que la capitalisation se fait semestriellement. Cependant, une fois que vous avez effectué un versement, vous ne souhaitez plus payer des intérêts sur le montant versé. Pour traiter ce genre de situation, il faut calculer le taux i applicable à la période de versement et équivalent au taux de capitalisation affiché. On peut ensuite résoudre le problème comme dans la section précédente.

4.1 Calcul du taux périodique

Par définition, deux taux sont équivalents s'ils donnent le même rendement sur une même période. En pratique, on utilise une base annuelle pour calculer l'équivalence.

Exemple 14
On affiche un taux nominal de 9% capitalisé semestriellement. Trouver le taux périodique équivalent pour des versements mensuels.

Solution
Il y a annuellement deux capitalisations au taux de $\frac{0.09}{2} = 0.045$ et douze versements. On cherche le taux périodique i tel que

$$(1+i)^{12} = 1.045^2$$

En extrayant la racine douzième, il vient $1+i = 1.045^{2/12}$ c'est-à-dire $1+i = 1.045^{1/6}$
ce qui donne $i = 1.045^{1/6} - 1 = 0.007363$.
Le taux mensuel équivalent est donc $i = 0.74\%$

Notons que dans les exercices, les taux exprimés en pourcent seront toujours arrondis à deux décimales, même si dans la pratique les sommes en jeu justifient parfois une plus grande précision.

Exemple 15
Une personne dépose 1'000 francs par trimestre à un taux nominal de 12% capitalisé mensuellement. Elle vous demande de calculer le capital accumulé dans cinq ans ainsi que le gain en intérêts.

Solution
On doit calculer la valeur future d'un placement, soit la valeur cumulée d'annuités de début de période VC_d. Il y a annuellement quatre versements et douze capitalisations au taux de $\frac{0.12}{12} = 0.01$. On cherche un taux trimestriel tel que

$$(1+i)^4 = 1.01^{12}$$

ce qui donne $i = 1.01^3 - 1 = 0.03031$, soit un taux trimestriel de $i = 3.03\%$.
En cinq ans, il y a $n = 4 \cdot 5 = 20$ trimestres. Ainsi

$$VC_d = \frac{1'000 \cdot 1.0303\,(1.0303^{20} - 1)}{0.0303} = 27'769.18 \text{ francs.}$$

Puisqu'il y a vingt versements de 1'000 francs, le montant placé est de 20'000 francs et le gain en intérêts vaut 27'769.18 - 20'000 = 7'769.18 francs.

Exemple 16
Une personne rembourse un emprunt par des versements mensuels de 120 francs. Le taux nominal de 9% est capitalisé trimestriellement et il reste encore deux ans pour clore cet emprunt. Calculer la valeur future et la valeur actuelle de l'emprunt, ainsi que le coût en intérêt jusqu'à échéance.

Solution
Il y a annuellement douze versements et quatre capitalisations au taux de $\dfrac{0.09}{4} = 0.0225$. On cherche un taux trimestriel tel que

$$(1+i)^{12} = 1.0225^4$$

ce qui donne $i = 1.0225^{1/3} - 1 = 0.07444\ldots$, soit un taux mensuel de $i = 0.74\%$. En deux ans, il y a $n = 2 \cdot 12 = 24$ mois. Ainsi, la valeur future vaut

$$VC_f = \frac{120 \cdot (1.0074^{24} - 1)}{0.0074} = 3138.92 \text{ francs.}$$

La relation entre valeur cumulée et valeur actuelle est donnée par

$$3138.92 = VA_f \cdot 1.0074^{24}$$

d'où le montant de la valeur actuelle $VA_f = \dfrac{3138.92}{1.0074^{24}} = 2629.97$ francs.

Notons que $VA_f = 2629.97$ francs correspond au montant qu'il faudrait verser aujourd'hui pour rembourser la dette en un seul versement. Puisqu'il y a 24 versements de 120 francs, le coût en intérêts vaut $24 \cdot 120 - 2629.97 = 250.13$ francs.

4.2 Exercices

Exercice 33 On affiche un taux nominal de 6% capitalisé mensuellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements mensuels. (Rép : 0.5%)

Exercice 34 On affiche un taux nominal de 9% capitalisé semestriellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements bimensuels. (Rép : 0.3675%)

Exercice 35 On affiche un taux nominal de 9% capitalisé mensuellement. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels. (Rép : 2.267%)

Exercice 36 On affiche un taux nominal de 9% capitalisé six fois par années. Calculer le taux périodique équivalent pour des versements trimestriels. (Rép : 2.258%)

Exercice 37 Vous empruntez 6'000 francs au taux de 12% capitalisé trimestriellement. Quelles sont les mensualités à verser pour s'acquitter de cette dette en trois ans ? Quel sera le coût en intérêts ? (Rép : $A = 198.95$ francs, coût de 1'162.20 francs.)

Exercice 38 Quelle est la valeur cumulée et la valeur actuelle d'une suite de remboursement de 75 francs par mois au taux nominal de 9% capitalisé semestriellement, sachant que la durée du contrat est de trois ans ? (Rép : $VC_f = 3'078.78$ francs, $VA_f = 2'364.19$ francs.)

Exercice 39 Vous placez 100 francs par mois à un taux de 7.5% capitalisé trimestriellement pour constituer un capital pour votre retraite dans 25 ans. Quel sera alors le montant accumulé ? Quel sera le gain en intérêts ? (Rép : $VC_d = 87'611.10$ francs, gains de 57'611.10 francs.)

Exercice 40 Vous effectuez un emprunt de 40'000 francs pour vingt ans afin d'acheter une nouvelle machine pour votre usine. Le taux est de 9% capitalisé trimestriellement.

a) Quelles seront les mensualités ?
b) Quelle sera la valeur actuelle après un an ?
c) Quel aura alors été le montant de l'amortissement ?
d) Lors du renouvellement de votre emprunt après un an, le taux est de 15%. Quels seront les versements mensuels que vous devrez effectuer au cours de la deuxième année ?

Rép : a) $A = 358.16$ francs b) 39'244.36 francs (il restera 228 versements à effectuer)

c) 755.64 francs d) $A = 516.10$

Exercice 41 Quel capital peut-on constituer en dix ans en effectuant des versements mensuels de 200 francs à un taux de 9% capitalisé trimestriellement ? Quel est le gain en intérêts ?
(Rép : $VC_d = 38'843.18$ francs, gains de 14'843.18 francs.)

Exercice 42 Votre entreprise rembourse actuellement un emprunt en versant 3'500 francs tous les deux mois. On vous demande d'établir le montant qu'il faudrait verser pour liquider cette dette. Le taux d'intérêt est de 13% capitalisé trimestriellement et il reste vingt-deux versements à effectuer. (Rép : $VA_f = 60'809.43$ francs)

Exercice 43 A l'achat de votre maison vous prenez une hypothèque de 50'000 francs à un taux de 9% capitalisé semestriellement.

a) Votre hypothèque étant de vingt ans, calculer les mensualités à verser ?

b) Quel est le montant de l'amortissement après un an et quel sera le montant versé en intérêts durant cette année ?

c) Si le taux demeure constant, quel est le montant total que vous verserez pour rembourser cette hypothèque ?

d) Si le taux grimpe à 16% après la première année, quels seront les versements que vous devrez effectuer au cours de la deuxième année ?

e) Quel sera le montant de l'amortissement durant la deuxième année et quel sera le montant versé en intérêts durant cette deuxième année ?

f) Si le taux demeure à 16% durant les dix-neuf dernières années, quel sera le montant total que vous aurez versé pour vous acquitter de votre hypothèque ?

Rép : a) $A = 444.59$ francs b) amortissement de 955.36 francs, intérêts de 4'379.72 francs

c) 106'701.60 francs d) $A = 669.09$

e) amortissement de 462.66 francs, intérêts de 7'566.42 francs f) 157'887.60 francs

Exercice 44 Vous désirez accumuler 20'000 francs pour acheter un piano. Pour ce faire, vous placez 150 francs par mois au taux mensuel de 1%. Combien de versements seront nécessaires pour atteindre votre objectif ? (Rép : 85 versements)

Exercice 45 Un fumeur décide d'arrêter de fumer et de placer l'argent économisé pour accumuler un fond de retraite. S'il arrête de fumer à 40 ans alors qu'il fumait un paquet par jour au prix de 4 francs et que le prix du paquet reste le même, déterminer le montant qu'il aura accumulé à 65 ans en plaçant les 120 francs d'économies mensuelles à un taux mensuel de 0.9%.
(Rép : 184'325.48 francs)

5 Glossaire

Annuité Une annuité est un versement périodique effectué pour constituer un capital ou pour rembourser un emprunt.

Annuité de début de période Une annuité de début de période est un versement périodique effectué pour constituer un capital. Elle rapporte ainsi de l'intérêt dès qu'elle est placée.

Annuité de fin de période Une annuité de fin de période est un versement périodique effectué pour rembourser un emprunt. En général, le dernier versement clôt l'emprunt.

Annuité de générale Une annuité générale est une annuité pour laquelle le nombre de capitalisations annuelles est différent du nombre de versements annuels. Ainsi, versements et capitalisations ne s'effectuent pas forcément en même temps.

Annuité simple Une annuité simple est une annuité pour laquelle le nombre de capitalisations annuelles est égal au nombre de versements annuels. Ainsi, les capitalisations coïncident avec les versements.

Capitalisation La capitalisation est le conversion des intérêts en capital.

Capital initial Montant d'argent que l'on place pour le faire fructifier.

Intérêt Montant que l'on reçoit au terme d'une période pour avoir prêté ou « loué » un capital à une personne ou une institution financière.

Progression géométrique Une progression géométrique est une suite ordonnée de termes telle que chaque terme est obtenu du précédant en le multipliant par une raison constante r.

Terme général d'une progression géométrique Le terme général d'une progression géométrique est la description du n-ième terme a_n en fonction du premier a_1 et de la raison r, à savoir $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$.

Taux d'intérêt Rapport de l'augmentation du capital durant une période sur la valeur en début de période. Il s'exprime en pourcent. Lorsque le taux est fixe pour plus d'une période, le capital accumulé peut être décrit par un modèle exponentiel.

Taux équivalents Des taux sont équivalents s'ils donnent le même rendement pour un même capital et une même durée. On utilise en général l'année comme référence pour calculer un taux équivalent.

Taux nominal Un taux d'intérêt nominal est un taux annuel qui est capitalisé (ou composé) plusieurs fois par année. On le donne sous la forme d'un couple $(j; m)$ où j est le taux nominal et m le nombre de capitalisation annuel. Le taux par période de capitalisation est alors $i = \dfrac{j}{m}$.

Taux périodique Un taux périodique est un taux applicable à une période précisée (semaine, mois, trimestre, semestre, année). On parle alors de taux hebdomadaire, mensuel, trimestriel, semestriel, annuel. La période par défaut est l'année.

Taux réel ou effectif Le taux d'intérêt réel est le taux payé en une année. Lorsque le taux affiché est un taux nominal $(j;m)$, le taux réel r est donné par la relation $1+r = \left(1+\dfrac{j}{m}\right)^m$.

Valeur actuelle d'un capital La valeur actuelle C_0 d'un capital est le montant qu'il faut placer actuellement à un taux périodique fixe pour accumuler la somme C_n à une échéance donnée.

Valeur future ou valeur acquise d'un capital La valeur future C_n d'un capital C_0 est la valeur qu'aura ce capital après n périodes s'il est placé à un taux fixe r.

Valeur cumulée de n annuités La valeur cumulée VC de n annuités est la somme totale accumulée à l'échéance des n annuités.

Valeur actuelle de n annuités La valeur actuelle de n annuités est égale au montant VA <u>unique</u> qu'il faudrait placer aujourd'hui au même taux que les annuités, pour obtenir à échéance le montant de la valeur cumulée VC de ces n annuités.