LES ANNNITES

1. DEFINITION ET CARACTERISTIQUES

On appelle annuités une suite de flux monétaires perçus ou réglés à intervalles de temps égaux.
Le terme « annuité » est habituellement réservé à des périodicités annuelles. Lorsque la période est différente de l'année, il est préférable de remplacer le terme « annuité » par « semestrialité », « trimestrialité » ou « mensualité ».
L'étude des annuités consiste à déterminer la valeur actuelle ou la valeur acquise, à une date donnée, d'une suite de flux. Elle prend en considération la date du premier flux, la périodicité des flux, le nombre des flux et le montant de chaque flux.
Lorsque les annuités sont égales, on parle d'annuités constantes, alors que lorsque leur montant varie d'une période à une autre, on parle d'annuités variables.
Les annuités peuvent être perçues ou versées en début de période ou en fin de période.
Les annuités peuvent être certaines lorsque leur nombre est connu à l'avance, aléatoires ou viagères, lorsque leur nombre est inconnu au moment du contrat ou enfin perpétuelles lorsque leur nombre est illimité.

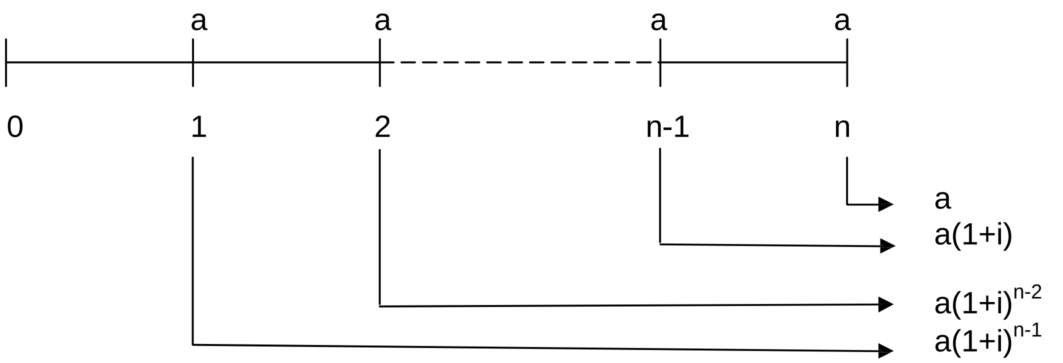
2. LES ANNUITES CONSTANTES

La valeur acquise ou la valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes dépend de la date de versement c'est à dire début de période ou fin de période.

2.1. Les annuites constantes de fin de periode

2.1.1. La valeur acquise

On appelle valeur acquise par une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités (V_n) exprimée immédiatement après le versement de la dernière annuité.



Vn = Σ

Si on note par:

- V_n : la valeur acquise par la suite des annuités
- a : l'annuité constante de fin de période
- n : le nombre de périodes (d'annuités)
- i : le taux d'intérêt par période de capitalisation

On a alors:

$$V_n = a + a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$$

Il s'agit d'une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

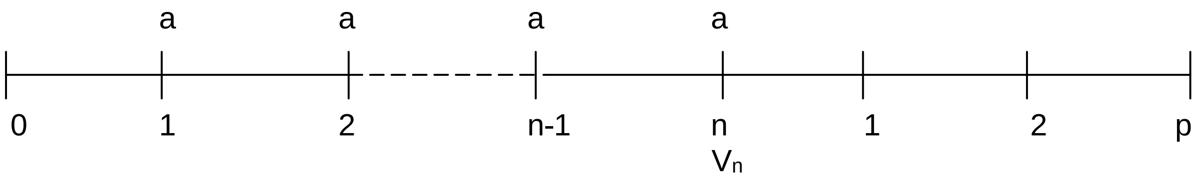
$$V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{}$$

$(1+i)-1$

$$\boxed{V_n = a\,\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Le terme $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ est fourni par la table financière N°3

2.1.2. La valeur acquise exprimee p periodes apres le dernier versement



Soit V_n^p la valeur acquise de la suite des annuités constantes de fin de période exprimée p périodes après le dernier versement.

$$V_n^p = V_n (1+i)^p$$

$$V_n^p = a \frac{(1+i)^n - 1}{i} (1+i)^p$$

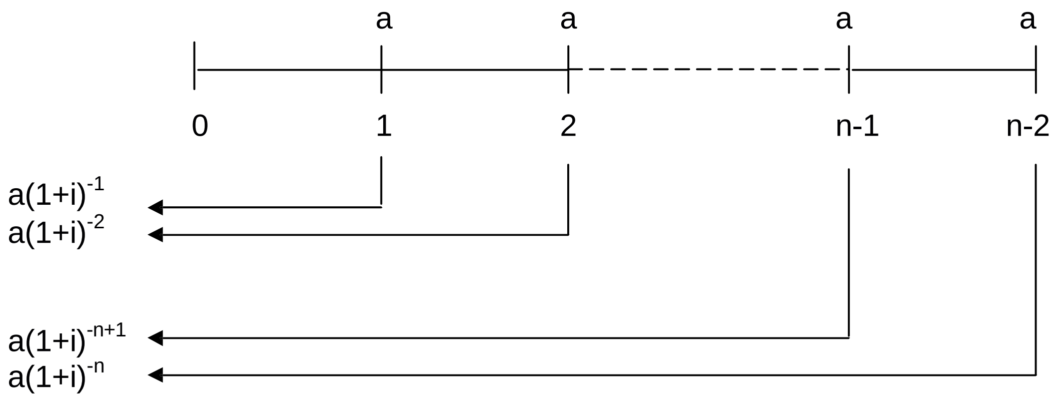
On peut donc écrire :

$$V_n^p = a \frac{(1+i)^{n+p} - (1+i)^p}{i}$$

$$\boxed{V_n^p = a \left[\frac{(1+i)^{n+p} - 1}{i} - \frac{(1+i)^p - 1}{i} \right]}$$

2.1.3. La valeur actuelle

On appelle valeur actuelle d'une suite d'annuités constantes de fin de période, la somme des annuités actualisées (V_0) exprimée à la date origine.



$V_0 = \Sigma$

Si on note par:

- V_0 = la valeur actuelle par la suite des annuités
- a = l'annuité constante de fin de période
- n = le nombre de périodes (d'annuités)
- i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$V_0 = a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots.. + a(1+i)^{-n+1} + a(1+i)^{-n}$$
$$V_0 = a\,[\,(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots.. + (1+i)^{-n+1} + (1+i)^{-n}\,]$$
$$V_0 = a\,(1+i)^{-1}\,[\,1 + (1+i)^{-1} + \ldots.. + (1+i)^{-n+2} + (1+i)^{-n+1}\,]$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = $(1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

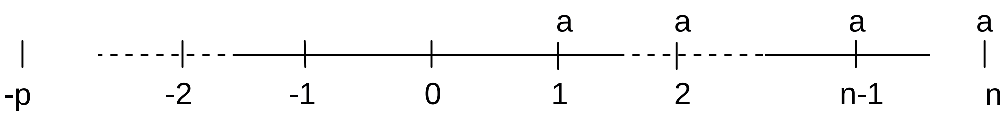
$$V_0 = a(1+i)^{-1} \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1+i-1}$$

$$\boxed{V_0 = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Le terme $\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ est fourni par la table financière N°4

2.1.4. La valeur actuelle exprimee p periode avant la date d'origine



$$V_0^p = a\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\,(1+i)^{-p}$$

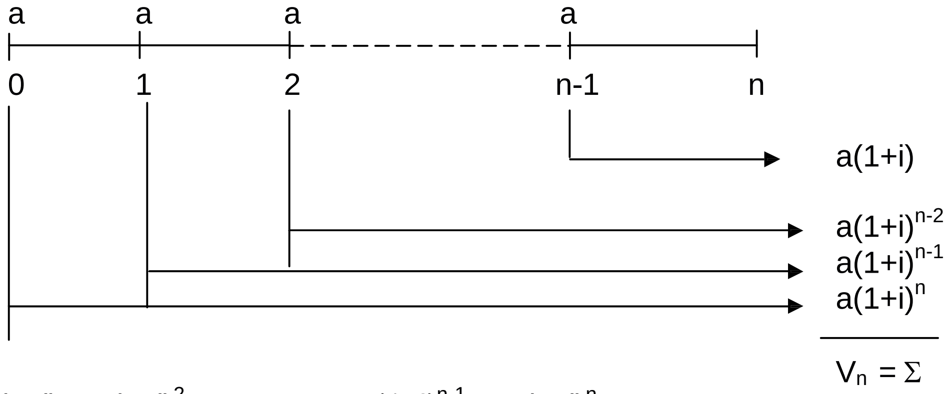
$$V_0^p = a\,\frac{(1+i)^{-p}-(1+i)^{-n-p}}{i}$$

$$\boxed{V_0^p = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n-p}}{i}-\frac{1-(1+i)^{-p}}{i}\right]}$$

2.2. Les annuites constantes de debut de periode

2.2.1. La valeur acquise

Si on considère que les flux sont versés en début de période, on obtient le graphique suivant:



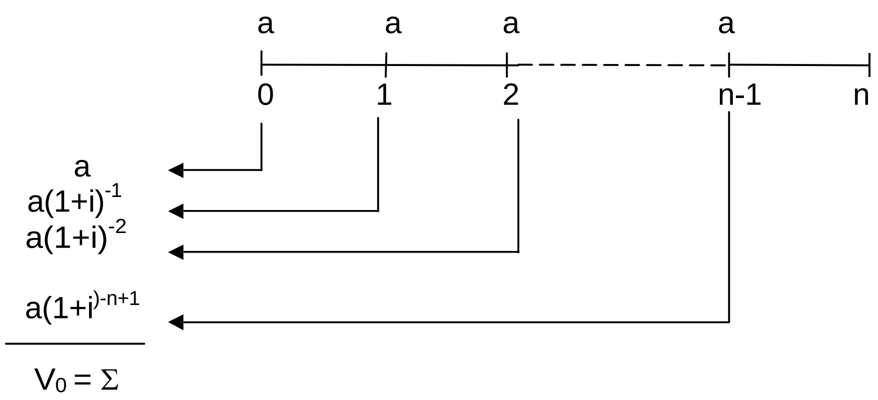
$V_n = a(1+i) + a(1+i)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + a(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$

$V_n = a(1+i)\,[\,1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}\,]$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique q = (1+i) et comprenant n termes. La formule devient donc:

$$V_n = a(1+i)\,\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)-1}$$

2.2.3. La valeur actuelle



$$V_0 = a + a(1+i)^{-1} + a(1+i)^{-2} + \ldots + a(1+i)^{-n+1}$$

$$V_0 = a\,[\,1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-n+1}]$$

On a donc une suite géométrique de premier terme 1, de raison géométrique $q = (1+i)^{-1}$ et comprenant n termes. La formule devient :

$$V_0 = \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$V_0 = \frac{(1+i)}{(1+i)}\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}}$$

$$\boxed{V_0 = a\,(1+i)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

2.2.4. La valeur actuelle exprimee p periode avant la date d'origine

$$V_0^p = \;_0 \qquad)^{-p}$$

$$V_0^p = (\quad)\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}(1+i)^{-p}$$

$$V_0^p = \frac{(1+i)^{1-p} - (1+i)^{1-n-p}}{i}$$

$$\boxed{V_0^p = a\left[\frac{1-(1+i)^{1-n-p}}{i} - \frac{1-(1+i)^{1-p}}{i}\right]}$$

3. LES ANNUITES VARIABLES

3.1. Les annuites quelconques

3.1.1. Les annuites quelconques de fin de periode

3.1.1.1. La valeur acquise

Si on note par:

V_n = la valeur acquise par la suite des annuités.
a_p = l'annuité à la date p.
n = le nombre de périodes (d'annuités)
i = le taux d'intérêt par période de capitalisation

Alors:

$$V_n = a_n + a_{n-1}(1+i) + \dots\dots + a_2(1+i)^{n-2} + a_1(1+i)^{n-1}$$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{n-p}}$$

3.1.1.2. La valeur actuelle

$$V_0 = a_1(1+i)^{-1} + a_2(1+i)^{-2} + \dots\dots + a_{n-1}(1+i)^{-n+1} + a_n(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{-p}}$$

3.1.2. Les annuites quelconques de debut de periode

3.1.2.1. La valeur acquise

$$V_n = a_n (1+i) + a_{n-1}(1+i)^2 + \dots\dots + a_2 (1+i)^{n-1} + a_1 (1+i)^n$$

$$\boxed{V_n = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{n-p+1}}$$

3.1.2.2. La valeur actuelle

$$V_0 = a_1 + a_2(1+i)^{-1} + \dots\dots + a_{n-1}(1+i)^{-n+2} + a_n(1+i)^{-n+1}$$

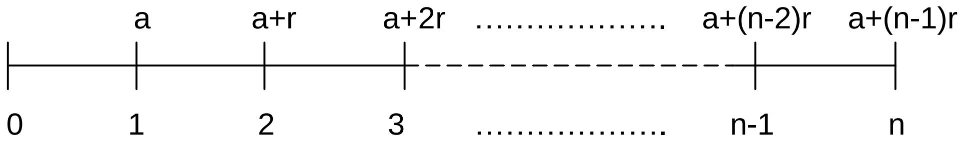
$$\boxed{V_0 = \sum_{p=1}^{n} a_p (1+i)^{-p+1}}$$

3.2. Les annuites en progression arithmetique

3.2.1. Les annuites de fin de periode en progression arithmetique

3.2.1.1. La valeur acquise

Soit une progression arithmétique d'annuités de raison r représentée par le graphique suivant:



$$V_n = (a+(n-1)r) + (a+(n-2)r)(1+i) + \dots\dots + (a+2r)(1+i)^{n-3} + (a+r)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

Ou encore,

$$V_n = [a + a(1+i) + \dots + a(1+i)^{n-3} + a(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}]$$

$$= a \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

$$+ [(n-1)r + (n-2)r(1+i) + \dots + 2r(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}]$$

S

Calculons S

$$S = (n-1)r + (n-2)r(1+i) + \dots\dots + 2r(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}$$

Calculons S(1+i)

$$S(1+i) = (n-1)r(1+i) + (n-2)r(1+i)^2 + \dots\dots + 2r(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-1}$$

Calculons S(1+i)-S

$$S(1+i) - S = \left[(n-1)r(1+i) + (n-2)r(1+i)^2 + \dots\dots + 2r(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-1}\right]$$
$$-\left[(n-1)r + (n-2)r(1+i) + \dots\dots + 2r(1+i)^{n-3} + r(1+i)^{n-2}\right]$$

$$S(1+i) - S = r(1+i)^{n-1} + r(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-3} + \dots\dots + r(1+i)^2 + r(1+i) - (n-1)r$$

$$= r(1+i)^{n-1} + r(1+i)^{n-2} + r(1+i)^{n-3} + \dots\dots + r(1+i)^2 + r(1+i) + r - nr$$

$$[(\ )\ (\ )\ = r(1+i)^{n-1} + (\ )\ (\ )]$$

$$= \frac{(1+i)^n - 1}{}$$

D 'où, $S(1+i) - S = r\frac{(1+i)^n - 1}{i} - nr$

Ou encore, $Si = r\frac{(1+i)^n - 1}{i} - nr$

Donc, $S = \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$

Or, $V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + S.$ On remplace S par son expression. On obtient:

$$V_n = a\frac{(1+i)^n - 1}{i} + \frac{r}{i}\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

Donc, $$\boxed{V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}}$$

<u>Exemple</u>:
Calculer la valeur acquise d'une suite d'annuités de fin de période, en progression arithmétique dont les caractéristiques sont les suivantes:
a = 1 000TND
n = 5ans
i = 5%
r = 100TND

<u>Solution</u>:

On a $$V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}$$

D'où, $$V_5 = \left(1000 + \frac{100}{0,05}\right)\frac{(1,05)^5 - 1}{0,05} - \frac{5 \times 100}{0,05}$$

V_5 = 3000 (5,5256312) - 10 000 = 16 576,8936 - 10 000
V_5 = 6 576,894 TND

3.2.1.2. <u>La valeur actuelle</u>

On sait que : $V_n = V_0(1+i)^n$ Donc: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

$$V_0 = (1+i)^{-n}\left[\left(a + \frac{r}{i}\right)\frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i}\right]$$

$$V_0 = \left(a + \frac{r}{i}\right)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{nr}{i}(1+i)^{-n}$$

$$\boxed{V_0 = \left(a + \frac{r}{i} + nr\right)\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{nr}{i}}$$

3.2.2. Les annuites de debut de periode en progression arithmetique

3.2.2.1. La valeur acquise

$$V_n = (a+(n-1)r)(1+i) + (a+(n-2)r)(1+i)^2 + ... + (a+2r)(1+i)^{n-2} + (a+r)(1+i)^{n-1} + a(1+i)^n$$

$$V_n = (1+i) \times \left[(a+(n-1)r) + (a+(n-2)r)(1+i) + ... + (a+2r)(1+i)^{n-3} + (a+r)(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}\right]$$

$$= \left(a + \frac{r}{i}\right)\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] - \frac{nr}{i}$$

$$\boxed{V_n = \left(a + \frac{r}{i}\right) \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr}{i} \times (1+i)}$$

3.2.2.2. La valeur actuelle

On sait que: $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$ <=> $V_0 = \left[\left(a + \frac{r}{i}\right) \times (1+i) \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} - \frac{nr(1+i)}{i}\right] \times (1+i)^{-n}$

$$\boxed{V_0 = \left(a + \frac{r}{i}\right) \times (1+i) \times \left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right] - \frac{nr}{i} \times (1+i)^{-n+1}}$$

3.3. Les annuites en progression geometrique

3.3.1. Les annuites de fin de periode en progression geometrique

3.3.1.1. La valeur acquise

Soit une progression géométrique d'annuités de fin de période de raison q représentée par le graphique suivant:

0	1	2	3	4	-----------	n-2	n-1	n
	a	aq	aq²	aq3		aqn-3	aqn-2	aqn-1

$$V_n = aq^{n-1} + aq^{n-2}(1+i) + ... + aq^2(1+i)^{n-3} + aq(1+i)^{n-2} + a(1+i)^{n-1}$$

$$V_n = a\underbrace{\left[(1+i)^{n-1} + q(1+i)^{n-2} + q^2(1+i)^{n-3} + ... + q^{n-2}(1+i) + q^{n-1}\right]}$$

Suite géométrique de 1er terme $(1+i)^{n-1}$, de raison $q \times (1+i)^{-1} = \frac{q}{1+i}$

et comprenant n termes

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1} \frac{\left(\frac{q}{1+i}\right)^n - 1}{\frac{q}{1+i} - 1}\right] \Leftrightarrow V_n = a\left[(1+i)^{n-1} \frac{\frac{q^n - (1+i)^n}{(1+i)^n}}{\frac{q-(1+i)}{1+i}}\right]$$

$$V_n = a\left[(1+i)^{n-1} \frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)} \times \frac{1+i}{(1+i)^n}\right]$$

$$V_n = a\left[\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)} \times \frac{(1+i)^n}{(1+i)^n}\right]$$

$$\boxed{V_n = a\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]}$$

3.3.1.2. La valeur actuelle

On sait que : $V_0 = V_n(1+i)^{-n}$

alors
$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]}$$

3.3.2. Les annuites de debut de periode en progression geometrique

3.3.2.1. La valeur acquise

$$\boxed{V_n = a(1+i)\left[\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}\right]}$$

3.3.2.2. La valeur actuelle

$$V_0 = \frac{a}{(1+i)^n} \times \left(\right) \frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}$$

$$\boxed{V_0 = \frac{a}{(1+i)^{n-1}} \times \frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}}$$

EXERCICES ET PROBLEMES

Exercice 1

Un particulier doit 10000 dinars, 20000 dinars et 30000 dinars respectivement dans un, deux et trois ans. Il désire se libérer de sa dette en deux versements égaux dans quatre et cinq ans. En supposant un taux de 7%, calculer le montant des versements à effectuer.

Exercice 2

Pour acheter à crédit un appareil électroménager coûtant 499,155 dinars, on peut s'adresser à deux magasins. Le premier propose le mode de paiement suivant : une suite de 12 mensualités de 44,810 dinars chacune. Le second propose un règlement unique de 579 dinars à la fin de la première année.

1) Déterminer les taux d'intérêt pratiqués par les deux magasins.
2) Quel magasin propose le meilleur mode de paiement ?

Exercice 3

Un couple désire investir. Le mari dépose 250 dinars par mois pendant 3 ans à un taux d'intérêt annuel de 8,5% capitalisé mensuellement et son épouse, 900 dinars par semestre pendant la même durée à un taux annuel de 10% capitalisé semestriellement.

1) Lequel des deux placements est plus avantageux que l'autre ?
2) Lequel des deux placements aura accumulé le plus de capital ?
3) Calculer le capital accumulé par le couple.

Exercice 4

Un employé bénéficiant d'une part d'héritage de 100000 dinars reçoit immédiatement 10000 dinars et une suite de semestrialités de 5000 dinars. Si la banque où cet héritage est déposé lui verse un intérêt capitalisé semestriellement au taux annuel de 1,0025%, on vous demande de déterminer :

1) Le nombre d'années durant lesquels cet employé reçoit des versements de 5000 dinars.
2) Le montant X du versement additionnel ajouté au dernier versement de 5000 dinars lui permettant de recevoir la totalité de sa part d'héritage.
3) Le montant Y du versement effectué six mois après le dernier versement de 5 000 dinars lui permettant de recevoir la totalité de sa part d'héritage.

Exercice 5

Le 01/09/03, une personne décide de verser à un organisme de capitalisation, à des intervalles réguliers égaux à une année, des sommes constantes de montant 1000 dinars chacune au taux d'intérêt annuel de 10%. Le premier versement aura lieu dans une année. La date prévue pour le dernier versement est le 01/09/2019. On vous demande de calculer le montant du capital constitué :

1) A la date du dernier versement.
2) A la date du premier versement.
3) Au 01/09/2023, si cette personne ne retire pas son capital au 01/09/2019.
4) Au 01/09/2023, si cette personne opte pour une date du dernier versement plus éloignée qui devient le 01/09/2023 au lieu du 01/09/2019.

Exercice 6
Afin de disposer d'un capital lui permettant de financer les études supérieures de son fils, monsieur Z décide de déposer tous les trois mois 90,123 dinars, dans un compte bancaire où le taux d'intérêt est capitalisé trimestriellement. Le premier dépôt est effectué à la naissance de l'enfant et le dernier dépôt quand il est âgé de 18 ans.
Déterminer le taux d'intérêt annuel sachant que le banquier informe monsieur Z que le montant du capital constitué lorsque son fils aura 18 ans s'élèvera à 10000 dinars.

Exercice 7
Le directeur de la société Alpina décide de mettre à la disposition de son représentant commercial une voiture de service. A cet effet, il s'est trouvé devant deux éventualités possibles, acheter la voiture ou la louer auprès d'une agence de la place.

Les conditions de la location:

Un loyer de 300 dinars payé au début de chaque mois pendant 36 mois à la suite desquels on rend la voiture sans frais additionnels.

Les conditions d'achat:

Le prix d'achat de la même voiture est de 9500 dinars toutes taxes comprises. L'entreprise compte financer cet achat par un emprunt bancaire au taux annuel de 12 % capitalisé mensuellement. Le remboursement de l'emprunt se fera par 36 mensualités égales de début de période. Au bout du 36^e mois, la valeur de revente de la voiture est évaluée à 3 000 dinars.

1) Calculer la mensualité à payer à la banque prêteuse.
2) Quelle option suggérez-vous à ce directeur ?
3) Que devrait être la valeur de revente de la voiture pour que les deux options (achat ou location) s'équivalent ?

Exercice 8
Le 01 mai de chaque année, une personne verse 20000 dinars capitalisés à 7%. Après avoir effectué 10 versements, elle laisse la somme acquise en banque, pendant 5 ans, au taux de 8%. Au bout des 5 années, elle procède, le premier mai de chaque année, à 10 retraits de 20000 dinars chacun (taux d'intérêt annuel = 7%).

1) Calculer le solde disponible immédiatement après le dernier retrait.
2) Quelle somme constante aurait-il fallu placer pour que ce solde soit nul ?

Exercice 9
Monsieur Taktouk décide aujourd'hui de se constituer une épargne lui permettant d'assurer les dépenses relatives aux études supérieures de son fils ainsi que sa propre pension de retraite.
Son fils Falfoul, âgé aujourd'hui de 10 ans, aura besoin de 4000 dinars par an, pour assurer ses études supérieures qui débuteront dans 8 ans et dureront 4 ans.
Concernant sa retraite, Taktouk, âgé aujourd'hui de 40 ans, désire bénéficier dans 20 ans d'une pension annuelle égale à 25 000 dinars. Monsieur Taktouk estime sa durée de vie à 80 ans (durée de vie moyenne des hommes en Tunisie).
En supposant que le taux d'intérêt est égal à 10%, calculer la somme que Taktouk doit épargner annuellement (un premier montant constant durant les 8 premières années et un deuxième montant constant durant les 12 années restantes) pour assurer l'éducation de son fils et sa pension de retraite.

Exercice 10

Le 01/01/N, une personne prévoit son budget pour les deux années à venir. Elle prélèvera sur ses revenus perçus en fin de chaque mois : d'une part 160 dinars par mois pour régler son loyer ; d'autre part 400 dinars d'épargne mensuelle pendant 3 mois, 600 dinars par mois les 6 mois suivants et 750 dinars mensuellement durant la dernière période. Elle pourrait placer ses capitaux au taux d'intérêt annuel de 19,56%.
On vous demande de calculer la valeur du loyer global et de l'épargne totale :

1) A la date du dernier versement.
2) A la date du premier versement.
3) Trois ans après le dernier versement.

Exercice 11

Une personne effectue 10 versements de 10000 dinars chacun, tous les deux ans au taux d'intérêt annuel de 8,5%.
On vous demande de calculer la valeur du placement global :

1) A la date du dernier versement.
2) Au moment du premier versement.
3) Deux ans après le denier versement

Exercice 12

Un individu de 38 ans pense à se constituer une retraite personnelle par capitalisation. La phase d'épargne sera constituée par 22 règlements constants, le premier intervenant à la signature du contrat.
La phase de retraite est constituée par des versements annuels qui débuteront lorsque l'individu aura 60 ans. Le contrat prévoit 25 versements, le premier versement est de 15 000 dinars la première année, avec un taux de revalorisation de 2% par an. Le taux d'intérêt annuel est de 5% aussi bien pendant la phase d'épargne que pendant la phase de retraite.
Calculer le montant d'épargne nécessaire.

Réponses :

Exercice 1 : Montant = 34 761,266 dinars.

Exercice 2 : 1) $i_a(1) = 14{,}98\%$; $i_a(2) = 16\%$.
2) Magasin 1.

Exercice 3 : 1) Le placement effectué par l'épouse.
2) Le capital accumulé par le mari.
3) C = 16 261,644 dinars.

Exercice 4 : 1) 9 ans.
2) X = 4 524,655 dinars.
3) Y = 4 547,288 dinars.

Exercice 5 : 1) V_{2019} = 35 949,730 dinars.
2) V_{2004} = 8 606,079 dinars.

3) V_{2023} = 52 634 dinars.
4) V_{2023} = 57 275 dinars.

Exercice 6 : i = 4 ,418%.

Exercice 7 : 1) 309,877 dinars.
2) Achat.
3) 425,399 dinars.

Exercice 8 : 1) 470 118,386 dinars.
2) 7 403,843 dinars.

Exercice 9 : 1^{er} montant = 5 307, 316 dinars ; 2^{e} montant = 4 087,699 dinars.

Exercice 10 : 1) V (abonnement) = 4 581,363 ; V (épargne) = 18 849,833 dinars.
2) V (abonnement) = 3 252,938 ; V (épargne) = 13 384,081 dinars.
3) V (abonnement) = 7 829,832 ; V (épargne) = 32 215,526 dinars.

Exercice 11 : 1) V_{18}= 232 024,044 dinars.
2) V_0= 53 431,542 dinars.
3) V_{20}= 273 144,505 dinars.

Exercice 12 : 6 694,217 dinars.

EXTRAITS DES SUJETS D'EXAMENS

EXAMEN GESTION FINANCIERE SESSION PRINCIPALE 2003/2004

Exercice

Monsieur A désire financer l'achat d'un logement par un prêt auprès de la Banque de l'Habitat au taux de 6,625% sur une durée de vingt ans. Le prêt sera remboursé en mensualités constantes terme échu. En supposant que l'emprunteur a une capacité de remboursement de 105 dinars par mois et que grâce à une épargne qu'il a constitué il peut payer au comptant 4300,950 dinars, quel est le prix du logement qui sera acquis par monsieur A ?

Réponse : 18 460 dinars.

TEST DE CONTROLE CONTINU GESTION FINANCIERE 2003/2004

Exercice

Vous aimeriez avoir 1000000 TND dans 30 ans, au moment de prendre votre retraite.

1/ Si on suppose que vous avez aujourd'hui 10000 TND, quel rendement (taux d'intérêt) vous faudrait-il pour atteindre votre but.

2/ Quel montant doit-on placer aujourd'hui, si le taux de rendement serait de 13%.

3/ Avant combien d'années auriez-vous du commencer le placement des 10000 TND au taux de 13% pour obtenir à l'échéance 1000000 TND.

4/ Si on suppose que vous avez aujourd'hui 10000 TND, que vous placez au taux de rendement i qui augmente tous les cinq ans de 1%. Calculez i qui au bout d'une durée de placement de 30 ans vous permet d'avoir 1000000 TND.

Réponse : 1/ $i = 16,6$ %

2/ $V_0 = 25565,053$

3/ $n = 37$ ans + 8 mois + 5 jours

4/ $i = 13,59\%$

TROISIEME CHAPITRE

LES EMPRUNTS INDIJIIS
ET LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

1. LES EMPRUNTS INDIVIS

1.1. Definition

Un emprunt indivis est un emprunt ordinaire faisant l'objet d'un contrat entre un prêteur et un emprunteur. Il n'y a qu'un seul prêteur, il est donc indivisible, d'où le qualificatif indivis.
Le remboursement de cet emprunt s'effectue généralement, par annuités de fin de période. Chaque annuité est composée de deux éléments:

- Un remboursement d'une partie du capital emprunté, appelé l'amortissement.
- Une partie intérêt calculée sur la base du taux d'intérêt convenu entre les deux parties et du capital restant dû dépendant.

1.2. Remboursement d'un emprunt

Le remboursement d'un emprunt dépend du mode d'amortissement utilisé (in fine, par annuités constantes ou par amortissement constant). D'une façon générale le tableau d'amortissement se présente comme suit :

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \cdot i$	m_1	$a_1 = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \cdot i$	m_2	$a_2 = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \cdot i$	m_p	$a_p = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} \cdot i$	m_{n-1}	$a_{n-1} = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} \cdot i$	m_n	$a_n = I_n + m_n$

Avec:
C_0 : capital restant dû au début de la première année soit le montant de l'emprunt.
I_p : intérêt de la $p^{ème}$ période.
m_p : amortissement de la $p^{ème}$ période.
a_p : annuité de la $p^{ème}$ période.
C_{p-1}: capital restant dû au début de la $p^{ème}$ période.

Les amortissements servent à rembourser la dette donc leur somme est égale au capital emprunté:

$$\boxed{\sum_{p=1}^{n} m_p = C_0}$$

Après le paiement du $n^{ème}$ amortissement m_n, le capital restant dû est égal à zéro donc la dette non remboursée avant le paiement de m_n est égale à m_n c'est à dire $C_{n-1} = m_n$

<u>Relation entre deux annuités successives :</u>

$$a_p = m_p + I_p = m_p + C_{p-1} \times i$$

$$a_{p+1} = m_{p+1} + I_{p+1} = m_{p+1} + C_p \times i$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p + C_p \times i - C_{p-1} \times i$$

$$a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p\,(1+i)$$

1.2.1 Remboursement in fine

Le remboursement du capital d'un emprunt s'effectue en une seule fois, à la fin du contrat. Le montant de l'intérêt (I) versé à chaque échéance, prévue par le contrat, est égal au montant emprunté multiplié par le taux d'intérêt.

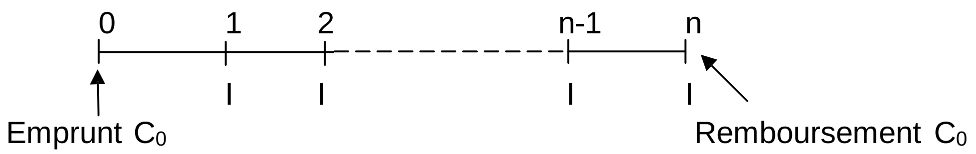


TABLEAU D'AMORTISSEMENT

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = I = C_0.i$	---	$a_1 = I_1 = I$
2	C_0	$I_2 = I = C_0.i$	---	$a_2 = I_2 = I$
p	C_0	$I_p = I = C_0.i$	---	$a_p = I_p = I$
n-1	C_0	$I_{n-1} = I = C_0.i$	---	$a_{n-1} = I_{n-1} = I$
n	C_0	$I_n = I = C_0.i$	C_0	$a_n = I_n + C_0 = I + C_0$

1.2.1 Remboursement par annuites constantes

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m_p	$a = I_p + m_p$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m_n	$a = I_n + m_n$

On a, $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = \ldots = a_n = a$

et, $a = m_n + I_n \Leftrightarrow a = m_n + C_{n-1}.i \Leftrightarrow a = m_n + m_n.i$

$\boxed{a = m_n (1+i)}$

1.2.1.1. Loi de succession des amortissements

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p(1+i)$
Et $a_{p+1} = a_p$

Alors $\boxed{m_{p+1}=m_p(1+i)}$

D'après la relation précédente, on aura:
$m_2 = m_1(1+i)$
$m_3 = m_2(1+i) = m1(1+i)^2$
$m_4 = m_3(1+i) = m1(1+i)^3$

$m_p = m_1 (1+i)^{p-1}$

On a : $m_n = m_1(1+i)^{n-1}$
Or, $a = m_n(1+i)$
D 'où, $a = m_1(1+i)^{n-1} (1+i) = m_1(1+i)^n$

Donc: $\boxed{a = m_1(1+i)^n}$

1.2.1.2. Relation entre C_O et le premier amortissement (m_1)

$$C_0 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + \ldots\ldots\ldots + m_n$$

$$C_0 = m_1 + m_1(1+i) + m_1(1+i)^2 + m_1(1+i)^3 + \ldots\ldots\ldots + m_1(1+i)^{n-1}$$

$$C_0 = m_1\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \ldots\ldots\ldots + (1+i)^{n-1}\right]$$

$$\boxed{C_0 = m_1\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]}$$

Et $$\boxed{m_1 = C_0\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right]}$$

1.2.1.3. Relation entre C_O et l'annuite constante (a)

La valeur actuelle des annuités = C_0

$$\boxed{C_0 = a\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right]}$$

Et, $$\boxed{a = C_0\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right]}$$

Exemple :

Le tableau d'amortissement d'un emprunt remboursable par annuités constantes indique que les intérêts payés l'avant dernière année s'élèvent à 12300 dinars et les intérêts payés la dernière année sont égaux à 6300 dinars. Enfin, la différence entre les intérêts de la 1ère année et ceux de la 2ème année s'élève à 4061,040 dinars.
Déterminer i, a, m_1 puis C_0.

Solution :

On a $I_{n-1} = 12300$ dinars $= C_{n-2} \cdot i = (m_{n-1} + m_n).i$
$I_n = 6300$ dinars $= C_{n-1} \cdot i = m_n.i$
$I_1 - I_2 = 4061{,}040$ dinars $= C_0 \cdot i - C_1 \cdot i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$
On sait que: $m_n = m_{n-1}.(1+i)$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ (m_{n-1}+m_n)\times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ \left[m_n.(1+i)^{-1} + m_n\right]\times i = 12\,300 \text{ dinars} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_n \times i = 6\,300\text{TND} \\ m_n\left[1+(1+i)^{-1}\right]\times i = 12\,300\text{TND} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{1+(1+i)^{-1}} = 12\,300$$

$$\Leftrightarrow 12\,300 = 6\,300\left[1+(1+i)^{-1}\right] \Leftrightarrow (1+i)^{-1} = \frac{12\,300}{6\,300} - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+i} = 0{,}952380952 \Leftrightarrow i = 0{,}05$$

i = 5%

$m_n .i = 6300$ <=> $m_n = 126\,000$ dinars

$a = m_n.(1+i) = 126000\,(1 + 0{,}05)$ <=> $a = 132300$ dinars

$I_1 - I_2 = 4061{,}040 = C_0 \cdot i - C_1 \cdot i = (C_0 - C_1).i = m_1.i$

$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{(I_1 - I_2)}{i} = \frac{4\,061{,}040}{0{,}05} =$$

$$a = m_1 + C_0 \times i \Leftrightarrow \frac{(a - m_1)}{i} = \frac{(132\,300 - 81\,220{,}800)}{0{,}05}$$

$C_0 = 1021584$ dinars

1.2.1.4. Expression de la dette amortie et non amortie apres le versement de la p^{eme} annuite

Après le paiement de la $p^{ème}$ annuité, la partie de l'emprunt qui a été remboursée s'élève à la somme des p premiers amortissements: R_p

$R_p = m_1 + m_2 + \ldots + m_p$

$$R_p = m_1\left[1 + (1+i) + (1+i)^2 + \ldots\ldots + (1+i)^{p-1}\right]$$

$$R_p = m_1\left[\frac{(1+i)^p - 1}{i}\right]. \text{ Or, } m_1 = C_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Alors, $$R_p = C_0 \frac{i}{(1+i)^n - 1}\left[\frac{(1+i)^p - 1}{i}\right]$$

Donc $$\boxed{R_p = C_0 \frac{(1+i)^p - 1}{(1+i)^n - 1}}$$

La dette non amortie est égale à $C_0 - R_p$

1.2.2. Remboursement d'un emprunt par amortissements constants

Soit: C_0: le montant de l'emprunt

n : le nombre d 'annuités

m : amortissement constant

$$\left.\begin{array}{l} m = \dfrac{C_0}{n} \\ I_p = C_{p-1} \times i \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{Donc, les annuités ne sont pas constantes}$$

Période	Capital restant dû début de période	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 . i$	m	$a_1 = I_1 + m$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 . i$	m	$a_2 = I_2 + m$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} . i$	m	$a_p = I_p + m$
n-1	$C_{n-2} = C_{n-3} - m_{n-2}$	$I_{n-1} = C_{n-2} . i$	m	$a_{n-1} = I_{n-1} + m$
n	$C_{n-1} = C_{n-2} - m_{n-1}$	$I_n = C_{n-1} . i$	m	$a_n = I_n + m$

1.2.2.1. Loi de succession des annuites

On a : $a_{p+1} - a_p = m_{p+1} - m_p\,(1+i)$

or $m_{p+1} = m_p = \frac{C_0}{n}$

donc

$$\boxed{a_{p+1} = a_p - \frac{C_0}{n} \times i}$$

=> On remarque que les annuités sont en progression arithmétique de raison $\left(-\frac{C}{n} \times i\right)$

Exemple :
Un emprunt indivis contracté au taux annuel i est remboursable par 5 annuités: a_1, a_2, a_3, a_4 , a_5 .
Les amortissements successifs m_1 ,m_2 ,m_3 ,m_4 et m_5 forment une progression géométrique de raison (1+k), k étant différent de i.
1) Sachant que:
- Les intérêts de la 2ème année $I_2 = 102102$ dinars
- Les intérêts de la 4ème année $I_4 = 55902$ dinars.
- le 2ème amortissement $m_2 = 440000$ dinars.

Calculer i
2) Déterminer le montant de l'emprunt et dresser le tableau d'amortissement.

Solution

On a $I_2 = 102102 = C_1 \;.\; i$
$I_4 = 55\,902 = C_3 \;.\; i$
$m_2 = 440\,000$

$I_2 = C_1 \;.\; i = (C_0 - m_1).i = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1).i$
$= (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i$

$I_4 = C_3 \;.\; i = [C_0 - (m_1 + m_2 + m_3)].i$
$= (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 - m_1 - m_2 - m_3).i = (m_4 + m_5).i$

D 'où, $I_2 = (m_2 + m_3 + m_4 + m_5).i = 102102$ (1)
$I_4 = (m_4 + m_5).i = 55902$ (2)

(1) - (2) => $(m_2 + m_3).i = 102102 - 55902 = 46200$ (3)

(2)/(3) => $$\frac{(m_4 + m_5) \times i}{(m_2 + m_3) \times i} = \frac{55902}{46200} = 1{,}21$$

$$\frac{m_4 + m_4(1+k)}{m_2 + m_2(1+k)} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4[1+(1+k)]}{m_2[1+(1+k)]} = 1{,}21 \Leftrightarrow \frac{m_4}{m_2} = 1{,}21$$

$$\text{Or, } m_4 = m_2(1+k)^2 \Rightarrow \frac{m_4}{m_2} = \frac{m_2(1+k)^2}{m_2} = 1{,}21 \Leftrightarrow (1+k)^2 = 1{,}21 = (1{,}1)^2$$

$\Rightarrow k = 10\%$

A partir de (3), on a:$(m_2 + m_3).i = 46\ 200$ <=> $i = \frac{46\ 200}{m_2 + m_3}$

$$\Leftrightarrow i = \frac{46\ 200}{440\ 000 + 440000(1{,}1)} = 0{,}05$$

Donc $i = 5\%$

2) $$C_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i = m_1 + m_1(1+k) + m_1(1+k)^2 + m_1(1+k)^3 + m_1(1+k)^4$$

$$\Leftrightarrow C_0 = m_1 \frac{(1+k)^5 - 1}{k} \text{ or } m_1 = \frac{m_2}{1+k} = \frac{440000}{1{,}10} = 400\ 000$$

$$\Leftrightarrow C_0 = 400\ 000 \frac{(1{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 2\ 442\ 040 \Leftrightarrow$$ $C_0 = 2442040$ dinars

Le tableau d'amortissement de cet emprunt se présente comme suit:

Période	Capital restant du	Amortissement	Annuité	Intérêt
1	2442040	400000	122102	522102
2	2042040	440000	102102	542102
3	1602040	484000	80102	564102
4	1118040	532400	55902	588302
5	585640	585640	29282	614929

2. LES EMPRUNTS OBLIGATAIRES

2.1. Definition

Lorsque le montant de l'emprunt est très élevé, l'emprunteur est obligé de s'adresser à plusieurs prêteurs appelés « obligataires » ou « souscripteurs ». En effet, le montant de l'emprunt est divisé en parts égales négociables appelées obligations.

En dehors de certains cas particuliers, l'obligation donne à son détenteur le droit de percevoir un intérêt annuel (coupon) et d'être remboursé de son titre à l'échéance.

Les principes mathématiques sont identiques à ceux des emprunts indivis sauf que le capital emprunté est remboursé à différents prêteurs. Donc, pour constituer un capital de nominal C_0, l'emprunteur émet N obligations égales d'un montant V_N. On aura:

$\boxed{C_0 = V_N * N}$.

2.2. Les principales caracteristiques d'une obligation

Les obligations sont caractérisées par les éléments suivants:

- *La valeur nominale (V_N)*: C'est la valeur faciale de l'obligation. Elle est unique pour toutes les obligations d'un même emprunt. Elle constitue le montant à partir duquel est établi le tableau d'amortissement et la base de calcul des intérêts.
- *La valeur d'émission (V_E)*: C'est la somme effectivement payée par l'obligataire pour l'achat d'une obligation. Ce prix peut être différent du nominal. Lorsqu'il est égal au nominal, on dit que l'obligation est émise « au pair », s'il en est inférieur, on dit que l'obligation est « au dessous du pair » alors que s'il en est supérieur, on dit que l'émission est « au dessus du pair ». La différence entre la valeur d'émission et la valeur nominale est appelée prime d'émission.
- *La valeur de remboursement (V_R)*: C'est la somme versée par l'emprunteur au moment du remboursement de l'obligation. Cette somme peut être égale à la valeur nominale, on parle dans ce cas d'un remboursement « au pair », ou supérieure à la valeur nominale et on parle alors d'un remboursement « au dessus du pair ». La différence entre la valeur de remboursement et la valeur d'émission est appelée prime de remboursement.

  Le mode de remboursement peut être:
  - En bloc ou in fine: tous les titres sont remboursés en une seule fois à l'échéance.
  - Par amortissement constant: un même nombre d'obligations tirées au sort est remboursé chaque année.
  - Par annuités sensiblement constantes: les obligations à amortir chaque année sont également tirées au sort. Les annuités ne sont pas strictement constantes parce que l'amortissement doit concerner un nombre entier d'obligations.
- *Le taux nominal (i)* : C'est la rémunération de l'obligation. On l'appelle aussi taux facial. Appliqué à la valeur nominale, il permet de calculer le montant des intérêts (coupon).
- *La date de souscription* : C'est la date de règlement de l'achat de l'obligation par le souscripteur.
- *La date de jouissance* : C'est la date à partir de laquelle les intérêts commencent à courir.
- *Le coupon (c)*: c'est le montant des intérêts servis à chaque échéance, pour chaque obligation. On a : $c = V_N * i$.

2.3. Remboursement d'un emprunt obligataire

Soit:

- N: nombre des obligations émises.
- V_E: prix d'émission de l'obligation.
- V_N: valeur nominale de l'obligation.
- V_R: valeur de remboursement de l'obligation.
- i : taux du coupon.
- c: coupon = $V_N * i$.
- $N_1, N_2 \ldots\ldots N_n$: nombre d'obligation restant en circulation après le $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage. ($N_n = 0$).
- $m_1, m_2 \ldots\ldots m_n$: nombre de titres amortis au $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage.
- $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$: montant de l'annuité relative au $1^{er}, 2^e, \ldots\ldots n^e$ tirage.

Période	Dette en début de période	Intérêts	Amortis.	Annuités	Nombre de titres en circulation
1	$C_0 = N * V_N$	$N * c$	$m_1 * V_R$	$a_1 = N*c+m_1*V_R$	$N_1 = N - m_1$
2	$C_1 = N_1 * V_N$	$N_1 * c$	$m_2 * V_R$	$a_2 = N_1*c+ m_2*V_R$	$N_2 = N_1 – m_2$
p	$C_{p-1} = N_{p-1} * V_N$	$N_{p-1} * c$	$m_p * V_R$	$a_p = N_{p-1}*c+ m_p*V_R$	$N_p = N_{p-1} – m_p$
n-1	$C_{n-2} = N_{n-2} * V_N$	$N_{n-2} * c$	$m_{n-1}*V_R$	$a_{n-1}= N_{n-2}*c+m_{n-1}*V_R$	$N_{n-1} = N_{n-2} – m_{n-1}$
n	$C_{n-1} = N_{n-1} * V_N$	$N_{n-1}*c$	$m_n * V_R$	$a_n = N_{n-1}*c+ m_n*V_R$	$N_n = N_{n-1} – m_n$

$N_n = N_{n-1} – m_n = 0$ � $N_{n-1} = m_n$
Or $a_n = N_{n-1} * c + m_n* V_R = m_n * c + m_n* V_R = m_n * (c + V_R)$
$a_n = m_n * (c + V_R)$

2.3.1. Relation entre les annuites et les amortissements

$a_{p+1}= N_p * c+ m_{p+1} * V_R \Leftrightarrow a_{p+1} = (N_{p-1} - m_p) * c+ m_{p+1} * V_R$
Et $a_p = N_{p-1} * c + m_p * V_R$

$a_{p+1} - a_p = (N_{p-1} - m_p) * C+ m_{p+1} * V_R - N_{p-1} * c – m_p * V_R$
$= m_{p+1} * V_R – m_p * c - m_p * V_R$
$= m_{p+1} * V_R - m_p * (c +V_R)$

D'où $a_{p+1} - a_p = m_{p+1}V_R - V_R m_p \left(\frac{c}{V_R} + 1\right)$

Posons, r: le taux d'intérêt, qui appliqué à la valeur de remboursement, nous donne le coupon: $r = \frac{c}{V_R}$

On aura alors, $\boxed{a_{p+1} - a_n = m_{p+1} * V_R - V_R * m_n * (r+1)}$

2.4. Remboursement d'un emprunt obligataire par annuites constantes

2.4.1. Loi de succession des amortissements

On a $a_1 = a_2 = …….= a_n = a$

Or $a_{p+1} - a_p = m_{p+1}V_R - V_R m_p (1+r)$
D'où $m_{p+1} V_R = m_p V_R (1+r)$

Donc $m_{p+1} = m_p (1+r)$

Les amortissements sont en progression géométrique de raison (1+r).

2.4.2. Relation entre le nombre d'obligations et l'annuite (n) constante

On peut démontrer que $a = N.\ V_R . \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

2.5. Remboursement d'un emprunt obligataire par amortissements constants

Comme pour l'emprunt indivis, les annuités sont en progression arithmétique de raison

$$\begin{matrix} V \\ I \\ A \end{matrix} - \frac{C_0}{n} . i1$$

EXERCICES ET PROBLEMES

Exercice 1

Un prêt de 70442,910 dinars est consenti au taux d'intérêt annuel de 3%. Il est amortissable par 24 annuités de fin de période telles que chacune d'elles est égale à la précédente majorée de 5%. L'amortissement de la 19^{e} année s'élève à 4720,152 dinars.

1) Etablir la relation qui lie le capital emprunté et les annuités. En déduire le montant de la première annuité.
2) Etablir la relation qui lie les amortissements successifs.
3) Construire la 1ère, la 18^{e}, la 19^{e} et la 24^{e} ligne du tableau d'amortissement.

Exercice 2

Une société de crédit prête une somme d'argent remboursable chaque fin d'année en 20 annuités constantes tel que le produit du premier et du troisième amortissement soit égal à 2241613,400 dinars et que le produit du 5^{e} amortissement par le 6^{e} soit égal à 5064949,200 dinars.

1) Calculer :
   a) Le taux d'intérêt.
   b) Le premier amortissement.
   c) L'annuité.
   d) La somme empruntée (arrondir à l'unité supérieure).
   e) La dette amortie et non amortie après le paiement de la 8^{e} annuité.
2) Etablir les 12^{e} et 13^{e} lignes du tableau d'amortissement.

Exercice 3

Une entreprise s'adresse à une banque pour emprunter 110410 dinars. La banque lui propose un remboursement au moyen d'une série de 12 annuités constantes de fin de période aux taux de 8% les 4 premières années, 9% les 4 années suivantes et 10% les 4 dernières années.

1) Calculer le montant de l'annuité.
2) Déterminer le taux effectif annuel d'intérêt de cet emprunt auprès de la banque.
3) Etablir le tableau d'amortissement de cet emprunt.

Exercice 4

Une personne désire emprunter 60000 dinars, s'adresse à trois organismes financiers qui lui proposent trois modalités de remboursement différentes :

Organisme 1 : versement d'une annuité constante (a) pendant 8 ans au taux de 8%.

Organisme 2 : versement d'une somme constante (b) tous les deux ans pendant 8 ans, comprenant une part de remboursement et des intérêts calculés au taux annuel de 8%.

Organisme 3 : Versement de 8 annuités comprenant d'une part un huitième du capital emprunté et d'autre part des intérêts calculés au taux i sur la base du capital restant du.

1) Déterminer le montant de l'annuité a à verser à la suite d'un emprunt auprès de l'organisme 1.
2) Déterminer le montant b à verser si l'emprunt est contracté auprès de l'organisme 2.
3) Déterminer le taux d'intérêt i pratiqué par l'organisme 3, sachant que la première annuité dépasse la dernière de 3937,500 dinars.

Exercice 5

Montrer que la loi de succession des amortissements relatifs au remboursement d'un emprunt obligataire par annuités constantes est définie par la relation suivante :

$$m_{p+1} = m_p(1+r)$$

Tels que :

m_p : amortissement de la période p ;

m_{p+1} : amortissement de la période p+1

et r : taux effectif.

Que devient l'égalité si on suppose en outre, un remboursement au paire ?

Exercice 6

Un emprunt obligataire est émis en juin 1996 aux conditions suivantes:

- Valeur nominale: 5000 dinars.
- Prix d'émission: 4975 dinars.
- Taux nominal: 7 %.
- Durée totale: 8 ans (remboursement in fine).
- Date de jouissance: 15 juin 1996.

1) Calculer le taux actuariel brut offert par l'emprunt.
2) Le 16 juin 1998, immédiatement après le détachement du coupon, le taux du marché est de 10 %. Quelle est à cette date la valeur de l'obligation ? Même question si le taux du marché passe à 5 %. Que peut-on conclure ?

Exercice 7

On considère un emprunt obligataire de 500000 dinars dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Valeur nominale d'une obligation = 100 dinars.
- Valeur de remboursement = 125 dinars.
- Taux d'intérêt = 10%.
- Durée de l'emprunt = 20 ans.
- Remboursement par amortissements constants.

1) Etablir les 1ère, 2^e et 20^e lignes du tableau d'amortissement de cet emprunt.
2) Si après 17 ans, on envisage un remboursement par anticipation, quel est le montant S à payer y compris la 17^e annuité ?

Exercice 8

Une entreprise a émis un emprunt obligataire dont un extrait du tableau d'amortissement est donné ci- dessous :

	Nombre d'obligations		Amortissement (remboursement au pair)	Intérêts	Annuités sensiblement constantes
	En circulation	Amorties			
1					
2					
3			567000		
4		1096			
5					
6				496416	
7		1711			
8					

1) Déterminer :
   a) Le taux d'intérêt i.
   b) La valeur nominale d'une obligation. Arrondir le résultat à l'unité inférieure.
   c) Le nombre de titres en circulation au début de la 6^{e} année.
   d) Le nombre d'obligations émises.
   e) La durée de l'emprunt.
   f) La valeur de la $1^{ère}$, de la 4^{e} et de la 8^{e} annuité.
2) Compléter le tableau d'amortissement.

Réponses :

Exercice 1 : 1) $C_0 = 29{,}32677327a_1$; $a_1 = 2\,402$ dinars.

2) $m_{p+1} - 1{,}03m_p = 0{,}05a_p$.

3)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité
1	70 442,910	2 113,287	288,713	2 402,000
18	39 666,998	1 190,010	4 315,418	5 505,428
19	35 351,580	1 060,547	4 720,152	5 780,699
24	7 162,914	214,887	7 162,913	7 377,800

Exercice 2 : 1) a) i = 12,35%

b) m_1 = 1 332,623 dinars.

c) a = 13 682,607 dinars.

d) C_0 = 100 000 dinars.

e) R_8 = 16 601,629 dinars; $C_0 - R_8$ = 83 398,371 dinars.

2)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement
12	71 944,526	8 885,149	4 797,458
13	67 147,068	8 292,663	5 389,944

Exercice 3 : 1) a = 15 034,021 dinars.

2) i = 8,5057%

3)

Période	capital restant du	Intérêt de la période	Amortissement	Annuité constante
1	110 410,000	8 832,800	6 201,221	15 034,021
2	104 208,779	8 336,702	6 697,319	15 034,021
3	97 511,460	7 800,917	7 233,104	15 034,021
4	90 278,356	7 222,268	7 811,753	15 034,021
5	82 466,604	7 421,994	7 612,027	15 034,021
6	74 854,577	6 736,912	8 297,109	15 034,021
7	66 557,468	5 990,172	9 043,849	15 034,021
8	57 513,619	5 176,226	9 857,795	15 034,021
9	47 655,824	4 765,582	10 268,439	15 034,021
10	37 387,385	3 738,739	11 295,282	15 034,021
11	26 092,103	2 609,210	12 424,811	15 034,021
12	13 667,292	1 366,729	13 667,292	15 034,021

Exercice 4 : 1) a = 10 440,885 dinars.

2) b = 21 717,042 dinars.

3) I = 7,5%.

Exercice 5 : 1) Voir paragraphe 2.4.

Exercice 6 : 1) i = 7,084%

2) V (i=10%) = 4 346,710 dinars; V (i=5%) = 5 507, 569 dinars.

Exercice 7 : 1)

Période	Dette en début de période	Intérêt	Amortissement constant	Annuité	Nombre de titres en circulation
1	500 000	50 000	31 250	81 250	4 750
2	475 000	47 500	31 250	78 750	4 500
20	25 000	2 500	31 250	33 750	0

2) S = 131 792,825 dinars.

Exercice 8 : 1) a) i = 16%

b) V_N = 600 dinars.

c) N_5 = 5 171 obligations.

d) N = 10 000 obligations.

e) n = 8 ans.

f) a_1 = 1 381 200 dinars; a_4 = 1 381 248 dinars et a_8 = 1 381 560 dinars.

2)

	Nombre d'obligations		Amortissement		Annuites sensiblement
	En circulation	Amorties	(remb, au pair)	lnter♦ts	constantes
1	10000	702	421 200	960 000	1 381 200
2	9298	816	489 600	892 608	1 382 208
3	8482	944	567 000	814 272	1 381 272
4	7538	1096	657 600	723 648	1 381 248
5	6442	1271	762 600	618 432	1 381 032
6	5171	1475	885 000	496 416	1 381 416
7	3696	1711	1 026 600	354 816	1 381 416
8	1985	1985	1 191 000	190 560	1 381 560

EXTRAITS DES SUJETS D'EXAMENS

EXAMEN GESTION FINANCIERE DEUXIEME SESSION 2003/2004

Exercice

Le 12 juin N, une entreprise a contracté un emprunt de 100000 dinars, remboursable par 12 annuités constantes de fin de période. Le taux d'intérêt annuel est égal à 13,2%. Au cours de cette période, le taux d'intérêt ayant diminué, l'entreprise envisage de rembourser cet emprunt par anticipation. La date de remboursement par anticipation est fixée au 12 juin N+4. A cette date, l'entreprise versera :

- La quatrième annuité ;
- Le remboursement du capital restant du à cette date.

Pour disposer du montant nécessaire lui permettant ce remboursement par anticipation du capital restant du après le paiement de la quatrième annuité, l'entreprise contracte, le 12 juin N+4 un nouvel emprunt égal à la somme à rembourser par anticipation, au taux d'intérêt annuel égal à 11%. Cet emprunt est remboursable sur 8 ans par amortissements constants. La première annuité étant versée le 12 juin N+5.

Travail à faire :

1) Déterminer le montant à verser le 12 juin N+4.
2) Etablir les 3 dernières lignes du tableau d'amortissement du second emprunt.
3) Est-ce que la décision de remboursement par anticipation est opportune ?

Réponse :

1) Montant à verser le 12/06/N+4 = 98 318,901 dinars.
2)

Période	Capital restant du	Amortissement	Intérêt	Annuité
6	30 475,391	10 158,460	3 352,293	13 510,753
7	20 316,927	10 158,460	2 234,862	12 393,322
8	10 158,460	10 158,460	1 117,431	11 275,891

3) Oui.