Introduction Générale

Les mathématiques financières sont devenues de nos jours un outil incontournable dans un monde où l'argent (la monnaie) prend une place prépondérante dans les affaires. Pour toutes opérations économiques, l'homo oeconomicus c'est-à- dire l'agent économique n'a plus droit à l'erreur. Son raisonnement doit toujours être rationnel afin de lui permettre de prendre des décisions rentables.

Ainsi grâce aux calculs rationnels, il doit minutieusement détecter des placements ou investissements rentables. Par exemple l'on peut chercher à savoir s'il est préférable d'acheter ou de louer un matériel sur une période donnée compte tenu des recettes espérées et des charges correspondantes. Le concept de rentabilité guide de nos jours le choix économique du citoyen en matière de consommation et d'investissement. A cet effet une bonne maîtrise des mathématiques financières ne saurait être qu'un atout non négligeable pour un opérateur économique qui se veut pérenne dans un environnement de plus en plus compétitif et incertain.

L'usage des mathématiques financières nous permet de connaître le maniement des méthodes et des techniques utilisées pour déterminer entre autre les taux d'intérêt (débiteur et créditeur) des opérations financières. Le facteur temps pris parmi tant d'autres facteurs influençant les opérations financières n'est plus traité à la légère.

Chapitre I : *Intérêt Simple*

I. Généralités

L'intérêt simple est appliqué pour les opérations de court terme. L'intérêt se comme le loyer de l'argent prêté ou emprunté. Soit par exemple un prêt d'argent entre deux agents économiques A et B. Le prêteur A donne 1 000F à l'emprunteur B qui s'engage fermement à rembourser après une durée déterminée d'avance, le capital (montant) emprunté plus 100F. Les 100F constituent la rémunération du service rendu par le prêteur à l'emprunteur.

1) Formule fondamentale

L'intérêt calculé **In** est fonction de 3 paramètres :

- Le montant c'est-à- dire le capital prêté (ou emprunté) noté **Co**
- La durée du prêt ou de l'emprunt notée **n**
- Le taux d'intérêt qui est noté **i** pour une unité monétaire et **t** pour cent unités monétaires

On dit également que l'intérêt est proportionnel au capital, au temps et au taux

D'où la formule : $\boxed{In = Coin}$ ou $\boxed{In = \frac{Cotn}{100}}$ avec n en année et t en pourcentage

Si n est en mois : $\boxed{In = \frac{Cotn}{1200}}$ $\boxed{In = \frac{Coin}{12}}$

si n est en jour : $\boxed{In = \frac{Cotn}{36\,000}}$ $\boxed{In = \frac{Coin}{360}}$

2) Notion de valeur acquise

On appelle valeur acquise par un capital le total en fin de placement dudit capital et de l'intérêt produit. Si nous désignons par **Cn** valeur acquise :

$$Cn = Co + \frac{Cotn}{1200}$$

Remarque :

Quelque soit la durée dans la théorie de l'intérêt simple, le calcul de l'intérêt doit s'effectuer en une seule fois à la fin de la période de à prendre en considération. Donc il n'est pas légitime de calculer la

Valeur acquise à une date intermédiaire et de recommencer le calcul à partir de cette date.

II. Intérêt civil et Intérêt commerciale

Pour le calcul de l'intérêt, certain utilise une année de 365 jours. Cet intérêt calculé s'appelle **intérêt civil.**

$$I'n = \frac{Cotn}{36\,500} \qquad I'n = \frac{Coin}{365}$$

L'intérêt commercial est le plus usité. Il prend en compte une année de 360 jours.

Sa formule est :

$$In = \frac{Coin}{360} \qquad In = \frac{Cotn}{36\,000}$$

Calcul de la différence entre In et I'n

$$In - I'n = \frac{Coin}{360} - \frac{Coin}{365} \;; \qquad In - I'n = \frac{Coin}{360} - \frac{Coin}{365} \;;$$

$$In - I'n = \frac{Coin}{360} * \frac{5}{365} \qquad In - I'n = \frac{Coin}{365} * \frac{5}{360}$$

$$In - I'n = In * \frac{1}{73} \qquad In - I'n = I'n * \frac{1}{72}$$

III. Notion de taux d'intérêt effectif

L'intérêt est défini comme la rémunération due par l'emprunteur ou comme la rémunération acquise par le prêteur pour chaque unité monétaire prêtée pour une période donnée dont l'unité de temps est l'année sauf indication contraire. Ainsi lorsque les intérêts sont perçus d'avance tout se passe comme si le capital réellement prêté était le nominal C diminué des intérêts Cin.

On a: **C – Cin = C (1 – in)**

Dans ce cas l'application de la formule fondamentale donne des résultats différents.

L'intérêt résultant du prêt (respectivement de l'emprunt) étant décompté au prorata du nombre de jours ou de la durée du prêt (respectivement de l'emprunt), on doit pouvoir calculer le taux d'intérêt effectif d'un prêt (respectivement de l'emprunt).

Si l'intérêt est post - compté, le taux effectif pour 1F ou une unité monétaire est i en l'absence d'autres frais liés à l'emprunt : dans ce cas **i = i'**

Mais si l'intérêt est pré - compté, le taux effectif pour 1F ou une unité monétaire est i' qui est tel que : **[C (1 – in)] i'n = Cin d'où i' = i /(1-in) si n est en année.**

Avec : **[C (1 – in)]** capital réellement prêté.

Exemple

Pour un capital C = 1 000F et un taux d'intérêt de 10%.

i' = 11%

IV. Notion de taux de placement

1. Taux moyen

Considérons trois capitaux C1, C2 et C3 placés respectivement aux taux t1 ; t2, t3 pendant des durées respectives de n1, n2, et n3.

L'intérêt total de ces placements est égal à

$$I = \frac{C1t1n1}{36\,000} + \frac{C2t2n2}{36\,000} + \frac{C3t3n3}{36\,000}$$

Le taux moyen de placement serait le taux unique t qui appliqué aux capitaux respectifs et pour leur durée respective conduirait au même intérêt total. Ce qui permet d'écrire :

$$\frac{C1tn1}{36\,000} + \frac{C2tn2}{36\,000} + \frac{C3tn3}{36\,000} = \frac{C1t1n1}{36\,000} + \frac{C2t2n2}{36\,000} + \frac{C3t3n3}{36\,000}$$

$$t = \frac{C1t1n1 + C2t2n2 + C3t3n3}{C1n1 + C2n2 + C3n3}$$

$$t = \frac{\sum Citini}{\sum Cini}$$

2. Taux proportionnel

Considérons une période divisée en P sous périodes. Si t est le taux intérêt appliqué à la période alors tp serait le taux pour les sous périodes.

$$\boxed{tp = \frac{t}{p}}$$

On dira que tp est le taux proportionnel au taux période p.

En d'autre terme si nous prenons t annuel on aura :

- 2 pour le semestre
- 4 pour le trimestre
- 12 pour le mois
- 24 pour les quinzaines
- 52 pour les semaines

Ainsi le taux trimestriel t_t est le taux proportionnel aux taux annuel t.

Exemple

Quel est le taux trimestriel proportionnel à 8%

Réponse : $t_t = 2\%$

V. Nombres et les diviseurs fixes

Nous partons de la formule

I = Ctn / 36 000.

Divisons la fraction par t.

Ce qui donne :

I =(Ctn / 36 000) /t

I = (Ctn /t) / (36 000/t)

Posons D = (36 000/t) ceci entraine que $\boxed{I = \frac{Cn}{D}}$

Nous posons également N = CN. Donc la formule finale devient : $\boxed{I = \frac{N}{D}}$

Exemple

Un capital de 15 000F est placé à 5% pendant 32 jours.

Quel est le montant de l'intérêt en fin de placement ?

Solution

N = Cn = 15 000 * 32 = 480 000

D = 36 000 / t = 36 000 / 5 =7 200

D'où I = N / D = 480 000/ 7 200

I = 66,66

NB : l'intérêt de cette méthode est de pouvoir faire rapidement le calcul d'intérêt lorsque plusieurs capitaux sont en jeu.