Notes de mathématiques financières

Par A. Benchekroun

PARTIE I: OPERATIONS FINANCIERES DE COURT TERME

I.1 Intérêt simple

I.1)a) Formule fondamentale de l'intérêt simple

Soit

C: le montant du capital prêté

n: la durée du placement

i : le taux de placement sur la période

Le montant des intérêts, I, sera donné par la formule

$$\boxed{(1) \quad I = n \times i \times C}$$

<u>Remarques</u>:Le taux de placement est souvent donné sur une période annuelle. Si aucune indication n'est donnée, il s'agira toujours d'un taux annuel.

Exemple: Un capital de 25 000 DH, prêté pendant 2 ans au taux de 9%, fournira au prêteur un intérêt égal à

I = 2x9%x 25 000 = 4 500 DH, et l'emprunteur devra, à l'expiration du délai de 2 ans remettre à son prêteur la somme 25 000 + 4 500 = 29 500 DH.

La durée n d'un placement peut être exprimée en mois; Comme i est souvent relatif à l'année, la formule (1) reste valable en convenant qu'il s'agit d'un taux mensuel donné par la formule

$$i_{mensuel} = \frac{i}{12}$$

Donc

$$I = n \times \frac{i}{12} \times C$$

en mois

taux annuel

Exemple: Capital = 25 000 DH; n = 6 mois et i = 9% (annuel); le montant des intérêts est:

$$I = 6 \times \frac{9\%}{12} \times 25\,000 = 1125\ \text{DH}$$

6 mois après l'emprunt de 25 000 DH, l'emprunteur devra remettre à son prêteur la somme de 25 000 + 1125 = 26 125 DH.

La durée n peut aussi être exprimée en jours; L'usage veut que l'on prenne souvent:

$$i_{jour} = \frac{i}{360}$$

taux annuel

et donc la formule (1) devient: $$I = n \times \frac{i}{360} \times C$$

Bien que l'année soit comptée à 360 jours dans la détermination du taux d'intérêt qui n'est finalement qu'une grandeur financière "négociée" et conventionnelle, les mois sont comptés à leur nombre de jours exact (et non à 30 jours).

Il est très important de noter que dans la formule (1), la durée de financement n est exactement égale à $t_2 - t_1$ où

- ✓ t_1 est la date de consentement (mise à disposition du capital);
- ✓ t_2 est la date de remboursement (capital initial augmenté des intérêts).

Pour calculer de manière pratique $t_2 - t_1$ pour une durée n exprimée en jours, on peut utiliser la règle suivante:

- ✓ Si t_1 et t_2 se situent à l'intérieur d'un même mois, n se calcule simplement par simple différence de ces deux dates;

- ✓ Si t_1 et t_2 ne se situent pas à l'intérieur d'un même mois, le principe de comptage consiste à retenir que l'une de ces deux dates extrêmes (par exemple la date finale t_2).

Exemple: Emprunt = 25 000 DH; taux = 9%;

consentement = 13 mars & remboursement = 8 juillet;

mars 31 (nombre de jours du mois) - 13 (date initiale) = 18 j

avril = 30 j

mai = 31 j

juin = 30 j

juillet = 08 j

Total = 117 j

et donc le total des intérêts est $I = 117 \times \frac{9\%}{360} \times 25000 = 731{,}25 \text{ DH}$

Le 8 juillet, la somme de 25 000 + 731,25 = 25 731, 25 DH devra être remboursée.

I.1)b) Valeur acquise par un capital

La valeur acquise par un capital est la valeur du capital majoré de l'intérêt qu'il a produit.

Donc la valeur acquise est: $V = C + I = C + n\,i\,C = (1 + n\,i)\,C$

$$(2) \quad \boxed{V = (1+n\,i)\,C}$$

Il est très important d'assimiler l'aspect temporel de cette notion; Il faut considérer que , compte tenue du taux i, C & V représentent le même capital "évalué" à 2 dates différentes:

✓ C est le capital évalué à la date de consentement, cette grandeur C est souvent appelée "valeur actuelle" du capital;

✓V est le même capital évalué à la date de remboursement.

I.1)c) Taux moyen d'une série de placements effectués simultanément.

Une même personne effectue simultanément K placements aux conditions suivantes:

Capitaux	Taux	Durée
C_1	i_1	n_1
C_2	i_2	n_2
. . .		
C_K	i_K	n_K

L'intérêt total produit par ces K placements est égal à

$$I = n_1\, i_1\, C_1 + n_2\, i_2\, C_2 + \ldots + n_K\, i_K\, C_K = \sum_{p=1}^{K} n_p\, i_p\, C_p$$

Le taux moyen de ces placements est le taux, qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leurs durées respectives, conduirait au même montant des intérêts I; Soit i ce taux, donc:

$$I = i \times (n_1 C_1 + n_2 C_2 + \ldots + n_K C_K)$$ et donc

$$\boxed{(3) \qquad i = \frac{\sum_{p=1}^{K} n_p C_p i_p}{\sum_{p=1}^{K} n_p C_p}}$$

C'est la moyenne des taux d'intérêt pondérée par les capitaux pour leur durée respective.

I.1)d) Intérêt précompté et taux effectif de placement

Les formules (1), (2) et (3) sont fondées sur le paiement des intérêts par l'emprunteur au jour du remboursement du capital emprunté. Il est fréquent que, par convention entre les intéressés, les intérêts soient versés par l'emprunteur le jour du consentement du prêt. Dans ce cas, les fonds engagés par le prêteur procurent un taux de placement supérieur au taux stipulé (taux nominal), qui sert lui au calcul des intérêts.

Exemple : Une personne place à intérêt précompté 500 000 DH pour un an au taux de 4%; Quel taux effectif de placement réalise - t- elle?

L'intérêt procuré par l'opération s'élève à I = 500 000 x 4% x 1 = 20 000 DH; Le prêteur reçoit immédiatement cet intérêt;Tout se passe comme s'il n'avait engagé que

500 000 – 20 000 = 480 000 DH; Un an après, le prêteur reçoit son capital de 500 000 DH (les intérêts étant déjà perçus); Finalement, le prêteur a gagné en 1 an, 20 000 DH, en ne prêtant que 480 000 DH.

Donc, le taux effectif de placement est i_e tel que

480 000 x i_e x 1 = 20 000, d'où

$$i_e = \frac{2}{48} = \frac{1}{24} \approx 04,17\,\%$$

Cas général : Soit C un capital prêté à intérêt précompté au taux i pour une durée n.

On a les relations suivantes:

Intérêts = I = C x i x n et

Capital effectivement engagé = C - I = C(1 - ni) et donc le taux effectif de placement i_e est tel que,

C(1 - ni) x i_e x n = C x i x n d'où

$$(4) \qquad i_e = \frac{i}{1 - ni}$$

donc, le taux effectif d'un placement à intérêt précompté est indépendant du capital placé: il ne dépend que du taux d'intérêt nominal et de la durée du placement.

I.2 Escompte

I.2)a) Effet de commerce

Exemple: Le 10 mars, A vend à B des marchandises pour un montant de 30 000 DH, le règlement devant intervenir le 31 mai.

A, le créancier, doit donc attendre le 31 mai pour entrer en possession de ses fonds; Cependant, il peut avoir besoin de cet argent bien avant le 31 mai.

Supposons que A sollicite, le 26 mars, une avance de son banquier, avance garantie par la créance que A possède sur B; Le banquier ne consentira cette avance que si son client A est en mesure de justifier par un document écrit, l'existence de cette créance de 30 000 DH à échéance du 31 mai.

A se tournera vers B et lui demandera :

- ✓ soit de souscrire un billet à ordre, c'est à dire de promettre, par écrit, de lui payer la somme de 30 000 DH à la date du 31 mai;

- ✓ soit d'apposer sa signature sur une lettre de change ou traite, reconnaissant l'existence au profit de A, d'une créance de 30 000 DH, à encaisser le 31 mai.

"Billet à ordre" et "Lettre de change" sont des effets de commerce.

I.2)b) L'opération d'escompte

Les deux mentions essentielles portées sur un effet de commerce sont:

✓le montant de l'effet, appelé "valeur nominale";

✓la date du paiement de cette valeur nominale, appelée "échéance".

Le 26 mars, A présente l'effet de commerce à son banquier; On dit qu'il négocie l'effet ou qu'il le remet à l'escompte. De son côté, le banquier escompte l'effet; Il ne consent à cette opération que s'il bénéficie d'une rémunération, appelée "escompte commercial".

I.2)c) L'escompte commercial

C'est le prix du service rendu par le banquier:

$$e = n \times \frac{i}{360} \times V \qquad (5)$$

Valeur nominale de l'effet

Taux d'intérêt (annuel) affiché par le banquier

escompte

durée en jours qui sépare la date de remise à l'escompte de l'effet, de la

date d'échéance de l'effet = durée du prêt consenti par le banquier.

Exemple: Soit un effet de commerce de valeur nominale 30 000 DH d'échéance le 31 mai , escompté le 26 mars au taux de 9%.

Mars:	31-26	= 05 j
Avril:		= 30 j
Mai:		= 31 j
	Total	= 66 j D'où

$$e = 66x\ \frac{9\%}{360} \times 30\,000 = 495\ \mathrm{DH}$$

I.2)d) Valeur actuelle commerciale

Si le banquier se conformait à la définition de l'intérêt simple, il serait conduit à prêter le 26 mars, 30 000 DH à son client A, lequel lui verserait, le 31 mai,

30 000 + 495 = 30 495 DH;

En réalité, le banquier retient immédiatement l'escompte; Le 26 mars, il remet à son client 30 000 - 495 = 29 505 DH; le 31 mai, son client lui rendra 30 000 DH; Il pratique de "l'intérêt précompté" au taux d'intérêt nominal i (9%).

La somme effectivement mise par le banquier à la disposition de son client (différence entre la valeur nominale de l'effet et son escompte commercial) est appelée "valeur actuelle commerciale";

a = V - e

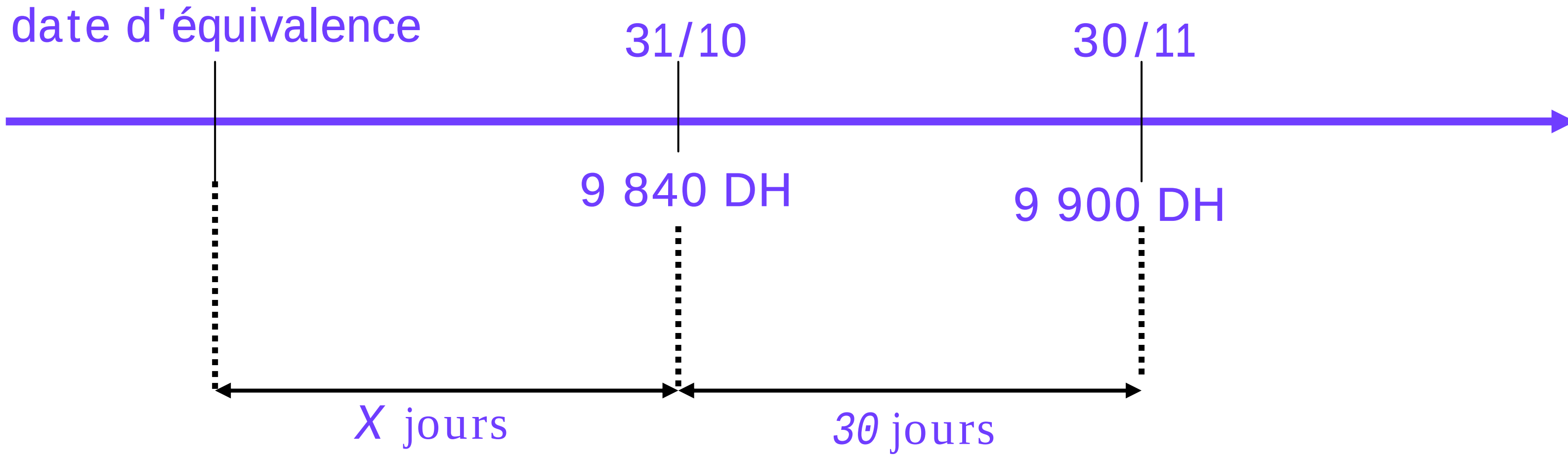
(Valeur actuelle commerciale = Valeur nominale - Escompte) donc:

$$\boxed{(6) \qquad a = V\left(1 - \frac{ni}{360}\right)}$$

I.2)e) Equivalence d'effets ou de capitaux et date d'équivalence

Exemple: Deux effets de commerce, de valeurs nominales respectives 9 840 DH (échéance le 31 octobre) et 9 900 DH (échéance le 30 novembre), sont négociés au taux d'escompte de 7,2%; S'il existe une date à laquelle les valeurs actuelles de ces deux effets sont égales, on dira que ces deux effets sont équivalents à la date en question, appelée date d'équivalence.

Résolution:



Donc

$$a = 9840 \ (1 - \frac{0{,}072}{360} x) = 9900 \ [1 - \frac{0{,}072}{360} (x + 30)]$$

$$a = 9849 \ - 1{,}968 \ x = 9900 \ - 1{,}98 \ x - 59{,}4$$

$$0{,}012 \ x = 0{,}6 \quad \Rightarrow \ x = \frac{6 \times 10^{-1}}{12 \times 10^{-3}} = 50$$

et donc la date d'équivalence se situe 50 jours avant le 31 octobre, soit le 11 septembre.

I.2)f) Problèmes pratiques posés par la notion d'équivalence

Problème 1: B doit à A une somme de 7 110 DH payable le 31/05, sa dette étant constatée par l'acceptation d'un effet de commerce; Le 16 mai, B se voit dans l'incapacité de faire face, à la date du 31/05, au règlement de sa dette: il demande alors à A de remplacer l'effet de commerce à échéance du 31/05 par un autre d'échéance le 30 juin.

Quelle est la valeur nominale de l'effet de commerce d'échéance le 30 juin? Taux d'escompte : 10%.

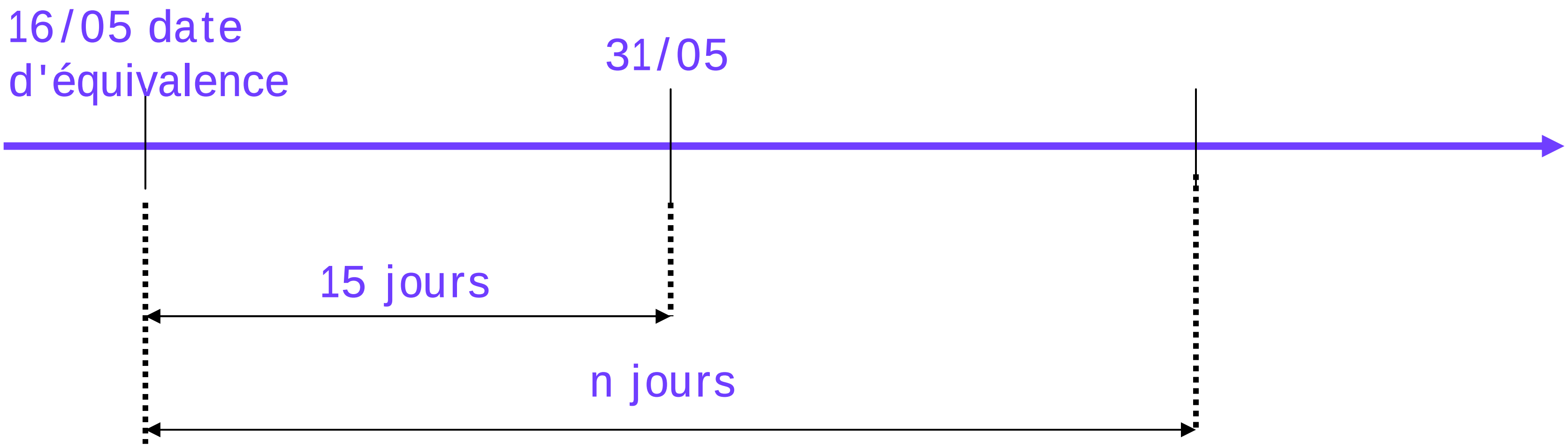
Résolution: la date du 16 mai, date à laquelle est prise la décision de remplacer le premier effet par le second, est retenue comme date d'équivalence.

$$a = 7110(1 - \frac{15}{360}0,1) = V(1 - \frac{45}{360}0,1)$$

$$7110(360 - 1,5) = V.(360 - 4,5)$$

$$2548935 = 355,5 \times V \Rightarrow V = \frac{2548935}{355,5} = 7170\,DH$$

Problème 2: Le débiteur aurait pu proposer à son créancier de remplacer le premier effet par un second de nominal fixé, à 7 200 DH par exemple, et dont il aurait fallu calculer l'échéance.



$$a = 7110\left(1 - \frac{15}{360}0{,}1\right) = 7200\left(1 - \frac{n}{360}0{,}1\right)$$

$$2548935 = 7200(360 - 0{,}1n)$$

$$720n = 43065 \Rightarrow n = \frac{43065}{720} \approx 59{,}81 \approx 60 \; jours$$

L'échéance de l'effet de remplacement sera donc fixée à 60 jours après le 16 mai, soit au 15 juillet.

I.2)g) Problèmes de l'échéance commune

Problème 1: Le 6 septembre le débiteur de 3 effets:

- ✓ 10 000 DH à échéance du 31/10
- ✓ 30 000 DH à échéance du 30/11
- ✓ 20 000 DH à échéance du 31/12

demande à son créancier (le même pour les 3 effets) de remplacer ces 3 effets par un effet unique à échéance du 15 décembre.

Quelle est la valeur nominale de cet effet unique? Taux d'escompte: 9%.

Résolution: le jour où le remplacement est décidé, la valeur actuelle de l'effet de remplacement est égale à la somme des valeurs actuelles des effets remplacés.

Du 06/09/ au 31/10 on compte 55 j

du 06/09/ au 30/11 on compte 85 j

du 06/09/ au 31/12 on compte 116 j

du 06/09/ au15/12 on compte 100 j

$$V(1-\frac{100}{360}0{,}09) = 10000(1-\frac{55}{360}0{,}09) + 30000(1-\frac{85}{360}0{,}09) + 20000(1-\frac{116}{360}0{,}09)$$

$$351 \times V = 3550500 + 10570500 + 6991200 = 21112200$$

$$V = \frac{21112200}{351} = 60148{,}72\,DH$$

Problème 2: Avec les mêmes données que celles du "problème 1", il s'agit maintenant de déterminer l'échéance d'un effet unique remplaçant les 3 effets, et dont le nominal serait de 59 800 DH.

Résolution: si n désigne le nombre de jours qui sépare le 6 septembre de l'échéance cherchée, nous devons avoir:

$$59800(1-\frac{n}{360}0{,}09) = 10000(1-\frac{55}{360}0{,}09) + 30000(1-\frac{85}{360}0{,}09) + 20000(1-\frac{116}{360}0{,}09)$$

$$21528000 - 5382n = 21112200 \Rightarrow 5382n = 415800 \Rightarrow n = \frac{415800}{5382} \approx 77{,}26$$

$$n \approx 77 \; jours$$

l'échéance se situe 77 jours après le 6 septembre, soit le 22 novembre.

I.2)h) Cas particulier du problème de l'échéance commune: échéance moyenne

Dans les deux problèmes précédents (I.2)g), les deux valeurs nominales sont voisines de 60 000 DH, total des valeurs nominales des 3 effets remplacés; C'est pourquoi on peut s'intéresser au problème du remplacement des 3 effets par un seul de nominal 60 000 DH (somme des trois valeurs nominales); Il faut donc rechercher l'échéance de cet effet de remplacement:

$$60000 \quad (1 - \frac{n}{360} 0{,}09) = 10000 \quad (1 - \frac{55}{360} 0{,}09) + 30000 \quad (1 - \frac{85}{360} 0{,}09)$$

$$+ \; 20000 \quad (1 - \frac{116}{360} 0{,}09)$$

$$21\;600\;000 \; - 5400\, n \; = \; 21\,112\;200 \; \Rightarrow \; 5400\, n \; = \; 487800$$

$$\Rightarrow \; n \; = \; \frac{487800}{5400} \; = \; \frac{271}{3} \; \approx \; 90{,}33$$

$n \approx 90$ *jours*

l'échéance de l'effet interviendra donc 90 jours après le 6 septembre soit le 5 décembre. On remarque que

$$n \; = \; \frac{55 \times 10000 + 85 \times 30000 + 116 \times 20000}{60000} \; = \; \frac{5420000}{60000} \; = \; \frac{542}{6} \; = \; \frac{271}{3}$$

autrement dit
n = valeur moyenne des durées pondérées par les valeurs nominales.

C'est pourquoi on parle d'échéance moyenne. Ceci est général; En effet, supposons qu'à une certaine date, on décide de remplacer K effets de valeurs nominales respectives V_1 , V_2 , ... , V_K et à échéances respectives n_1 , n_2 , ... , n_K jours, comptés à partir de la date de remplacement, par un effet de valeur nominale

$V = V_1 + V_2 + ... + V_K$.

Quelle est la date à laquelle devra être fixée l'échéance de l'effet unique de nominal V?

Résolution:

$$V\left(1-\frac{n}{360}i\right)=\sum_{p=1}^{K}V_p\left(1-\frac{n_p}{360}i\right)$$

$$\frac{iV}{360}\times n=\underbrace{V-\sum_{p=1}^{K}V_p}_{0}+\sum_{p=1}^{K}\frac{n_p i}{360}V_p\Rightarrow n=\frac{1}{V}\sum_{p=1}^{K}n_pV_p$$

$$\boxed{(7)\quad n=\frac{1}{V}\sum_{p=1}^{K}n_pV_p}$$

Il y a quelques remarques importantes à faire sur l'échéance moyenne.

- ✓ Dans la formule (7) , le taux d'escompte n'apparaît pas; La date d'échéance moyenne ne dépend pas du taux d'escompte.

- ✓ L'escompte de l'effet unique est

$$e = n \times \frac{i}{360} V = \frac{1}{V} \left(\sum_{p=1}^{K} n_p V_p \right) \times \frac{i}{360} V = \sum_{p=1}^{K} n_p \frac{i}{360} V_p$$

c'est donc la somme des escomptes des effets remplacés.

- L'échéance moyenne ne dépend pas de la date d'origine choisie pour écrire les équivalences;

  En effet, supposons que les équivalences soient écrites d jours avant ou après la date retenue primitivement; La date d'échéance moyenne se situe à n' jours de cette nouvelle date d'équivalence:

$$n' = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{K} (n_p + \varepsilon d) V_p$$

$$= \frac{1}{V} \left(\sum_{p=1}^{K} n_p V_p + \varepsilon d \sum_{p=1}^{K} V_p \right)$$

$$n' = \frac{1}{V} \sum_{p=1}^{K} n_p V_p + \varepsilon d = n + \varepsilon d$$

$$\varepsilon = \begin{cases} +1 \ \textit{si équivalence d jours avant} \\ -1 \ \textit{si équivalence d jours après} \end{cases}$$

ce qui montre bien que la date d'échéance moyenne est inchangée.

I.2)i) Les problèmes de crédit

Exemple : Un achat d'un montant de 100 000 DH est réglé de la façon suivante:

- ✓ comptant: 20% de l'achat;
- ✓ le solde au moyen de 6 traites mensuelles, chacune de montant nominal V, la première échéant un mois après l'achat.

Il s'agit de déterminer le montant V, compte tenu d'un taux de crédit de 12%.

Résolution: Il faut écrire, qu'à la date d'achat, il y a égalité entre

- ✓ le montant du crédit consenti,

  soit 80% x 100 000 = 80 000 DH,

- ✓ et la somme des valeurs actuelles des effets de commerce qui assureront le règlement de ce crédit.

$$80000 = V\left(1-\frac{0{,}12}{12}\right)+V\left(1-\frac{0{,}12}{12}\times 2\right)+V\left(1-\frac{0{,}12}{12}\times 3\right)+\ldots+V\left(1-\frac{0{,}12}{12}\times 6\right)$$

$$80000 = 6V - V\sum_{p=1}^{6} 0{,}01\times p = 6V - 0{,}01\times V\times\frac{6\times 7}{2} = 5{,}79V$$

$$\Rightarrow V = \frac{80000}{5{,}79} = 13816{,}93\,DH$$

D'une manière plus générale, les problèmes de crédit se résolvent en écrivant qu'à la date d'achat, l'équivalence entre le montant du crédit et les sommes qui assureront le règlement de ce crédit*.

*: en réalité, ceci n'est financièrement valable que si la date d'achat correspond à la date de livraison du bien acheté;D'une manière plus générale, il faut écrire qu'il y a équivalence, *à la date de livraison*, entre la valeur du bien, et les sommes versées qui assureront le règlement de cette valeur.

Il est alors évident, dans ce cas, que la formule de la valeur actuelle d'une somme versée V, $a = V(1 - ni)$, se généralise même à une durée n négative dans le cas où le versement V intervient antérieurement à la date de livraison.

PARTIE II: OPERATIONS FINANCIERES DE LONG TERME

II.1 Intérêts composés

En matière d'opérations à long terme, un prêt pouvant durer plusieurs années, il est naturel que le prêteur considère l'intérêt simple fourni par son capital comme un nouveau capital, qui ajouté au capital initial, portera intérêt à son tour.

II.1a) <u>Formule fondamentale</u>

La valeur acquise par le capital C, après n périodes de placement (après n capitalisations de l'intérêt) est

$$\boxed{(8) \quad C_n = C\,(1+i)^n}$$

et donc Intérêt composé = $C_n - C = C[(1+i)^n - 1]$

Exemples d'utilisation de la formule (8) :

Exemple 1: C = 20 000 DH, capitalisation annuelle des intérêts au taux de 9,5%, et durée = n = 7 ans. Quelle est la valeur acquise par le capital C?

$C_7 = (1 + 0{,}095)^7 \times 20\,000 = 1{,}88755160\ldots \times 20\,000 = 37\,751{,}03$ DH.

Exemple 2: C = 30 000 DH, capitalisation annuelle des intérêts sur une durée = n = 11 ans; Quelle est le taux de placement sachant que la valeur acquise par le capital est $C_{11} = 89\,971{,}77$ DH?

$89\,971{,}77 = (1+i)^{11} \times 30\,000 \Rightarrow i = (\,89\,971{,}77\,/\,30\,000\,)^{1/11} - 1 = 0{,}10499$

$i \approx 10{,}50\%$

Exemple 3: C = 40 000 DH, capitalisation semestrielle des intérêts avec un taux d'intérêt semestriel de 4,75%; Quelle est la durée du placement sachant que la valeur acquise par le capital est 76 597,84 DH?

$$76\,597{,}84 = (1{,}0475)^n \times 40\,000 \Rightarrow$$

$$(1{,}0475)^n = 76\,597{,}84 \,/\, 40\,000$$

$$\Rightarrow n \ln 1{,}0475 = \ln(76\,597{,}84 \,/\, 40\,000)$$

$$\Rightarrow n = 14{,}0000044$$

$n = 14$ semestres

Exemple 4: n = 10 ans, capitalisation annuelle au taux d'intérêt de 7,5%; Quel est le capital placé sachant que la valeur acquise est de 123 661,92 DH?

$$123\ 661{,}92 = 1{,}075^{10} \times C \Rightarrow C = 123\ 661{,}92/1{,}075^{10}$$

$$\approx 60\ 000{,}01 \text{ DH.}$$

II.1b) Formule fondamentale dans le cas d'un nombre de périodes non entier

Exemple: C = 20 000 DH placé à intérêt composé; taux annuel de placement = 11%, et durée = 7 ans 3 mois. Quelle est la valeur acquise par le capital C?

$n = 7 + 3/12 = 7 + \frac{1}{4} = 29/4$; $C_{7+3/12} = 1{,}11^{29/4} \times 20\ 000$

$= 42\ 620{,}80$ DH

II.1c) Taux équivalents - Taux proportionnels

Soit C un capital placé à intérêt composé au taux annuel i pendant n années. A l'expiration des n années, sa valeur acquise sera $C(1+i)^n$. Le même capital placé à intérêt composé au taux semestriel i_s , pendant 2n semestres aura pour valeur acquise $C(1+i_s)^{2n}$. Quand les deux valeurs acquises sont égales entre elles, on dira que les deux taux i (annuel) et is (semestriel) sont équivalents.

$$(1+i_s)^{2n} = (1+i)^n \Rightarrow \quad i_s = (1+i)^{1/2} - 1$$

Plus généralement, si i désigne le taux annuel,

et, i_k le taux attaché à une période k fois plus petite que l'année, on aura:

$1+i = (1+i)^k \Rightarrow$ $$\boxed{(10) \quad i_k = (1+i)^{1/k} - 1}$$

$$i_{trim} = (1+i)^{1/4} - 1 \quad \text{et} \quad i_{mois} = (1+i)^{1/12} - 1$$

Le taux proportionnel au taux i , relatif à une période k fois plus petite que l'année est i/k ; C'est généralement le taux utilisé en intérêt simple.

II.2 Escompte à Intérêts composés

II.2)a) Principe

Soit une créance de nominal V à échéance sur une durée n, qui est négociée au taux i.

Exemple: V = 100 000 DH, échéance = 5 ans, taux négocié = 7%.

Il est demandé de calculer la valeur actuelle de la créance et son escompte (à intérêt composé).

En opération de long terme, ne peut être retenu que le principe de "l'escompte rationnel" à intérêt composé: l'escompte est l'intérêt composé de la somme effectivement prêtée par le banquier et non l'intérêt de la valeur nominale de la créance (cas de l'escompte d'un effet de commerce).

Soit donc:

e' , l'escompte à intérêt composé et a' la valeur actuelle correspondante; on doit avoir:

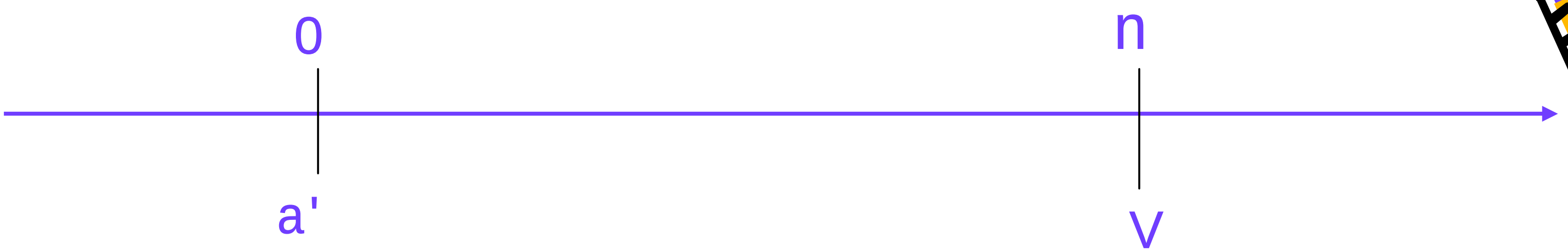
a' + e' = V et e' = intérêt composé de a'

soit a' + intérêt composé de a' = V soit encore $a'(1+i)^n = V$ et donc

$$(12) \qquad a' = \frac{V}{(1+i)^n}$$

c'est l'expression de la valeur actuelle (somme effectivement prêtée par le banquier), et donc l'escompte est

$$e' = V - a' = V[1-(1+i)^{-n}].$$



montant disponible à la date 0 pour le client

valeur nominale de la créance, disponible pour le banquier qu'après une durée n

Ainsi pour notre exemple, V = 100 000 DH, n = 5 ans, et i = 7%

Valeur actuelle de la créance = a' = $100\ 000 / (1{,}07)^5$ = 71 298,62 DH, c'est le montant que mettra le banquier à la disposition de son client;
Et escompte = e' = 100 000 - 71298,62 = 28 701,38 DH.

II.2)b) Effets équivalents, capitaux équivalents

Deux capitaux, de valeurs nominales différentes et d'échéances différentes, escomptés au même taux, sont dits équivalents s'ils ont des valeurs actuelles égales à la date d'escompte.

Donc à un taux donné i, soit deux créances:

✓créance 1: nominal V_1 , échéance n_1

✓créance 2: nominal V_2 , échéance n_2

Effet 1 ~ Effet 2 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{V_1}{(1+i)^{n_1}} = \dfrac{V_2}{(1+i)^{n_2}}$

Il est très important de noter, qu'en intérêt composé, l'équivalence se conserve dans le temps: elle est indépendante de la date d'escompte (ce qui n'est pas le cas en escompte à intérêt simple).

II.2)c) Cas pratiques posés par la notion d'équivalence.

Cas 1 : Calcul d'une valeur nominale

Soit une créance de montant V_1 = 100 000 DH qui aurait lieu dans 3 ans, et qui doit être substituée par une autre de montant V_2 à échéance dans 5 ans.

Il s'agit de déterminer V_2 sachant que le taux d'escompte est de 8%.

$$V_1 / 1{,}08^3 = V_2 / 1{,}08^5 \Rightarrow V_2 = 108^2 \text{ x } V_1 = 116\ 640 \text{ DH.}$$

Cas 2 : Calcul d'une valeur nominale

On décide aujourd'hui de remplacer un règlement de 100 000 DH qui aurait eu lieu dans 3 ans par un autre à 115 000 DH. Il s'agit de déterminer la date de règlement remplacement sachant que le taux d'escompte est de 6%.

$$100\,000/1{,}06^3 = 115\,000/1{,}06^n \Rightarrow$$

$$n = 3 + \ln(115/100)/\ln 1{,}06$$

$$\approx 3 + 2{,}39 = 5{,}39$$

n = 5 ans 4 mois 23 jours.

II.2)d) <u>Echéance commune</u>

<u>Cas 1</u> : On remplace aujourd'hui 4 règlements:

- ✓ V1 = 200 000 DH à échéance de 1 an
- ✓ V2 = 300 000 DH à échéance de 3 ans
- ✓ V3 = 100 000 DH à échéance de 4 ans
- ✓ V4 = 400 000 DH à échéance de 7 ans

par un règlement unique à échéance de 5 ans; Il s'agit de déterminer le montant V du règlement unique sachant que le taux d'escompte est de 7%.

$$\frac{V}{1,07^{5}} = \frac{V_{1}}{1,07} + \frac{V_{2}}{1,07^{3}} + \frac{V_{3}}{1,07^{4}} + \frac{V_{4}}{1,07^{7}}$$

$$V = V_{1} \times 1,07^{4} + V_{2} \times 1,07^{2} + V_{3} \times 1,07 + \frac{V_{4}}{1,07^{2}}$$

V = 1.062.004,69 ≈ 1.062.005 DH.

<u>Cas 2</u>: On remplace les 4 règlements par un paiement unique de montant 1000 000 DH. Il s'agit de déterminer la date de règlement unique avec un taux d'escompte de 7%.

$$\frac{1000\,000}{1,07^{n}} = \frac{V_1}{1,07} + \frac{V_2}{1,07^{3}} + \frac{V_3}{1,07^{4}} + \frac{V_4}{1,07^{7}} = \frac{1062\,004,693}{1,07^{5}}$$

$$1,07^{5-n} = \frac{1062\,004,693}{1,07^{6}}$$

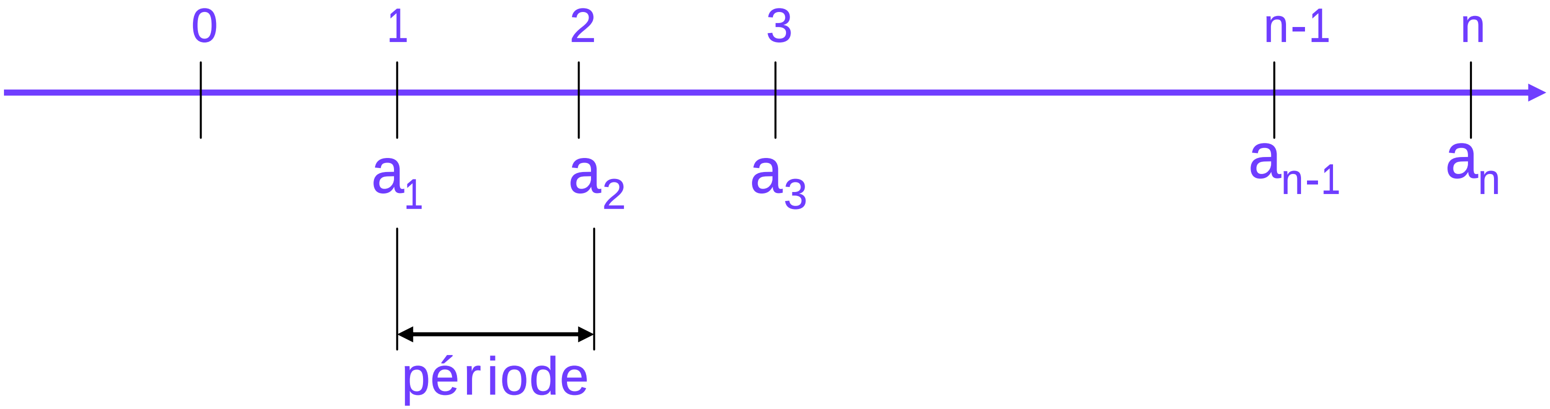
$$n = 5 - \frac{\ln(1062\,004,693 \times 10^{-6}}{\ln 1,07} \approx 5 - 0,889 \simeq 4,11 an$$

$$n \simeq 4 ans 1 mois 10\ jours$$

II.3) Annuités

Une suite d'annuités est une suite de versements effectués à intervalle de temps égaux. Une suite d'annuités est parfaitement définie par

- ✓ la date du premier versement,
- ✓ la période: durée constante qui sépare deux versements consécutifs,
- ✓ le nombre des versements
- ✓ le montant de chacun des versements.

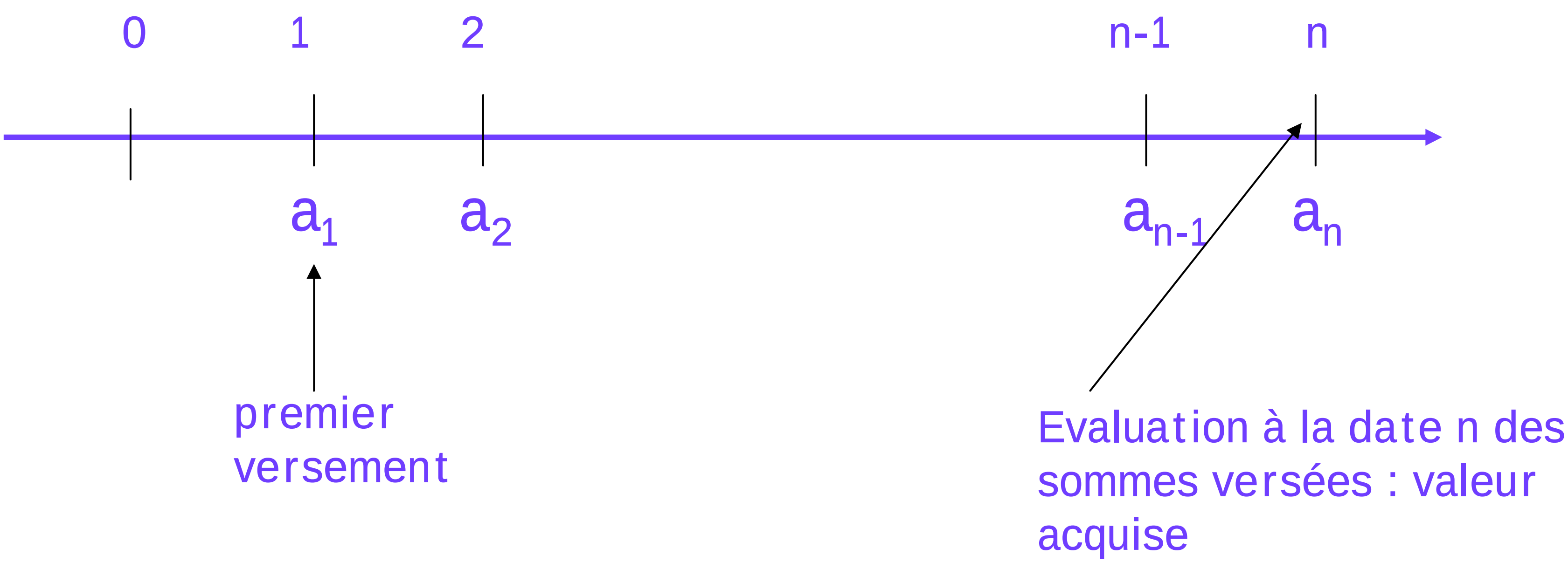


Une suite d'annuités a généralement pour objectif:

✓soit la constitution d'un capital

✓soit le remboursement d'un emprunt.

II.3)a) Valeur acquise d'une suite d'annuités



$$V_n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \ldots + a_{n-1}(1+i) + a_n$$

$$\boxed{(13) \quad V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{n-k}}$$

Cas particulier des annuités constantes: pour tout k, $a_k = a$

$$V_n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{n-k} = a \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{n-k}$$

$$= a \sum_{k=0}^{n-1} (1+i)^{k} = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$\boxed{(14) \qquad V_n = a \frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Exemples

- Exemple 1 Calculer la valeur acquise par une suite de 10 annuités constantes et égales chacune à 15 000 DH; Taux=04,50%

$$V_{10} = 15\,000\,\frac{1{,}045^{10} - 1}{0{,}045} = 15\,000 \times 12{,}288209.....$$

$$= 184\,323{,}14\ DH$$

- <u>Exemple 2</u> 15 annuités capitalisées à 10% ont une valeur acquise de 100 000 DH; Calculer l'annuité.

$$V_2 = 100\,000 = a\,\frac{1{,}1^{15} - 1}{0{,}1} = 10a(1{,}1^{15} - 1)$$

$$\Rightarrow a = \frac{10\,000}{1{,}1^{15} - 1} = 3147{,}38\,DH$$

- <u>Exemple 3</u> 20 annuités constantes de 4000 DH ont une valeur acquise de 200 000 DH; Déterminer le taux de capitalisation.

$$200\,000 = 4000\frac{(1+i)^{20}-1}{i}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+i)^{20}-1}{i} = 50$$

i peut être calculé en utilisant une table et/ou par interpolation linéaire.

On peut aussi le calculer en utilisant un tableur (Excel, Lotus 123,…).

On trouve $i \approx 8{,}79\%$

- <u>Exemple 4</u> A l'aide d'annuités de 15 000 DH chacune, capitalisées à 6,5%, on veut constituer un capital de 150 000 DH; Déterminer le nombre de ces annuités.

$$V_n = 150000 = 15000 \times \frac{1{,}065^n - 1}{0{,}065}$$

$$\Rightarrow 1{,}065^n = 1 + 10 \times 0{,}065 = 1{,}65$$

$$\Rightarrow n = \frac{\ln 1{,}65}{\ln 1{,}065} \approx 7{,}951994998$$

n doit absolument être ici entier : 7 annuités conduiraient à une capitalisation inférieure à 150 000 DH , et 8 à une supérieure; Deux alternatives pourraient être proposées.

Alternative 1 : On verse 7 annuités , toutes égales à 15 000 DH, sauf la 7ème qui doit être majorée ; Cette majoration risque d'être très supérieure à 15 000 DH dans la mesure où le n théorique est très proche de 8 : c'est pourquoi cette solution ne correspond pas au problème.

$$V_7 = 15000 \times \frac{1{,}065^7 - 1}{0{,}065} = 127\,843{,}05 \text{ DH}$$

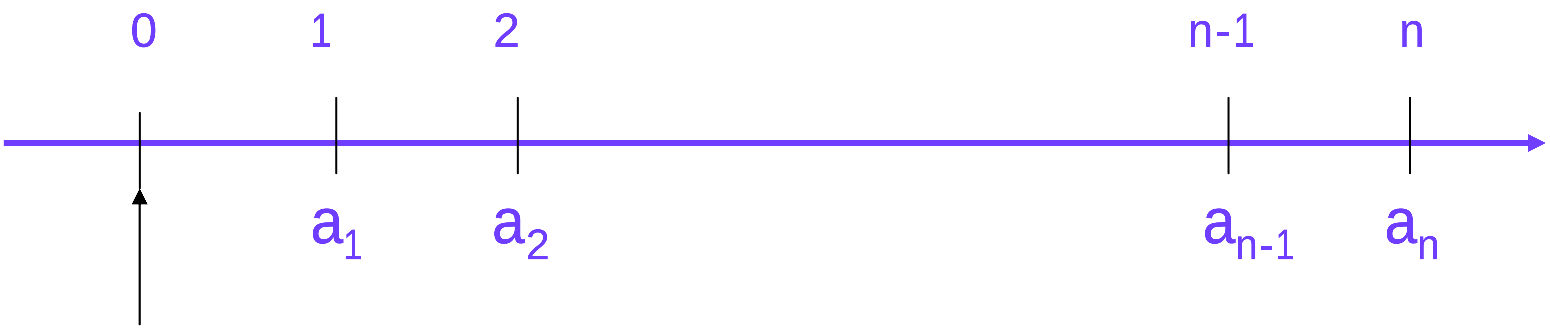
Donc, il doit y avoir versement de 6 annuités égales à 15 000 DH, la 7ème égale à 15 000 + (150 000-127 843,05)=37 156,95 DH.

Alternative 2 : On verse 8 annuités , toutes égales à 15 000 DH, sauf la 8ème qui doit être minorée; Cette minoration sera très inférieure à 15 000 DH dans la mesure où le n théorique est très proche de 8 : c'est la solution qui doit être retenue.

$$V_8 = 15000 \times \frac{1{,}065^8 - 1}{0{,}065} = \quad 151\ 152{,}85\ \text{DH}$$

Donc, il doit y avoir versement de 7 annuités égales à 15 000 DH, la 8ème égale à 15 000 - (151 152,85-150 000)=13 847,15 DH.

II.3)b) Valeur actuelle d'une suite d'annuités



Valeur actuelle V_0 : évaluation de la suite d'annuités à une période avant le versement de la 1ère annuité.

$$V_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

$$\boxed{(15) \quad V_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k}}$$

La comparaison des formules (13) et (15) montre que

$$V_n = V_0 \, (1+i)^n \qquad (16)$$

La formule (16) est financièrement triviale: la valeur acquise et la valeur actuelle représentent l'évaluation d'un même capital, celui constitué par la suite d'annuités; Une évaluation est faite à la date n, et l'autre à la date 0.

Cas particulier des annuités constantes: pour tout k, $a_k = a$

$$V_0 = a\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+i)^k} = \frac{a}{1+i}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-\frac{1}{(1+i)}}$$

$$= a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

$$\boxed{(17) \qquad V_0 = a\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

II.4) Emprunt indivis

Il y a indivision du capital emprunté.

Paramètres:

- Montant du capital prêté : K
- Taux d'intérêt : i
- Le remboursement est assuré par une suite de n (n entier > 1) annuités: a_1, a_2,…,a_n.

II.4)a) Tableau d'amortissement

Période	Dette de début de période	Intérêts de la période	Amortissement de la période	Annuité versée en fin de période
1	$D_0=K$	$iD_0=iK$	M_1	$a_1=M_1+iD_0$
2	$D_1=D_0-M_1$	iD_1	M_2	$a_2=M_2+iD_1$
3	$D_2=D_1-M_2$	iD_2	M_3	$a_3=M_3+iD_2$
. . .				
p	$D_{p-1}=D_{p-2}-M_{p-1}$	iD_{p-1}	M_p	$a_p=M_p+iD_{p-1}$
. . .				
n-1	$D_{n-2}=D_{n-3}-M_{n-2}$	iD_{n-2}	M_{n-1}	$a_{n-1}=M_{n-1}+iD_{n-2}$
n	$D_{n-1}=D_{n-2}-M_{n-1}$	iD_{n-1}	$M_n = D_{n-1}$	$a_n=M_n+iD_{n-1}$

La somme de tous les amortissements est égale à la dette initiale $K=D_0$.

$$(18) \qquad \sum_{k=1}^{n} M_k = D_0 = K$$

L'amortissement M_n contenu dans la dernière échéance a_n met fin à la dette, donc

$$(19) \qquad M_n = D_{n-1}$$

D'après la structure du tableau d'amortissement, il est facile de voir que

$$(\forall p = 1 \text{ à } n-1) \qquad (20) \qquad a_{p+1} - a_p = M_{p+1} - (1+i)M_p$$

La formule (20) donne la différence entre deux annuités consécutives en fonction des amortissements et du taux d'intérêt : elle est égale à la différence entre les amortissements contenus dans ces annuités sous réserve de capitaliser au taux d'intérêt l'amortissement de la période inférieure.

On peut facilement déduire des formules (18), (19) & (20) que

$$\boxed{(21) \quad K = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^k}}$$

Le montant du capital emprunté est égal à la valeur actuelle des annuités, évaluée au taux d'intérêt de l'emprunt.

(21) est équivalente après multiplication par $(1+i)^n$ à

$$\boxed{(22) \quad K\,(1+i)^n = \sum_{k=1}^{n} a_k (1+i)^{n-k}}$$

La valeur acquise, à la date du dernier règlement, par le capital prêté, est égale à la valeur acquise par les annuités , à condition d'évaluer tous les flux au taux d'intérêt de l'emprunt.

La formule (22) se généralise : on peut donner l'expression, de la dette D_p de l'emprunteur après paiement de la $p^{\text{ième}}$ annuité, en fonction du taux d'intérêt i, du capital emprunté, et des annuités.

$$(23) \qquad D_p = K(1+i)^p - \sum_{k=1}^{p} a_k (1+i)^{p-k}$$

La dette encore vivante après le paiement da $p^{\text{ième}}$ annuité est égale à la différence entre:

- la valeur acquise à cette date, par la somme prêtée,
- et la valeur acquise, à cette même date, par les p annuités déjà versées.

D'après le principe de la formule (21), la dette D_p après paiement de la $p^{ième}$ annuité, est égale à la valeur actuelle, exprimée à la même date, des annuités restantes à payer.

$$D_p = \sum_{k=p+1}^{n} \frac{a_k}{(1+i)^{k-p}} \tag{24}$$

II.4)b) Amortissement d'un emprunt par annuité constante

pour tout k, a_k = a d'où d'après (21)

$$K = a \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

Ou encore

$$\boxed{(25) \qquad a = \frac{iK}{1 - (1 + i)^{-n}}}$$

(20) donne dans le cas d'annuités constantes:

$$\boxed{(\forall p = 1\,à\; n-1) \quad 0 = M_{p+1} - (1+i)M_p}$$

Autrement dit, les annuités sont en progression géométrique de raison 1+i. Donc on peut écrire :

$$\boxed{(\forall p = 1\,à\; n) \qquad (26) \qquad M_p = (1+i)^{p-1} M_1}$$

Le premier amortissement M_1 peut être calculé en écrivant que

$$a = \frac{iK}{1-(1+i)^{-n}} = iK + M_1$$

$$\Rightarrow \quad (27) \qquad M_1 = \frac{iK}{(1+i)^n - 1}$$

On peut retrouver (27) en écrivant

$$K = \sum_{k=1}^{n} M_k = M_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

La dette amortie après le paiement de la p^{ième} annuité est

$$\sum_{k=1}^{p} M_k = M_1 \frac{(1+i)^p - 1}{i} = \frac{iK}{(1+i)^n - 1} \frac{(1+i)^p - 1}{i}$$

$$= K \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

Donc, le capital restant dû, après paiement de la p^{ième} annuité est

$$D_p = K - \sum_{k=1}^{p} M_k = K - K \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}$$

$$= K \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

$$(28) \quad D_p = K \frac{(1+i)^n - (1+i)^p}{(1+i)^n - 1}$$

II.4)c) Amortissement constant d'un emprunt

pour tout k, M_k = M d'où (29) $M = \dfrac{K}{n}$

D'après (20)

$$(\forall p = 1 \text{ à } n-1) \quad a_{p+1} - a_p = M - (1+i)M = -iM = -i\,K/n$$

soit (30) $a_{p+1} = a_p - i\,K/n$

Les annuités sont en progression arithmétique de raison –iK/n.