Cours de Finance (M1)

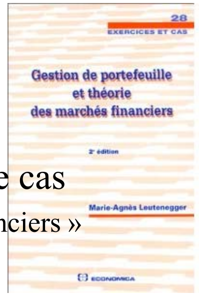
Séance (6) du 27 octobre 2017
Exercices corrigés

Are Markets Efficient? http://harvardecon.org/?p=2816 Harvard Economic Review (avec la permission de Dilbert !)

Exercices corrigés

- Cas Markoland
- Beta et SML
- Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs
- SML et ratio de Sharpe
- Risque et coefficient de corrélation
- Trois actifs parfaitement corrélés
- Portefeuille de variance minimale
- Actifs parfaitement corrélés, vente à découvert
- Arbitrage

Le cas Markoland



- Cas extrait d'un livre d'exercices corrigés et de cas
  - « Gestion de portefeuille et théorie des marchés financiers »
  - Marie-Agnès Leutenegger, Economica, 3ième édition
- Données du problème
  - Titres A et B de prix aujourd'hui 120 € et 1700 €, valeur d'un part de portefeuille de marché M aujourd'hui : 260 €
  - Dividende de 10 € pour A et de 100 euros pour B, payés en fin de période.

Probabilité	Cours de A en €	Cours de B en €	Valeur du portefeuille de marché M
0.2	100	2200	250
0.3	130	1500	330
0.3	150	2000	340
0.2	180	2400	360

Le cas Markoland

- Question 1
  - *Calculer pour A, B et M, les taux de rentabilité possibles, leur niveaux espérés* $\boldsymbol{E_A, E_B, E_M}$*, les écart-types des rentabilités* $\boldsymbol{\sigma_A, \sigma_B, \sigma_M}$*, le coefficient de corrélation linéaire* $\boldsymbol{\rho_{AB}}$ *et les Betas ,* $\boldsymbol{\beta_A, \beta_B}$

Le cas Markoland

- Tableau des rentabilités

Probabilité	rentabilité de A	rentabilité de B	rentabilité de M
0.2	-8.33%	35.29%	-3.85%
0.3	16.67%	-5.88%	26.92%
0.3	33.33%	23.53%	30.77%
0.2	58.33%	47.06%	38.46%

- Espérances de rentabilités
- $\boldsymbol{E_A} = 0{,}2 \times (-8{,}33\%) + 0{,}3 \times 16{,}67\% + 0{,}3 \times 33{,}33\% + 0{,}2 \times 58{,}33\% = \mathbf{25}\%$
- $\boldsymbol{E_B = 21,76\%, E_M = 24,23\%}$

Le cas Markoland

- Remarques sur la manière de mener les calculs
  - *Il est plus simple de compléter le tableau précédent à partir d'Excel*
  - *Si Excel est disponible …*
    - Les fonctions statistiques standard d'Excel ne sont pas utiles ici
    - Attention également aux différentes formules de calcul d'écart-type « dans l'échantillon » ou « dans la population » (ce dernier étant privilégié en finance)
  - *Dans quelques cas, on peut simplifier les calculs à la main*
    - $E_A = 0{,}2 \times \frac{110-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{140-120}{120} + 0{,}3 \times \frac{160-120}{120} + 0{,}2 \times \frac{190-120}{120} = \frac{0{,}2\times(-10)+0{,}3\times20+0{,}3\times40+0{,}2\times70}{120} = \frac{-2+6+12+14}{120} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$
  - *Mais ce n'est pas généralisable*

Le cas Markoland

- Écart-types des taux de rentabilité
  - $\sigma_A^2 = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A)^2 + +0{,}3 \times (16{,}67\% - E_A)^2 + 0{,}3 \times (33{,}33\% - E_A)^2 + 0{,}2 \times (58{,}33\% - E_A)^2$
  - *Avec* $E_A = 25\%$
  - *On trouve* $\boldsymbol{\sigma_A = 22,05\%, \sigma_B = 19,87\%, \sigma_M = 14,60\%}$
- Covariance entre les taux de rentabilité de A et de B
  - $\boldsymbol{C_{AB}} = 0{,}2 \times (-8{,}33\% - E_A) \times (35{,}29\% - E_B) + 0{,}3 \times \cdots = \mathbf{0,015196}$
- Coefficient de corrélation linéaire $\boldsymbol{\rho_{AB}}$
  - $\boldsymbol{\rho_{AB}} = \frac{\boldsymbol{C_{AB}}}{\boldsymbol{\sigma_A \times \sigma_B}} = \frac{0{,}015196}{22{,}05\% \times 19{,}87\%} = \mathbf{0,3469}$

Le cas Markoland

- Calcul des Betas
  - $\boldsymbol{\beta_A} = \frac{\mathbf{Cov}(\boldsymbol{R_A, R_M})}{\boldsymbol{\sigma_M^2}} = \frac{\boldsymbol{C_{AM}}}{\boldsymbol{\sigma_M^2}}$
  - *On calcule* C_{AM} *de la même manière que* C_{AB} *et on trouve*
  - $C_{AM} = 0{,}0292$
  - $\boldsymbol{\beta_A} = \frac{0{,}0292}{0{,}0213} = \mathbf{1,3683}$
  - $\boldsymbol{\beta_A > 1}$ *(titre offensif)*
  - *Le même raisonnement appliqué à B donne* $\boldsymbol{\beta_B = -0,1072}$
  - $\boldsymbol{\beta_B < 0}$ *(situation atypique).*

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - *Il existe un actif sans risque de taux de rentabilité $\boldsymbol{R_f} = \mathbf{10}\%$*
  - *Quelle est la prime de risque de marché $\boldsymbol{E_M - R_f}$?*
  - *Quelle est la rentabilité espérée des titres A et B d'après l'équation de la SML ?*
  - *Comment interpréter les différences avec les rentabilités espérées obtenues à la question 1 ?*

Le cas Markoland

- Question 2 :
  - $\boldsymbol{E_M - R_f = 24,23\% - 10\% = 14,23\%}$
    - En utilisant la SML, on obtient la rentabilité attendue de A
  - $\boldsymbol{E_A = R_f + \beta_A \times (E_M - R_f)} = 10\% + 1{,}3683 \times 14{,}23\% = \boldsymbol{29,47\%}$
    - De même, on trouve que $\boldsymbol{E_B = 8,47\%}$
  - *Or, le premier calcul a donné $\boldsymbol{E_A = 25\%}$*
  - *Comment interpréter la différence entre les 2 valeurs de $\boldsymbol{E_A}$?*
    - Un (au moins) des deux calculs pose problème
    - On a pu se tromper sur les probabilités des différentes rentabilités
    - Ce qui affecte les calculs dans les deux approches
    - Si les calculs sont effectués avec un échantillon de rentabilités observées, on a fait un calcul dans l'échantillon et non pas dans la population (ce qui revient à une erreur sur les données)

Le cas Markoland

- Question 2 : Comment interpréter cette différence ? (suite)
  - *S'il n'y avait aucun « bruit d'échantillonnage »*
    - Connaissance parfaite des lois de probabilité des rentabilité
    - Et donc des espérances de rentabilité et des betas titres
  - *On pourrait encore se tromper sur le taux sans risque $\boldsymbol{R_f}$*
  - *Si ce n'est pas le cas, soit le MEDAF est invalidé, soit les marchés sont inefficients*
    - Dans le premier cas, on donne une valeur normative au MEDAF
    - C'est souvent l'approche des ouvrages académiques (la théorie prime)
    - Ici, $\boldsymbol{\alpha_A = E_A - \left(R_f + \beta_A \times (E_M - R_f)\right) < 0}$ alpha de Jensen négatif
    - Le taux de rentabilité proposé par le marché est inférieur au taux normatif du MEDAF
    - Pour qu'il remonte et revienne « à la normale », le prix de A doit baisser
    - Stratégie de vente à découvert du titre ?

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML

Le cas Markoland

- Question 3 : on suppose que le portefeuille de marché M est efficient et que c'est le portefeuille tangent. Établir l'équation de la CML
  - *La CML est la demi-droite qui relie l'actif sans risque et le portefeuille de marché dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Actif sans risque* $\boldsymbol{R_f = 10\%}$
  - *Portefeuille de marché :* $\boldsymbol{E_M = 24,23\%}$, $\boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *Soit un portefeuille P sur la CML. On écrit l'égalité des pentes entre l'actif sans risque et les portefeuilles P ou M*
  - $\boldsymbol{\frac{E_P - R_f}{\sigma_P} = \frac{E_M - R_f}{\sigma_M} = \frac{24{,}23\% - 10\%}{14{,}6\%} = 0,9747}$ *(ratio de Sharpe de M)*
  - $\boldsymbol{E_P = 10\% + 0,9747 \times \sigma_P}$

Le cas Markoland

- Question 4 : l'investisseur s'est fixé un niveau de risque de $\boldsymbol{12\%}$
- Calculer l'espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition

Le cas Markoland

- Question 4 : l'investisseur s'est fixé un niveau de risque de $\boldsymbol{12\%}$
- Calculer l'espérance de rentabilité de son portefeuille et sa composition
  - *On part de* $\boldsymbol{E_P = 10\% + 0,9747 \times \sigma_P}$ *avec* $\boldsymbol{\sigma_P = 12\%}$
  - *D'où* $\boldsymbol{E_P = 21,7\%}$
  - *On sait que sur la CML,* $\boldsymbol{\sigma_P = X \times \sigma_M}$*, où X est la proportion investie en portefeuille de marché*
  - *Or,* $\boldsymbol{\sigma_P = 12\%}$, $\boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *D'où* $\boldsymbol{X = 82,2\%}$
  - *La part investie en actif sans risque est* $\boldsymbol{1 - X = 17,8\%}$

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B

Le cas Markoland

- Question 5 : calculer le risque total, le risque de marché et le risque spécifique du titre B
  - *On rappelle que* $\boldsymbol{\sigma_B^2} = (\boldsymbol{\beta_B \sigma_M})^2 + \boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2}$
  - *Où* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon}$ *est le risque spécifique,* $\boldsymbol{\sigma_B}$ *le risque total et* $|\boldsymbol{\beta_B \sigma_M}|$ *le risque de marché.*
  - *On a déjà calculé* $\boldsymbol{\sigma_B = 19,87\%}$
  - $\boldsymbol{\beta_B = -0,1072}, \boldsymbol{\sigma_M = 14,60\%}$
  - *D'où* $|\boldsymbol{\beta_B \sigma_M}| = \boldsymbol{1,56\%}$
  - *De* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon^2} = \boldsymbol{\sigma_B^2} - (\boldsymbol{\beta_B \sigma_M})^2$*, on tire* $\boldsymbol{\sigma_\varepsilon = 19,81\%}$
  - *Le risque spécifique de B est prépondérant.*

Betas et SML

- *Problème posé par P-A. Patard (2012)*
  - $R_f = 3\%$

Problème (7 points)

Soit un marché composé de 3 titres risqués notés A_1, A_2, A_3 dont les capitalisations boursières (exprimées en milliards d'€) et les rendements espérés E_i sont donnés dans le tableau ci-dessous. Par ailleurs, il existe un actif non risqué (un bon du trésor), l'actif A_0, dont le taux de rendement est $R_f = 3\%$.

Actif	A_1	A_2	A_3
CB (Mds€)	250	150	100
E_i	3%	2.5%	5%

1. Donner la composition du portefeuille de marché M (calculer les poids des titres dans celui-ci).
2. En déduire E_M puis déterminer l'équation de la SML.
3. Calculer β_i pour chaque titre.

Betas et SML

- $\boldsymbol{X_1 = 50\%, X_2 = 30\%, X_3 = 20\%}$
- $E_M = 0{,}5 \times E_1 + 0{,}3 \times E_2 + 0{,}2 \times E_3$
- $\boldsymbol{E_M} = 0{,}5 \times 3\% + 0{,}3 \times 2{,}5\% + 0{,}2 \times 5\% = \boldsymbol{3,25\%}$
- La SML est donnée par $\boldsymbol{E_i = R_f + \beta_i \times (E_M - R_f)}$
- $\boldsymbol{E_i = 3\% + \beta_i \times 0,25\%}$
- $\beta_i = \frac{E_i - 3\%}{0{,}25\%}, E_1 = 3\%, E_2 = 2{,}5\%, E_3 = 5\%$
- $\boldsymbol{\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8}$

Betas et SML

- Suite du problème

Nous donnons ci-dessous la composition du portefeuille Medalyon.

Actif	A_0	A_1	A_2	A_3	Total
Montant Investi (M€)	10	45	27	18	100

4. Donner le poids de chaque actif dans le fonds.
5. Calculer le beta du fonds β_P et son rendement attendu E_P.
6. Donner le montant du portefeuille investi sur les titres risqués, en déduire le poids de la poche taux (investie sur l'actif sans risque) et le poids de la poche action (investie sur les actifs risqués).
7. Le portefeuille est-il efficient ? Justifiez.

Betas et SML

- $\beta_P = X_0 \times \beta_0 + X_1 \times \beta_1 + X_2 \times \beta_2 + X_3 \times \beta_3$
  - *Le premier actif étant sans risque* $\beta_0 = 0$
  - $X_1 = 45\%, X_2 = 27\%, X_3 = 18\%$
  - $\beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 8$
- $\boldsymbol{\beta_P} = 0{,}27 \times (-2) + 0{,}18 \times 8 = \mathbf{0,9}$
- $\boldsymbol{E_P = 3\% + \beta_P \times 0,25\% = 3,225\%}$
  - **90**% *du portefeuille est investi en actions,* **10**% *en actif sans risque*
  - *Au sein de la poche risquée, la part investi dans le titre 1 est* $45/90 = 50\%$, *dans le titre 2,* $27/90 = 30\%$ *et donc la part investie dans le titre 3 de* 20%
- L'allocation est identique à celle du portefeuille de marché (supposé efficient)

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Source : Finance 3[e] édition, Pearson, Collection Synthex*
  - *Farber, Laurent, Oosterlink & Pirotte*
    - Pages 62 et suivantes
  - *Tante Gaga est soumise à un choix cornélien : dans quelle sicav va-t-elle investir son épargne ?Elle a reçu des offres de trois banques (A, B et C) ayant des caractéristiques très différentes*
    - $\boldsymbol{E_A} = \mathbf{5}\%, \boldsymbol{\sigma_A} = \mathbf{6}\%$
    - $\boldsymbol{E_B} = \mathbf{10}\%, \boldsymbol{\sigma_B} = \mathbf{10}\%$
    - $\boldsymbol{E_C} = \mathbf{13}\%, \boldsymbol{\sigma_C} = \mathbf{20}\%$
    - **Le taux sans risque, $\boldsymbol{R_F}$ est égal à 3%**

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles (mutuellement) exclusifs
  - *Supposons que l'objectif de tante Gaga est d'obtenir une espérance de rentabilité de* **9**%
  - *A) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quel serait le risque correspondant ?*
  - *B) Que devrait-elle choisir ?*
    - $\boldsymbol{E_A} = \mathbf{5}\%, \boldsymbol{\sigma_A} = \mathbf{6}\%$
    - $\boldsymbol{E_B} = \mathbf{10}\%, \boldsymbol{\sigma_B} = \mathbf{10}\%$
    - $\boldsymbol{E_C} = \mathbf{13}\%, \boldsymbol{\sigma_C} = \mathbf{20}\%$
    - $\boldsymbol{R_F}$ =3%

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Notons* $\boldsymbol{X}$ *la part de la richesse investie dans la sicav*
  - $\boldsymbol{E_P = XE_i + (1 - X)R_F = 9\%, \sigma_P = X\sigma_i, i = A, B, C}$
  - *D'où* $\boldsymbol{X} = \frac{\boldsymbol{E_P - R_F}}{\boldsymbol{E_i - R_F}}$
  - $\boldsymbol{X_A = 300\%, \sigma_P = 18\%}$
  - $\boldsymbol{X_B = 86\%, \sigma_P = 8,57\%}$
  - $\boldsymbol{X_C = 60\%, \sigma_P = 12\%}$
  - *Remarque : si* $\boldsymbol{A}$ *est choisie, tante Gaga empruntera pour investir un montant supérieur à son épargne initiale*
  - *Tante Gaga choisit la solution qui minimise le risque, c'est-à-dire la sicav B*

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

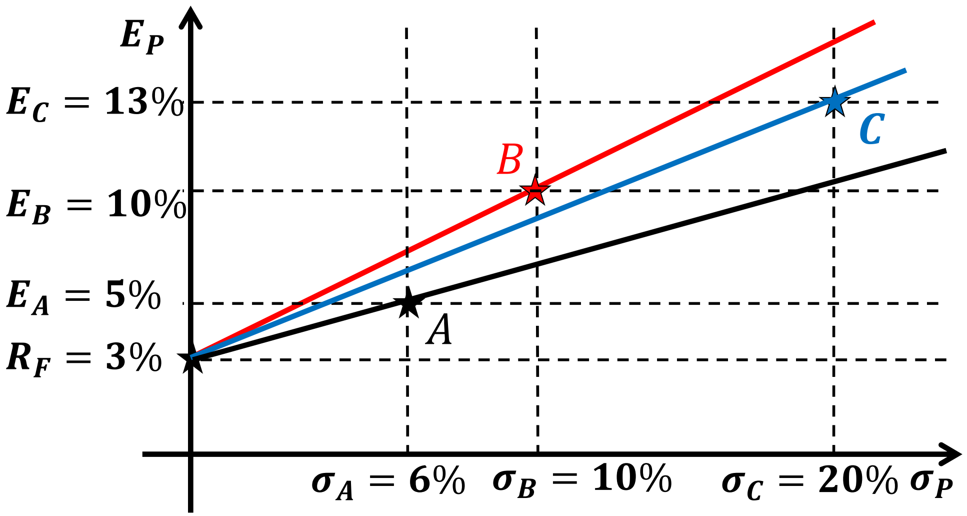
- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Tante Gaga est maintenant prête à accepter que le risque de son portefeuille soit de* $\mathbf{15\%}$
  - *C) Quelle allocation d'actifs devrait-elle réaliser selon la sicav choisie et quelle serait l'espérance de rentabilité correspondante ?*
  - *D) Que devrait-elle choisir ?*
  - *E) Le choix de la sicav dépend-il de son objectif ?*
    - $\boldsymbol{E_A = 5\%, \sigma_A = 6\%}$
    - $\boldsymbol{E_B = 10\%, \sigma_B = 10\%}$
    - $\boldsymbol{E_C = 13\%, \sigma_C = 20\%}$
    - $\boldsymbol{R_F = 3\%}$

Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles
  - *Si Tante Gaga exprime son objectif en termes de risque, la proportion à investir dans la sicav choisie est*
  - $\boldsymbol{X = \sigma_P / \sigma_i, i = A, B, C}$ *avec* $\boldsymbol{\sigma_P = 15\%}$
  - *L'espérance de rentabilité est alors*
  - $\boldsymbol{E_P = XE_i + (1 - X)R_F = R_F + \frac{E_i - R_F}{\sigma_i} \times \sigma_P}$
  - $\boldsymbol{X_A = 250\%, E_P = 8\%}$
  - $\boldsymbol{X_B = 150\%, E_P = 13,50\%}$
  - $\boldsymbol{X_C = 75\%, E_P = 10,50\%}$
  - *Tante Gaga choisit la solution qui lui donne la rentabilité attendue la plus élevée : la sicav B de nouveau*

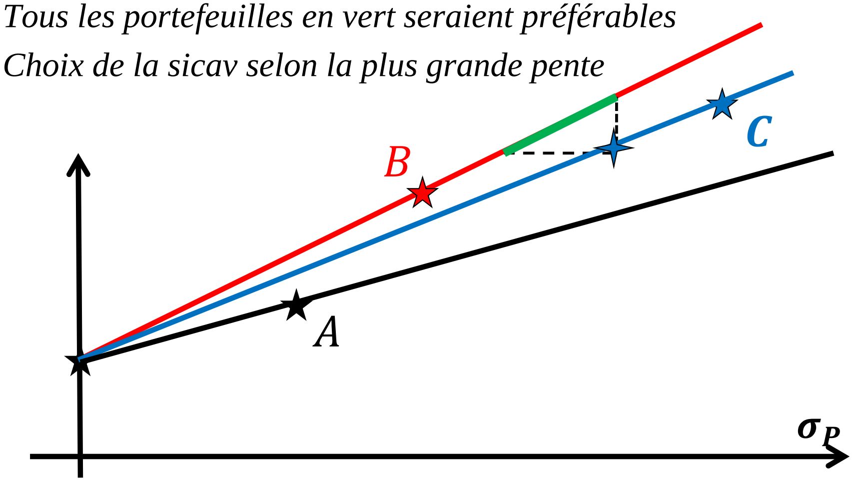
Révisions, exercices finance de marché

- Problème : choisir parmi un ensemble de portefeuilles



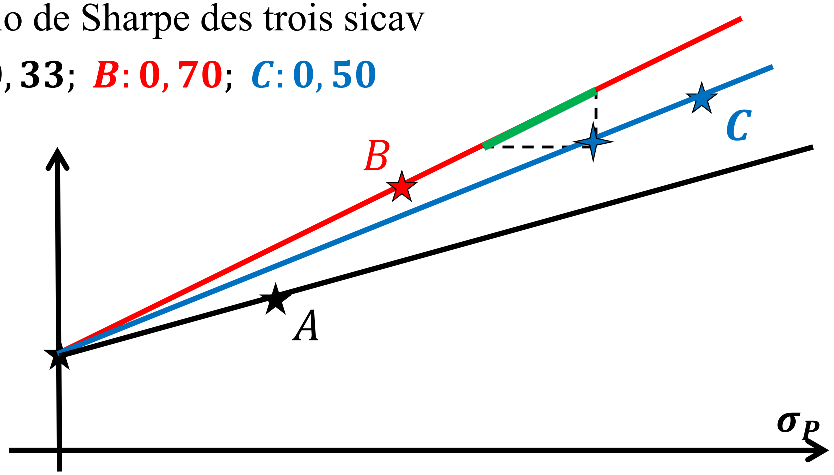
Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- B est toujours préférée
  - *Si le portefeuille* ✦ *est sélectionné, impliquant le choix C*
  - *Tous les portefeuilles en vert seraient préférables*
  - *Choix de la sicav selon la plus grande pente*



Choisir parmi 3 portefeuilles mutuellement exclusifs

- Pente des demi-droites $\frac{E_i - R_F}{\sigma_i}$ (ratio de Sharpe)
- Ratio de Sharpe des trois sicav
- $A: 0,33$; $B: 0,70$; $C: 0,50$



SML et ratio de Sharpe

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *On considère un portefeuille P*
  - *E_P, σ_P espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille*
  - *β_P beta du portefeuille (par rapport au portefeuille de marché)*
  - *E_M, σ_M espérance et écart-type de la rentabilité du portefeuille de marché*
  - *R_F taux sans risque*
  - *ρ_{PM} coefficient de corrélation entre la rentabilité du portefeuille P et celle du portefeuille de marché*
- Utiliser l'équation de la SML pour montrer que le ratio de Sharpe est maximal pour les portefeuilles efficients

SML et ratio de Sharpe

- Problème : caractérisation des portefeuilles efficients
  - *ratio de Sharpe du portefeuille P:* $\frac{E_P - R_F}{\sigma_P}$
  - *Équation de la SML :* $E_P = R_F + \beta_P(E_M - R_F)$
  - $\beta_P = \frac{\rho_{PM}\sigma_P\sigma_M}{\sigma_M^2} = \frac{\rho_{PM}\sigma_P}{\sigma_M}$
  - $\frac{E_P - R_F}{\sigma_P} = \rho_{PM}\frac{E_M - R_F}{\sigma_M} \leq \frac{E_M - R_F}{\sigma_M}$, *puisque* $\rho_{PM} \leq 1$
  - *Le ratio de Sharpe du portefeuille P est inférieur ou égal au ratio de Sharpe du portefeuille de marché*
  - *Égalité si $\rho_{PM} = 1$: le portefeuille P est parfaitement corrélé avec le portefeuille de marché*
  - *Portefeuilles combinant actif sans risque et M, donc efficients*

Risque et coefficient de corrélation

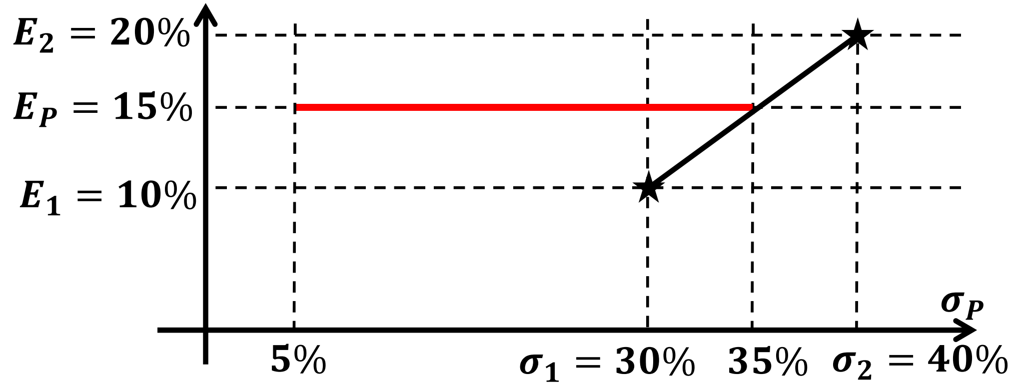
- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Portefeuille de deux titres* $1, 2$
  - *Espérances de rentabilités :* $E_1 = 10\%, E_2 = 20\%$
  - *Écart-types des rentabilités* $\sigma_1 = 30\%, \sigma_2 = 40\%$
  - $X_1 = X_2 = 50\%$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan (E_P, σ_P), le portefeuille précédent quand le coefficient de corrélation ρ entre les rentabilités des titres 1 et 2 varie entre -1 et $+1$.*
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre 1.*

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation
  - *Il suffit de reprendre les formules donnant* E_P *et* σ_P
  - $E_P = X_1E_1 + X_2E_2 = 0,5 \times 10\% + 0,5 \times 20\% = 15\%$
  - E_P *ne dépend pas de* ρ
  - $\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\rho\sigma_1\sigma_2$
  - *Avec* $X_1 = X_2 = 50\%$, $\sigma_1 = 30\%$, $\sigma_2 = 40\%$
  - $2X_1X_2\sigma_1\sigma_2 = 0,06 \geq 0$
  - $-1 \leq \rho \leq +1$
  - σ_P *croît de manière affine avec* ρ
  - *Valeur maximale de* σ_P *quand* $\rho = +1$
  - *On a alors*
  - $\sigma_P = |X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2| = 0,5 \times 30\% + 0,5 \times 40\% = 35\%$

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - σ_P *croît de manière affine avec* ρ
  - *Valeur minimale de* σ_P *quand* $\rho = -1$
  - $\sigma_P = |X_1\sigma_1 - X_2\sigma_2| = |0,5 \times 30\% - 0,5 \times 40\%| = 5\%$

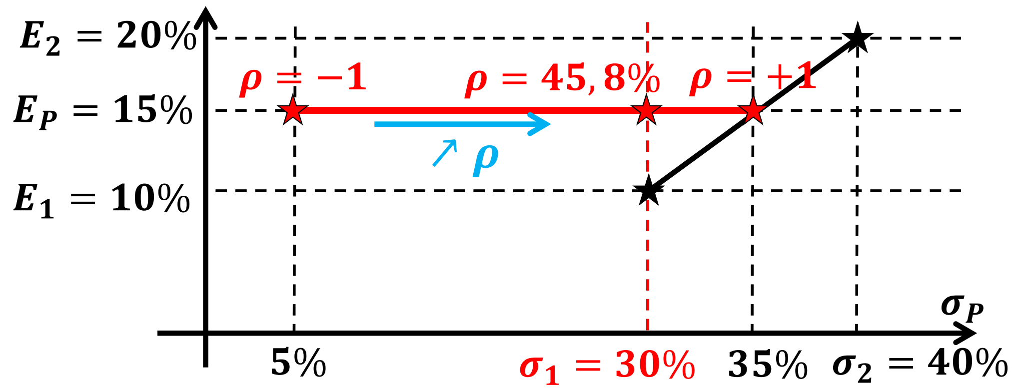


Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *B) Trouver le coefficient de corrélation tel que l'écart-type de la rentabilité du portefeuille est égal à l'écart-type de la rentabilité du titre* $\mathbf{1}$.
  - *Il faut trouver* ρ *tel que*
  - $\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1^2$
  - *Comme* $X_1 = X_2 = 1/2$, *il faut trouver* ρ *tel que*
  - $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2 = 4\sigma_1^2$
  - $2\rho\sigma_1\sigma_2 = 3\sigma_1^2 - \sigma_2^2$
  - *Comme* $\sigma_1 = 0,3$, $\sigma_2 = 0,4$
  - $\rho = 11/24 = 45,8\%$

Risque et coefficient de corrélation

- Problème : risque et coefficient de corrélation (suite)
  - *Les trois situations étudiées* $\rho = \pm 1$, $\rho = 45,8\%$

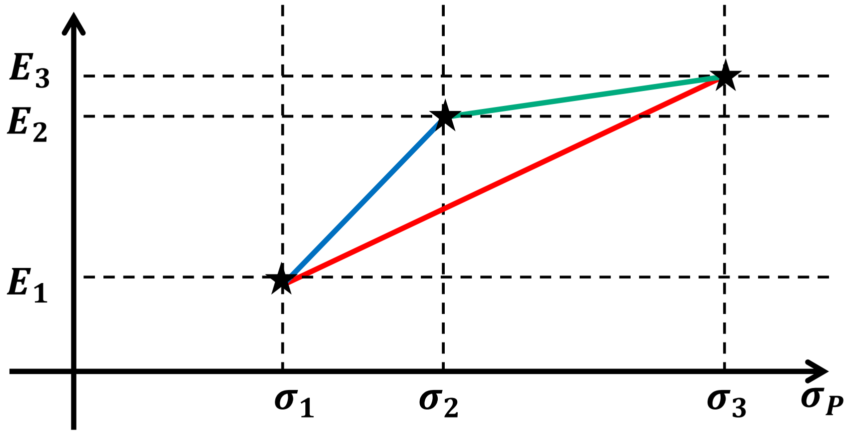


Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - $E_1 < E_2 < E_3, \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$
  - $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$
  - $\rho_{12} = \rho_{13} = \rho_{23} = 1$
- Quelle forme prend la frontière efficiente ?
  - *On distinguera deux cas de figure*
  - *Remarque : on sait comment combiner les titres deux à deux séparément*
  - *Il s'agit des segments de droite qui relient les points associés aux titres dans le plan* (E_P, σ_P)
  - *Un dessin met en évidence deux cas de figure*

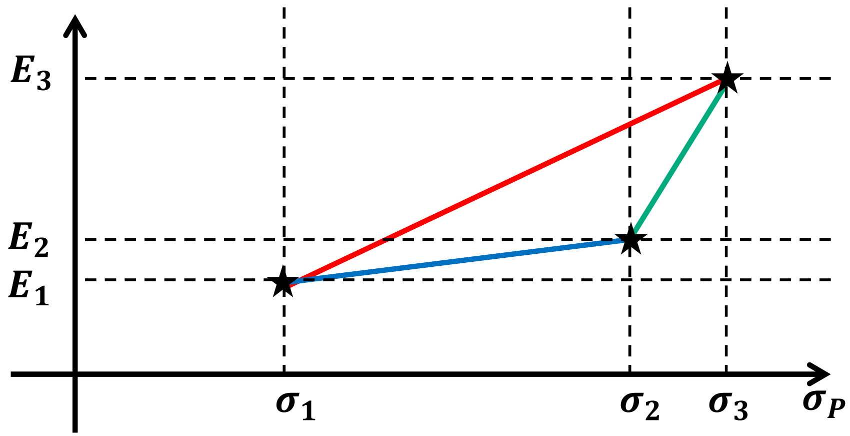
Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Premier cas de figure*



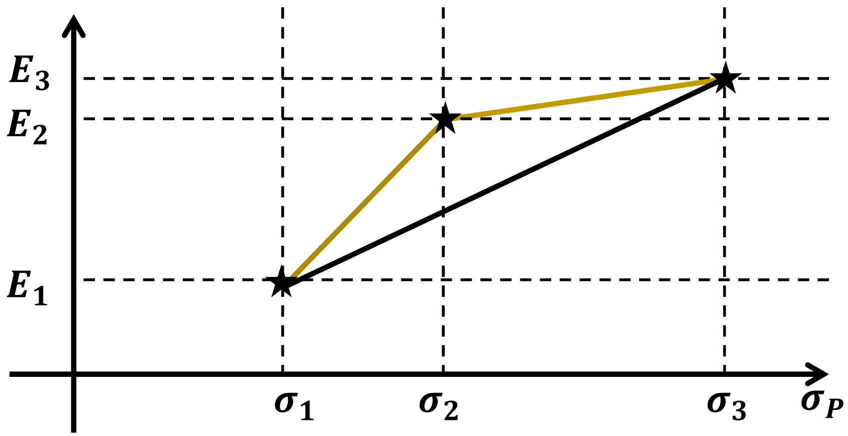
Trois actifs parfaitement corrélés

- Problème : trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Second cas de figure*



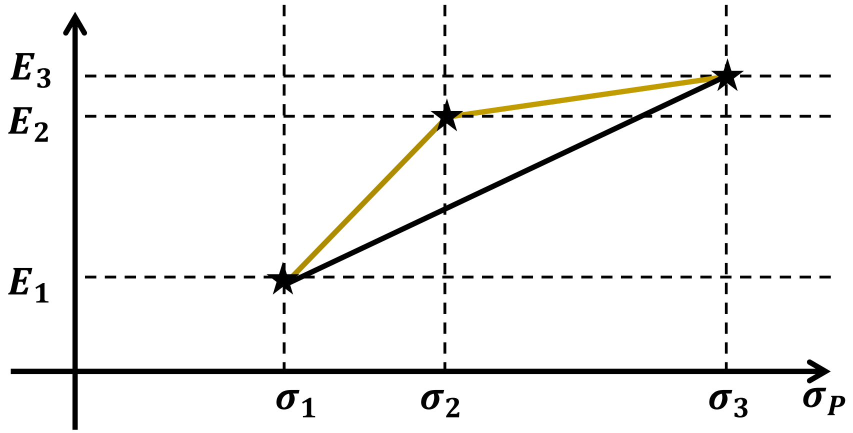
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - $E_P = X_1E_1 + X_2E_2 + X_3E_3$, $\sigma_P = X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2 + X_3\sigma_3$



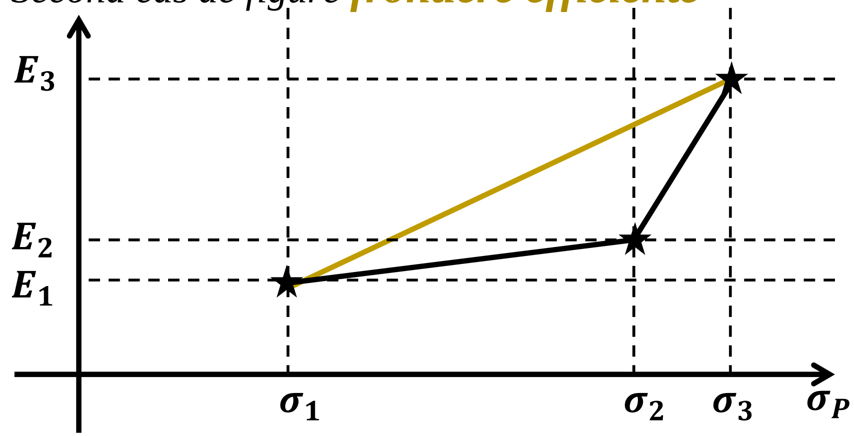
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *premier cas de figure* ***frontière efficiente***



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Ensemble des portefeuilles atteignables : intérieur du triangle*
  - *Second cas de figure* ***frontière efficiente***

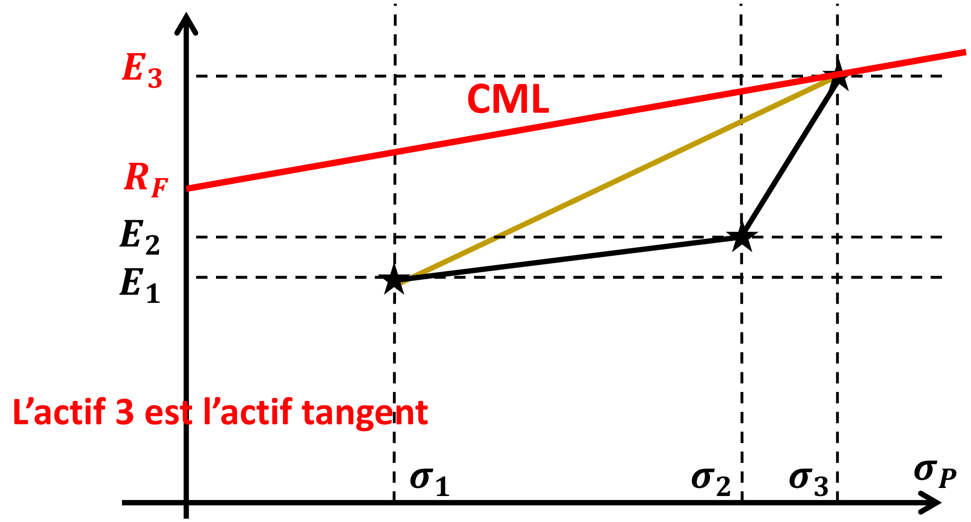


Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
- Introduction d'un placement sans risque, taux R_F
  - *Quelle est la forme du portefeuille « tangent » intervenant dans la CML ? On distinguera les deux cas précédents, ainsi que l'influence du niveau du taux sans risque.*
  - *Le portefeuille tangent est constitué d'actifs risqués*
  - *La pente de la demi-droite reliant l'actif sans risque à un portefeuille est le ratio de Sharpe de ce portefeuille*
  - *Le portefeuille tangent maximise le ratio de Sharpe*
  - *Les deux graphiques suivants montrent deux situations correspondant à deux valeurs de* R_F

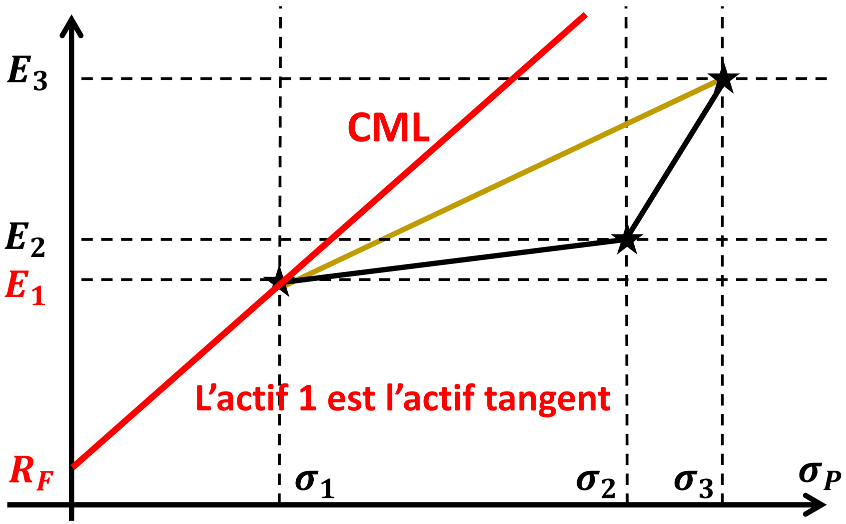
Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert



Trois actifs parfaitement corrélés

- Trois actifs, corrélations parfaites, pas de vente à découvert
  - *Selon la valeur du taux sans risque $\boldsymbol{R_F}$, le portefeuille tangent est toujours constitué uniquement d'un des trois actifs*
    - On omet les cas dégénérés où le portefeuille tangent n'est pas unique, correspondant à l'égalité des ratios de Sharpe.
  - *Le portefeuille tangent maximisant le ratio de Sharpe, il suffit donc de calculer les ratios de Sharpe des trois actifs*
  - *Le portefeuille tangent est constitué à 100% de l'actif de ratio de Sharpe maximal $\boldsymbol{E_i - R_F / \sigma_i}$*
    - Il n'y a aucune demande pour les deux autres actifs, qui sont parfaitement corrélés
    - Ils n'apportent donc aucun bénéfice en termes de diversification et ils sont dominés

Exercice : portefeuille de variance minimale

Cet exercice nécessite de savoir trouver le minimum d'une fonction

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *On considère deux titres risqués $\boldsymbol{1, 2}$*
  - *Espérances des rentabilités : $\boldsymbol{E_1, E_2}$*
  - *Écart-types des rentabilités $\boldsymbol{\sigma_1, \sigma_2}$*
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités $\boldsymbol{\rho}$*
- A)Variance du portefeuille
  - $\boldsymbol{X_1, X_2}$ *: fractions de la richesse allouées au titres $\boldsymbol{1, 2}$*
  - *Rappeler l'expression de la variance du portefeuille $\boldsymbol{\sigma_P^2}$*
  - *Dépend-elle des espérances de rentabilité ?*
  - *À quoi correspond la fonction $\boldsymbol{X_1 \to \sigma_P^2(X_1)}$?*

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2 = X_1^2\sigma_1^2 + 2\rho X_1 X_2 \sigma_1 \sigma_2 + X_2^2 \sigma_2^2}$
  - *Où $\boldsymbol{X_2 = 1 - X_1}$*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2}$ *ne dépend pas de $\boldsymbol{E_1, E_2}$*
  - $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$ *est un trinôme*
    - Polynôme du second degré de la forme $\boldsymbol{aX_1^2 + bX_1 + c}$
  - *Le graphe de la fonction $\boldsymbol{X_1 \to \sigma_P^2(X_1)}$ est une parabole*
- B) Minimum de $\boldsymbol{\sigma_P^2(X_1)}$, pas de contrainte de vente à découvert
  - *Trouver l'allocation $\boldsymbol{X_1}$, telle que la variance du portefeuille est minimale*
  - *Quand $\boldsymbol{X_1}$ devient-il négatif ?*

Exercice : portefeuille de variance minimale

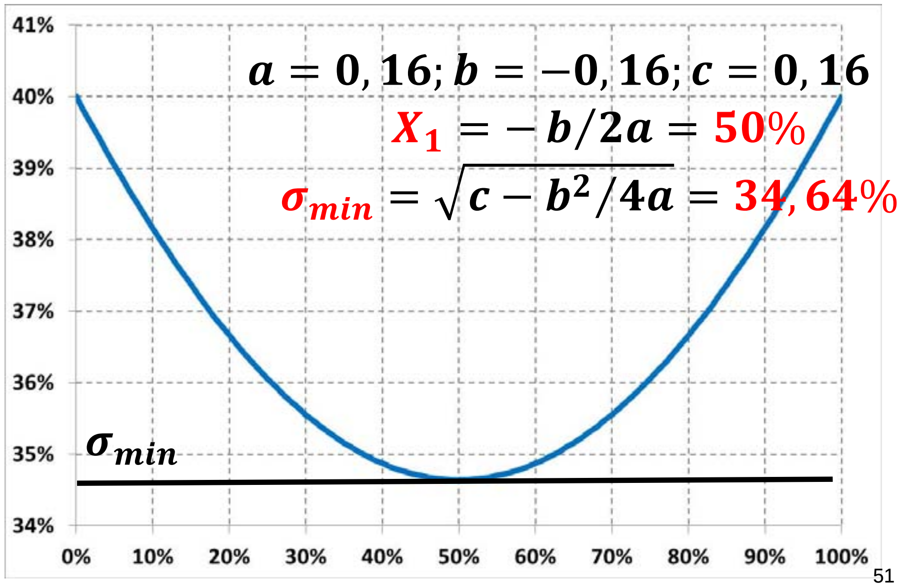
- Allocation X_1 minimisant de $\sigma_P^2(X_1)$
  - $\sigma_P^2(X_1) = X_1^2\sigma_1^2 + 2\rho X_1 X_2 \sigma_1\sigma_2 + X_2^2\sigma_2^2$
    - Où $X_2 = 1 - X_1$
  - $\sigma_P^2(X_1) = aX_1^2 + bX_1 + c$
    - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
    - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
    - $c = \sigma_2^2$
- Si $a > 0$, $\sigma_P^2(X_1)$ est minimal en $X_1 = -b/2a$
    - Calcul de la dérivée de $\sigma_P^2(X_1)$
    - $d\sigma_P^2(X_1)/dX_1 = 2aX_1 + b = 0 \Leftrightarrow X_1 = -b/2a$
- $X_1 < 0 \Leftrightarrow b > 0 \Leftrightarrow \rho\sigma_1 > \sigma_2 \Leftrightarrow \beta_{1/2} > 1$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
  - *Minimum de $\sigma_P^2(X_1)$, pas de contrainte de vente à découvert*
- C) Quel est le minimum de la variance du portefeuille ?
- Minimum de $\sigma_P^2(X_1)$
  - $\sigma_P^2(X_1) = aX_1^2 + bX_1 + c$
    - $a = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$
    - $b = 2\rho\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2^2$
    - $c = \sigma_2^2$
  - *Écriture de la forme canonique du trinôme*
  - $\sigma_P^2(X_1) = a(X_1 - b/2a)^2 + c - b^2/4a$
- Le minimum de $\sigma_P^2(X_1)$ est donc $c - b^2/4a = -\Delta/4a$
  - *Où $\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant du trinôme*

En bleu, $X_1 \rightarrow \sigma_P(X_1)$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 40\%, \rho = 0,5$



Exercice : portefeuille de variance minimale

- Problème : portefeuille de variance minimale
- D) Il n'est maintenant plus possible de vendre à découvert le titre **1**. Quelle est l'impact de cette contrainte ?
  - *Il faut minimiser $\sigma_P^2(X_1)$ sous la contrainte $X_1 \geq 0$*
  - *Si la contrainte n'est pas active, comme dans le cas précédent, où $X_1 = 50\%$, rien ne change*
  - *Si $X_1 = -b/2a < 0$ ou de manière équivalente si $\rho\sigma_1 > \sigma_2$, l'optimum précédent ne satisfait pas la contrainte de vente à découvert*
  - *On obtient alors le graphique suivant*
    - Allocation en abscisse
    - Écart-type des rentabilités du portefeuille en ordonnée

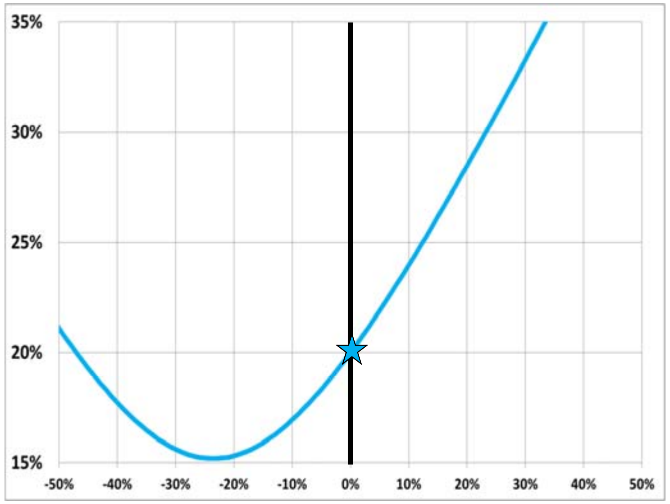
contrainte $X_1 \geq 0$

Exercice : portefeuille de variance minimale

- portefeuille de variance minimale : cas où $\rho\sigma_1 < \sigma_2$

Minimum de la variance obtenu pour $X_1 < 0$
À droite du point minimum, la variance croit avec X_1

Pour $X_1 \geq 0$,
$\sigma_P^2(X_1) \geq \sigma_P^2(0)$
le portefeuille de variance minimale est obtenu pour $X_1 = 0$
Optimum en coin



Exercices complémentaires corrigés

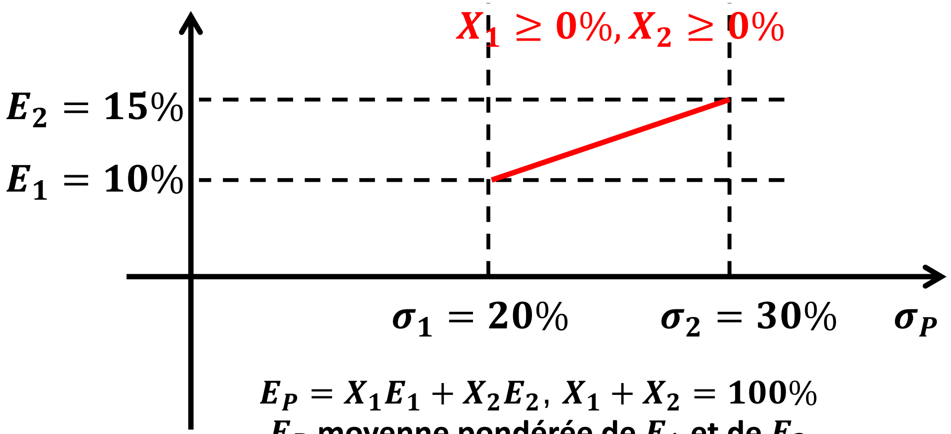
- *Tirés des partiels des années passées*
- Vente à découvert : $\rho_{12} = +1$
- Portefeuille de variance minimale
- Corrélations parfaites – arbitrage
- $\rho_{12} = -1$
- À venir exercice de synthèse commencé le 17 octobre

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Problème : titres avec des rentabilités parfaitement corrélés
  - *Deux titres* $1, 2$
  - *Espérances de rentabilités :* $E_1 = 10\%, E_2 = 15\%$
  - *Écart-types des rentabilités* $\sigma_1 = 20\%, \sigma_2 = 30\%$
  - *Coefficient de corrélation entre les rentabilités :* $\rho_{12} = +1$
  - *A) Représenter graphiquement dans le plan* (E_P, σ_P) *(écart-type des rentabilités en abscisse, espérance des rentabilités en ordonnée), l'ensemble des portefeuilles formés des titres* 1 *et* 2*. On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.*
  - *B) Représenter dans le plan* (E_P, σ_P)*, l'ensemble des portefeuilles formés des titres* 1 *et* 2*. On ne peut vendre à découvert* 2*, mais c'est possible pour* 1

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

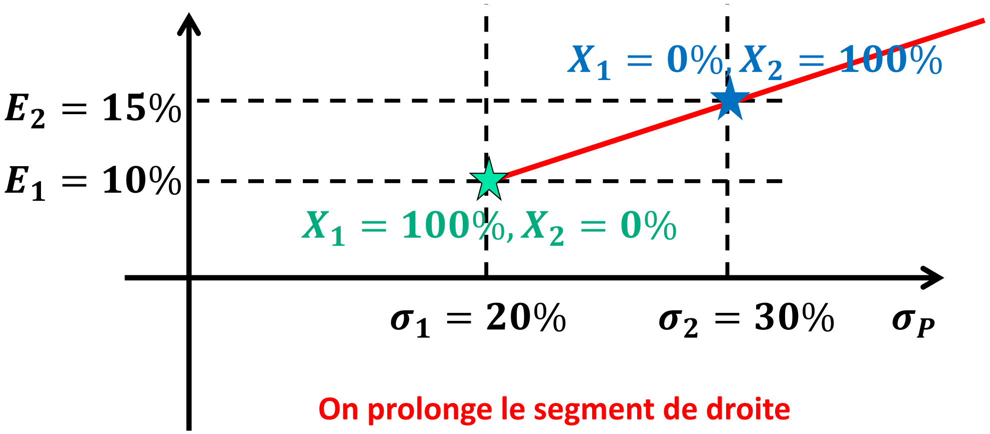
- A) On suppose qu'on ne peut vendre à découvert aucun des deux titres.



$E_P = X_1E_1 + X_2E_2,\ X_1 + X_2 = 100\%$
E_P moyenne pondérée de E_1 et de E_2

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

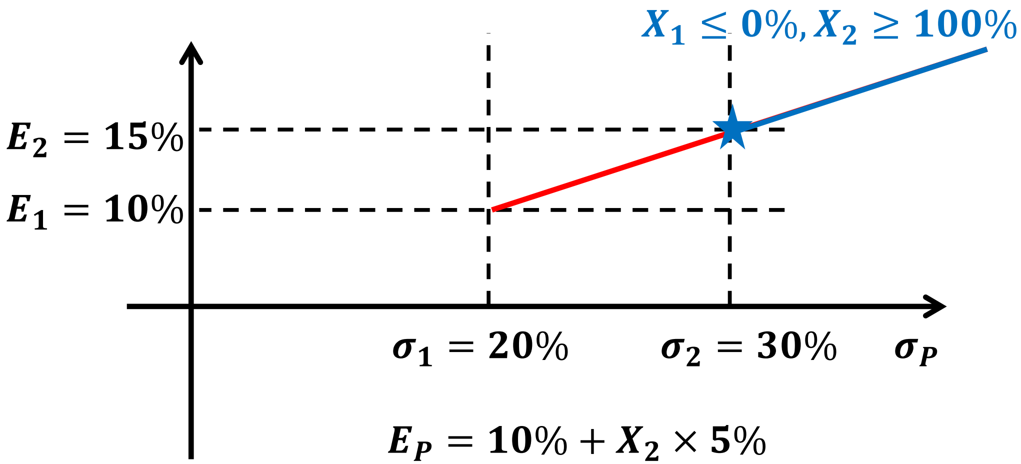
- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



On prolonge le segment de droite précédent vers la droite

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- B) On ne peut vendre à découvert **2**, mais c'est possible pour **1**



Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

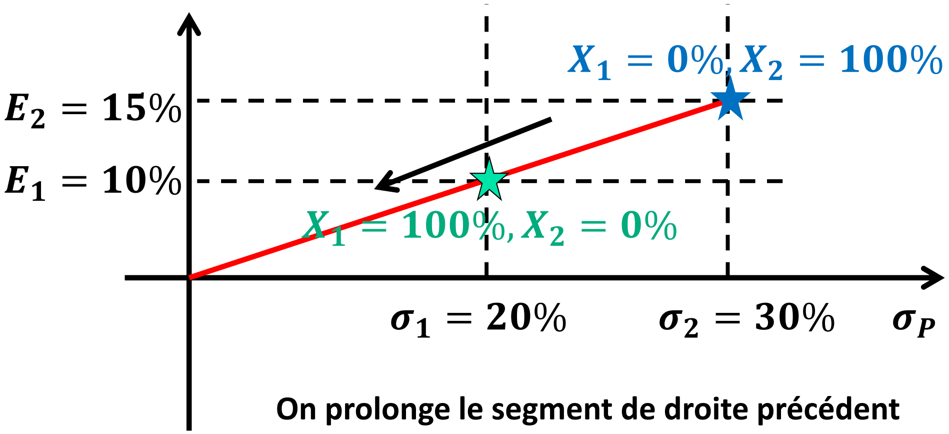
- Pour résoudre le problème B), il faut se souvenir que
  - *Quand le coefficient de corrélation est égal à* $+1$ *ou à* -1, *on a affaire à des segments de droites ou à des demi-droites*
  - $E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2 = (1 - X_2) \times 10\% + X_2 \times 15\%$
  - $E_P = 10\% + X_2 \times 5\%$
  - *Interdiction de vendre à découvert le titre* **2**, $X_2 \geq 0$
  - $X_2 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \geq 10\% = E_1$
  - *L'espérance des rentabilités des portefeuilles,* E_P, *est toujours supérieure à l'espérance de rentabilité du titre* **1**
  - *La demi-droite en bleu correspond aux cas où le titre* **1** *est vendu à découvert (*$X_1 \leq 0\%$*) et où* $X_2 \geq 100\%$

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- Titres avec des rentabilités parfaitement corrélés (suite)
  - *C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre* **2** *mais pas le titre* **1**. *Représenter dans le plan* (E_P, σ_P), *l'ensemble des portefeuilles formés des titres* **1** *et* **2**.
  - *On reprend des éléments de l'analyse précédente, mais il y a une difficulté supplémentaire*
  - *Commençons par ce qui est similaire au cas précédent*
  - *Contrainte d'absence de vente à découvert de* **1** *:* $X_1 \geq 0$
  - $E_P = X_1 E_1 + X_2 E_2 = X_1 E_1 + (1 - X_1) E_2 = E_2 + X_1 \times (E_1 - E_2)$
  - $E_P = 15\% - X_1 \times 5\%$
  - $X_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%$

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

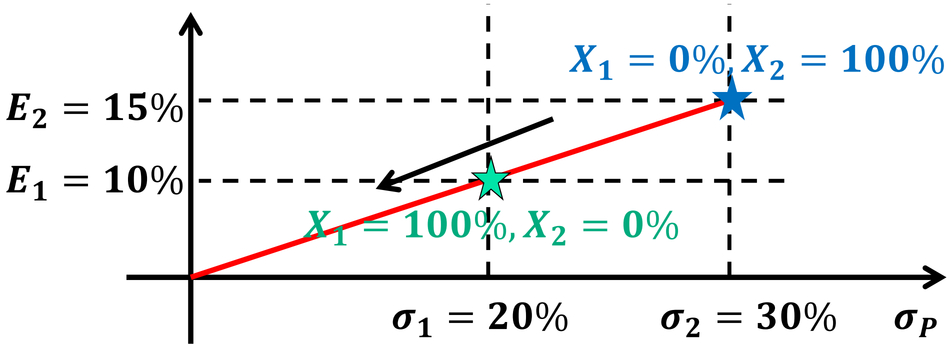
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



On prolonge le segment de droite précédent vers la gauche $X_1 \geq 0 \Leftrightarrow E_P \leq 15\%$

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



À chaque valeur de X_1 est associé un point sur le segment de droite rouge

En augmentant X_1, on se déplace dans le sens de la flèche

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

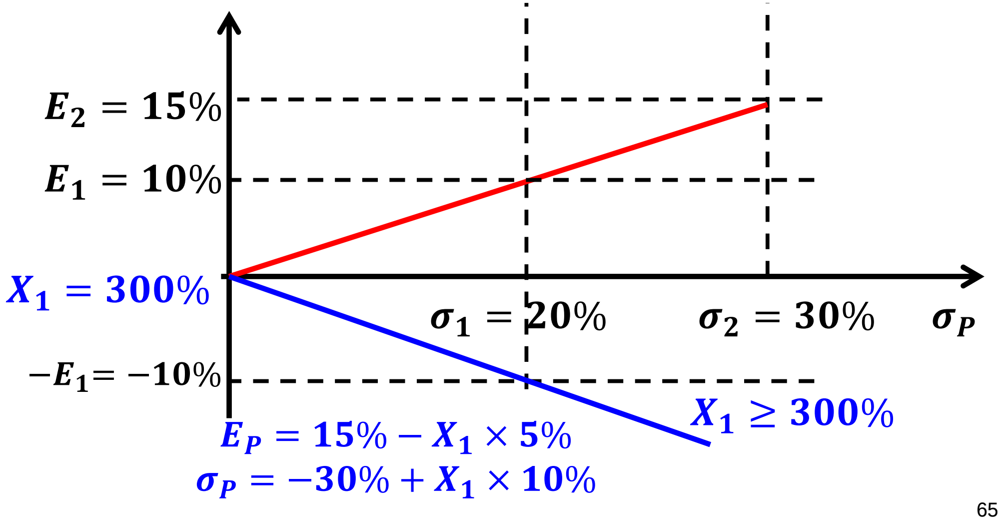
- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *En prolongeant le segment de droite précédent vers la gauche, on obtient une espérance de rentabilité égale à* $\mathbf{0}$
  - $E_P = 15\% - X_1 \times 5\%$
  - *Pour* $X_1 = 300\% \geq 0, E_P = 0$
  - *On peut voir sur le graphique qu'alors* $\sigma_P = 0$
  - *Ceci provient de* $E_2/E_1 = \sigma_2/\sigma_1 = 1,5$
  - *Autre approche : quand* $\rho_{12} = +1$
  - $\sigma_P = |X_1\sigma_1 + X_2\sigma_2| = |X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2|$
  - $\sigma_P = |\sigma_2 + X_1(\sigma_1 - \sigma_2)| = |30\% - X_1 \times 10\%|$
  - $X_1 = 300\% \Rightarrow \sigma_P = 0\%$

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.
  - *Remarque*
    - On a ainsi formé un portefeuille tel que $E_P = 0$, $\sigma_P = 0$
    - Actif sans risque/dépôt à vue non rémunéré sans risque de défaut
  - *On a vu en cours que l'ensemble des portefeuilles constitués de* **1** *et de* **2** *pouvait être formé de deux demi-droites*
    - Ici, si $X_1 \geq 300\%$,
    - $E_P = 15\% - X_1 \times 5\% \leq 0$
    - $\sigma_P = |30\% - X_1 \times 10\%|$
    - $X_1 \geq 300\%, 30\% - X_1 \times 10\% \leq 0$
    - $\sigma_P = -30\% + X_1 \times 10\%$

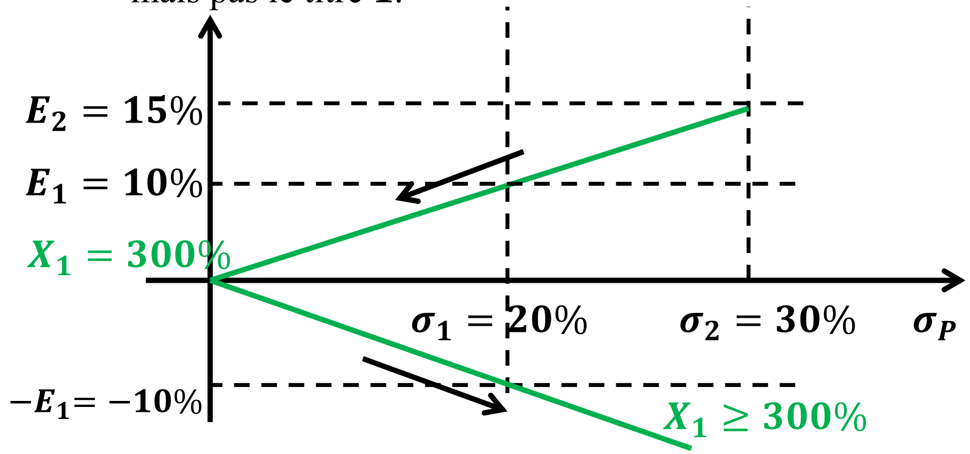
Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **1** mais pas le titre **2**.



Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- C) On suppose que l'on peut vendre à découvert le titre **2** mais pas le titre **1**.



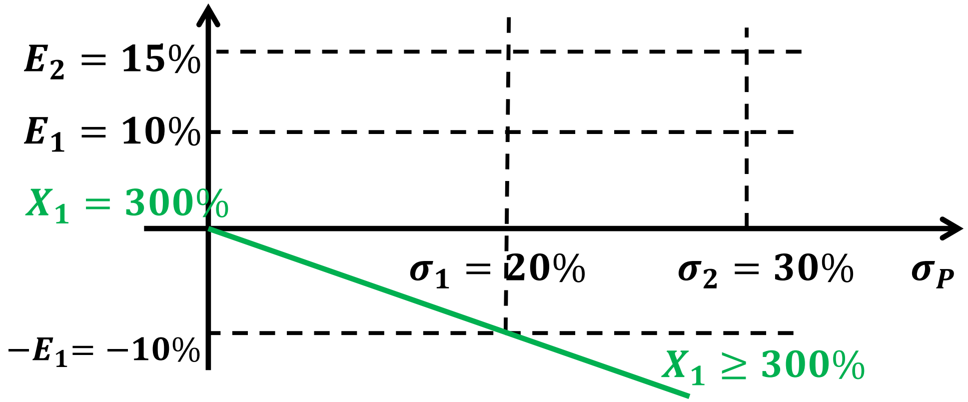
À chaque valeur de X_1 est associé un point
En augmentant X_1, on se déplace dans le sens de la flèche

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs

Exercice : vente à découvert : $\rho_{12} = +1$

- D) Ensemble des portefeuilles formés des titres **1** et **2** qui ne sont jamais choisis par les investisseurs ayant des préférences moyenne-variance



Tous les titres sur la demi-droite en vert sont dominés par l'actif sans risque / dépôt à vue non rémunéré

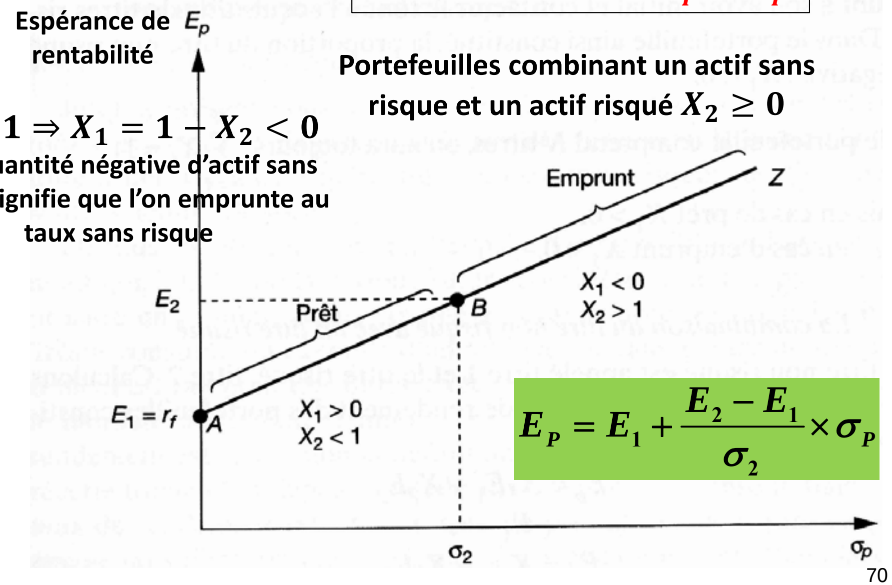
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

- Examen du cas où des titres ou des portefeuilles de titres sont parfaitement corrélés
  - *Situation déjà examinée pour deux titres risqués*
  - *L'ensemble des portefeuilles constitués des deux titres en quantités positives est représenté par le segment de droite reliant les points associés à ces deux titres*
  - *Que se passe-t-il si on peut vendre à découvert ces deux titres ?*
- Dans le cas où on combine un actif sans risque et un titre risqué, l'ensemble des portefeuilles est représenté par une demi-droite
  - *Y a-t-il un lien avec le cas précédent ?*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Graphique 2.10

Relation affine entre σ_P et E_P



Portefeuilles combinant un actif sans risque et un actif risqué $X_2 \geq 0$

$X_2 > 1 \Rightarrow X_1 = 1 - X_2 < 0$

Une quantité négative d'actif sans risque signifie que l'on emprunte au taux sans risque

$$E_P = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{\sigma_2} \times \sigma_P$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

Le segment de droite reliant les points A et B représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, en quantités positives, pour un niveau de corrélation égal à 1

- Corrélation $\rho_{12} = 1$
- **Segment de droite ?**

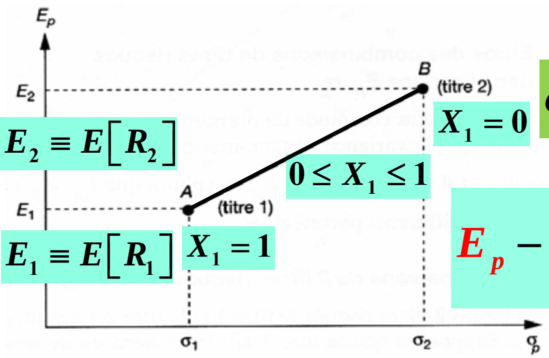
$$E_p = X_1 \times E[R_1] + (1 - X_1) \times E[R_2]$$

$$E_p - E_2 = X_1 \times (E_1 - E_2)$$

$$\sigma_P = X_1\sigma_1 + (1 - X_1)\sigma_2$$

$$\sigma_P - \sigma_2 = X_1(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Espérance de rentabilité



$E_2 \equiv E[R_2]$

$X_1 = 0$

$0 \leq X_1 \leq 1$

$E_1 \equiv E[R_1]$

$X_1 = 1$

$$E_p - E_2 = (\sigma_P - \sigma_2) \times \frac{E_1 - E_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

Écart-type de la rentabilité

Relation affine entre espérance de rentabilité et écart-type des rentabilités

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Etude du cas $\rho_{12} = +1$
  - *Fraction de la richesse investie dans le titre 1 :* $X_1 = X$
  - *Rentabilité du portefeuille* $R_P = XR_1 + (1 - X)R_2$
  - *Espérances des rentabilités* $E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]$

$$E[R_P] = E_P = XE[R_1] + (1 - X)E[R_2] = E_2 + X(E_1 - E_2)$$

  - *Variance des rentabilités :*

$$\text{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}X(1 - X)\sigma_1\sigma_2 + (1 - X)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2X(1 - X)\sigma_1\sigma_2 + (1 - X)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = (X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2)^2$$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

$$\sigma_P^2 = \left(X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2\right)^2$$

- *Écart-type des rentabilités*

$$\sigma_P = \left|X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2\right|$$

  - Fait intervenir une valeur absolue
  - Si $X_1 = X \geq 0$ et $X_2 = 1 - X \geq 0$,
  - alors $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 \geq 0$
  - Puisque $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0$
  - Dans ce cas, $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$
  - Prenons $\sigma_2 = 20\%$, $\sigma_1 = 10\%$, $X = 3$, $1 - X = -2$
  - $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 = 3 \times 10\% + (1-3) \times 20\% = -10\%$
  - $\sigma_P = |-10\%| = 10\%$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = \left|X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2\right|$$

  - *Si $X < 0$ ou $1 - X < 0$,*
  - *$X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$ peut devenir négatif*
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = -(X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2)$
  - *Si $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 \leq 0$*
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$
  - *Si $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 \geq 0$*
  - *On peut transformer la condition de signe sur $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$ en une condition sur X*

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- On peut transformer la condition de signe sur $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2$ en une condition sur X
- $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 = \sigma_2 + X(\sigma_1 - \sigma_2)$
- On va supposer que $\sigma_2 > \sigma_1$
  - $\sigma_1 - \sigma_2 < 0$
  - $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow X(\sigma_1 - \sigma_2) > -\sigma_2$
  - $X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2 > 0 \Leftrightarrow X < -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- Si $X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2| = 0$
- On a alors un portefeuille non risqué construit à partir de deux titres risqués

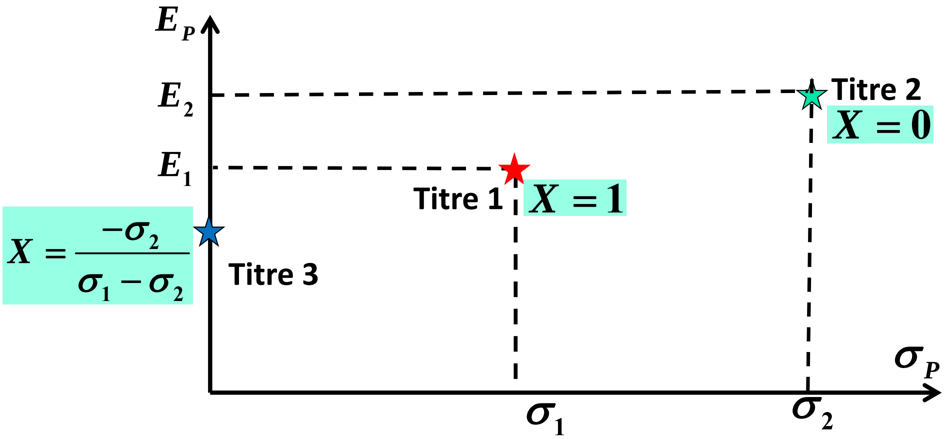
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Espérance de rentabilité de ce portefeuille non risqué
- $X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- $E_P = E_2 + X(E_1 - E_2)$
  - *E_P espérance de rentabilité du portefeuille non risqué*
  - *E_1 espérance de rentabilité du titre 1*
  - *E_1 espérance de rentabilité du titre 2*
- $E_P = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- Considérerons le portefeuille non risqué comme un titre
  - *Noté 3*
  - $E_3 = E_P, \sigma_3 = \sigma_P = 0$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

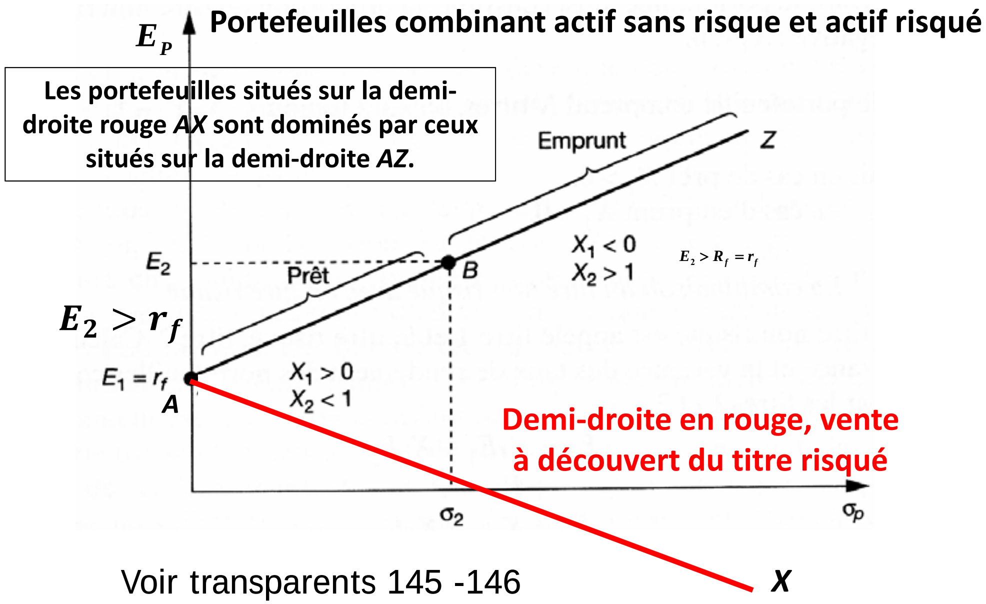
- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $E_P = (1 - X_2)R_F + X_2E_2 = R_F + X_2(E_2 - X_2)$
  - $E_P = R_F + X_2(E_2 - X_2) < R_F \Leftrightarrow X_2 < 0$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$



Voir transparents 145 -146

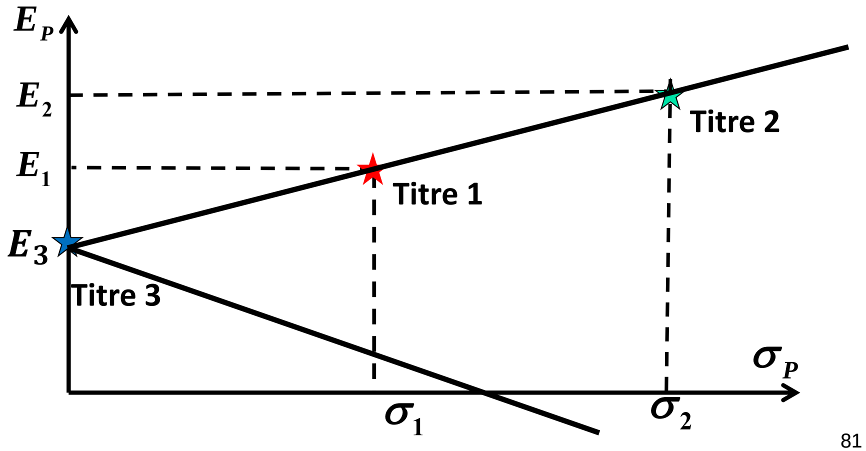
Exercice : corrélations parfaites - arbitrage $\rho_{12} = +1$

- Le portefeuille 3 non risqué est constitué de titres 1 et 2
- Tout portefeuille constitué de titres 3 et de titres 1 est donc composé de titres 1 et de titres 2
- En étudiant la CML, on a vu l'ensemble des portefeuilles constitué d'un placement sans risque et d'un titre risqué
  - *Ici le placement sans risque est le titre 3*
- Il s'agit de la réunion de deux demi-droites
  - *La demi-droite inférieure correspond à des espérances de rentabilité inférieures au taux sans risque.*
  - *Et à des ventes à découvert du titre risqué :*
  - *En effet,* $E_P = (1 - X_2)R_F + X_2E_2 = R_F + X_2(E_2 - X_2)$
  - $E_P = R_F + X_2(E_2 - X_2) < R_F \Leftrightarrow X_2 < 0$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

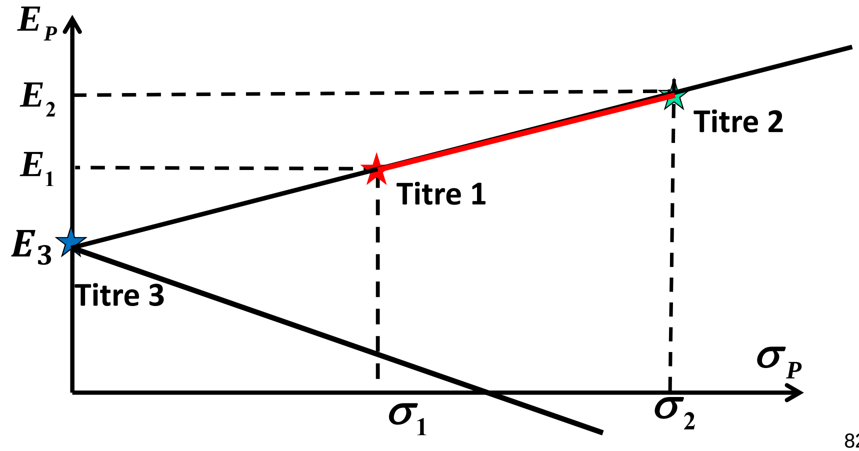
- Représentation des titres 1 et 2 et du portefeuille sans risque (3)
  - *Plan écart-type des rentabilités - espérance des rentabilités*
  - *Cas où* $E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- Ensemble des portefeuilles formés de 1 et de 2
  - *Pour toutes les valeurs de* X
  - *En rouge, portefeuilles sans vente à découvert,* $0 \leq X \leq 1$



Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- On rappelle que si $X = -\sigma_2/(\sigma_1 - \sigma_2)$,
- $\sigma_P = |X\sigma_1 + (1 - X)\sigma_2| = 0$
- $E_P = E_3 = E_2 - \sigma_2(E_1 - E_2)/(\sigma_1 - \sigma_2)$
- S'il existe un placement sans risque au taux R_f, alors $E_3 = R_f$
  - *En l'absence d'opportunités d'arbitrage*
  - *Si* $E_3 > R_f$*, on peut emprunter* $k > 0$ *euros au taux* R_f *et investir cette somme dans le titre* 3
  - *La mise de fonds à la date courante est nulle*
  - *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit* $k \times (1 + R_f)$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- *À la date suivant la date courante, on doit rembourser l'emprunt soit* $k \times (1 + R_f)$
- *On récupère* $k \times (1 + E_3)$*du placement en titre* 3
- *Soit* $k \times (E_3 - R_f) > 0$
- *Comme* k *est arbitrairement grand, le profit à la date future est arbitrairement grand*
- *Le risque est nul : les rentabilités sont non aléatoires*
- *La mise de fonds initiale est nulle*
- *La situation précédente est une opportunité d'arbitrage*
- *On admet couramment qu'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage sur les marchés « sans frictions »*
- *Donc, on ne peut avoir* $E_3 > R_f$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

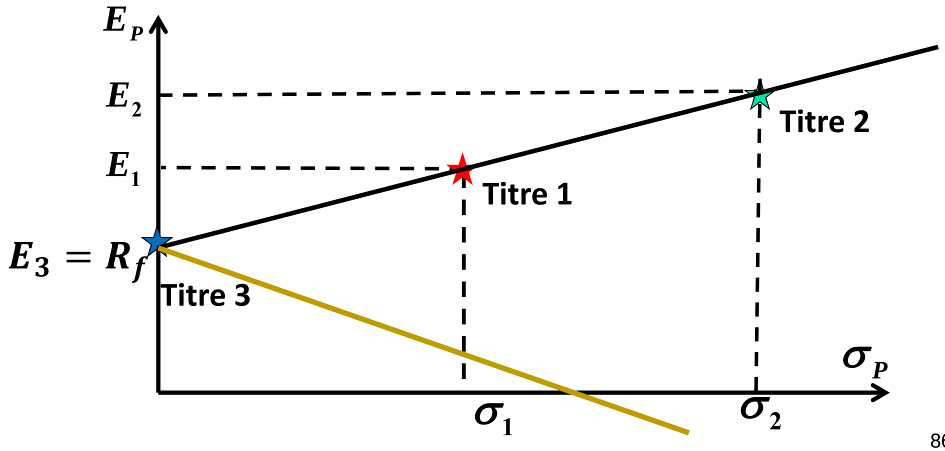
$\rho_{12} = +1$

- Si l'on suppose maintenant que $E_3 < R_f$
  - *On prête une somme k au taux R_f*
  - *On vend à découvert des titres $\mathbf{3}$ pour un montant k*
  - *L'investissement net à la date courante est nul*
  - *On récupère à la date suivant la date courante le montant*
  - $k \times (R_f - E_3) > 0$
  - *On a à nouveau construit une opportunité d'arbitrage*
  - *S'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, on ne peut pas avoir $E_3 < R_f$*
- La seule valeur de E_3 compatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage est $E_3 = R_f$

Exercice : corrélations parfaites - arbitrage

$\rho_{12} = +1$

- *La demi-droite noire représente les portefeuilles constitués de placement sans risque et de titre* **2**
- *Le titre* **1** *était en fait un portefeuille constitué de placement sans risque et de titre* **2**



Exercice $\rho_{12} = -1$

- Exercice : étude du cas extrême $\rho_{12} = -1$
  - *Ensemble des portefeuilles constitués de deux actifs quand le coefficient de corrélation est égal à* $-\mathbf{1}$ *?*
    - Fraction de la richesse investie dans le titre $\mathbf{1}$: $X_1 = X$
    - Rentabilité du portefeuille $R_P = XR_1 + (1 - X)R_2$
    - Espérances des rentabilités : $E_1 = E[R_1], E_2 = E[R_2]$

$$E[R_P] = E_P = XE[R_1] + (1-X)E[R_2] = E_2 + X(E_1 - E_2)$$

- Variance des rentabilités :

$$\text{Var}[R_P] = \sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 + 2\rho_{12}X(1-X)\sigma_1\sigma_2 + (1-X)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = X^2\sigma_1^2 - 2X(1-X)\sigma_1\sigma_2 + (1-X)^2\sigma_2^2$$

$$\sigma_P^2 = \left(X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2\right)^2$$

Exercice $\rho_{12} = -1$

- Écart-type des rentabilités

$$\sigma_P = \left| X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \right|$$

- Fait intervenir une valeur absolue

$$\begin{cases} \sigma_P = X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2, \text{ si } X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \geq 0 \\ \sigma_P = -X\sigma_1 + (1-X)\sigma_2, \text{ si } X\sigma_1 - (1-X)\sigma_2 \leq 0 \end{cases}$$

- $\sigma_P = 0$ si $X = \sigma_2/(\sigma_1 + \sigma_2)$. Alors,

$$X \geq 0, 1 - X = \sigma_1/(\sigma_1 + \sigma_2) \geq 0$$

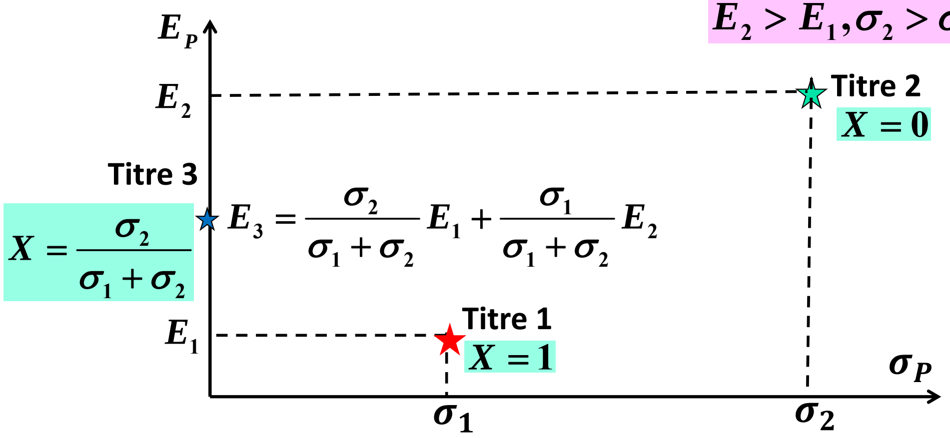
- *Il est possible dans le cas étudié ($\rho_{12} = -1$) de constituer un portefeuille sans risque (titre 3) à partir des titres risqués 1 et 2 !*
  - Taux sans risque associé

$$E_P = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}E_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}E_2$$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

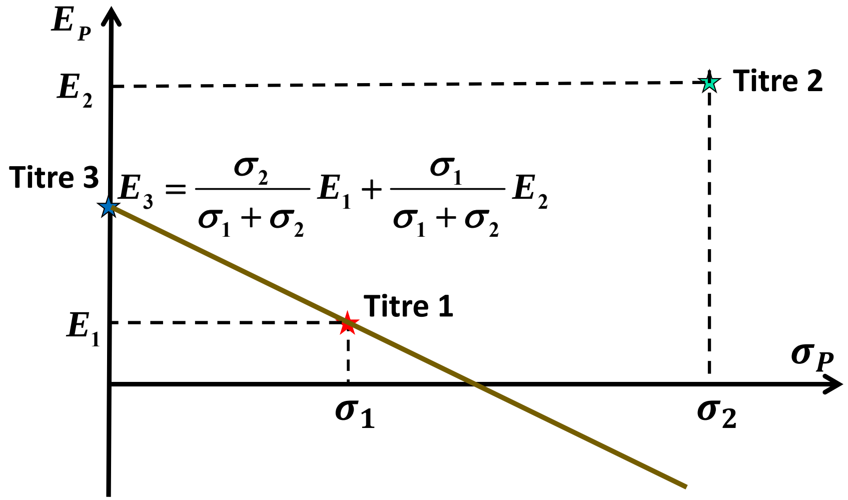
- Représentation des deux titres **1** et **2** et du titre **3** (sans risque)
  - *Plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *Pour simplifier l'analyse, on se restreint au cas :*

$$E_2 > E_1, \sigma_2 > \sigma_1$$



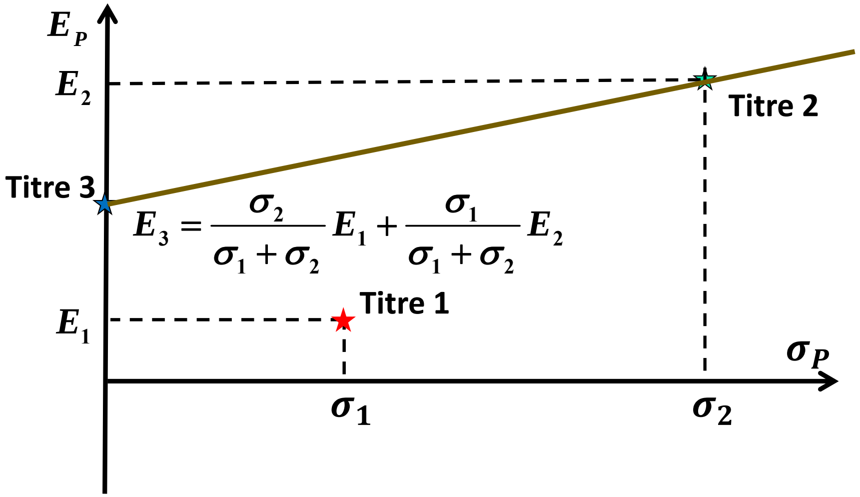
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 1 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 1 et 3



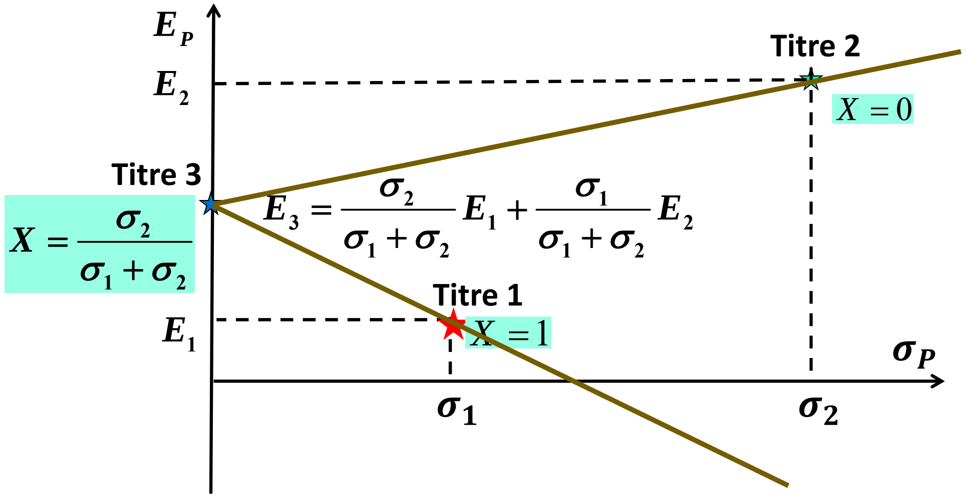
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Si on combine les titres 2 et 3, on obtient la demi-droite reliant les points associés aux titres 2 et 3



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Au total, l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est représenté par la réunion des deux demi-droites précédentes



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- On remarque que l'ensemble des portefeuilles constitués des titres risqués 1 et 2, quand $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$
- a exactement la même forme géométrique que l'ensemble des portefeuilles constitués de l'actif sans risque et d'un actif risqué
  - *Réunion de deux demi-droites*
  - *Ce n'est pas une coïncidence car quand $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$, on peut reconstituer un actif sans risque 3, à partir des titres 1 et 2.*
  - *Le portefeuille 3 comporte une quantité non nulle de titre 1*

$$\boldsymbol{X = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} > 0}$$

  - *L'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2 est identique à l'ensemble des portefeuilles combinant le titre 1 et le portefeuille 3.*

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Étude du cas où les ventes à découvert sont interdites :

$$\boldsymbol{0 \le X \le 1}$$

  - *Le transparent précédent représente l'ensemble des portefeuilles combinant les titres 1 et 2, de rentabilité*
  - $\boldsymbol{R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2, \quad X \in \mathbb{R}}$
  - *Dans le plan (écart-type des rentabilités, espérance des rentabilités)*
  - *L'ensemble des portefeuilles de rentabilité $\boldsymbol{R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2,\ X \in [0, 1]}$*
  - *est donc inclus dans la réunion des deux demi-droites présentées dans le transparent précédent.*
  - *Déterminons quelle partie de deux demi-droites retenir*

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Examinons comment la rentabilité des portefeuilles constitués de titres **1** et **2** dépend de $\boldsymbol{X}$

$$\boldsymbol{R_P = X \times R_1 + (1 - X) \times R_2,\ \ X \in \mathbb{R}}$$

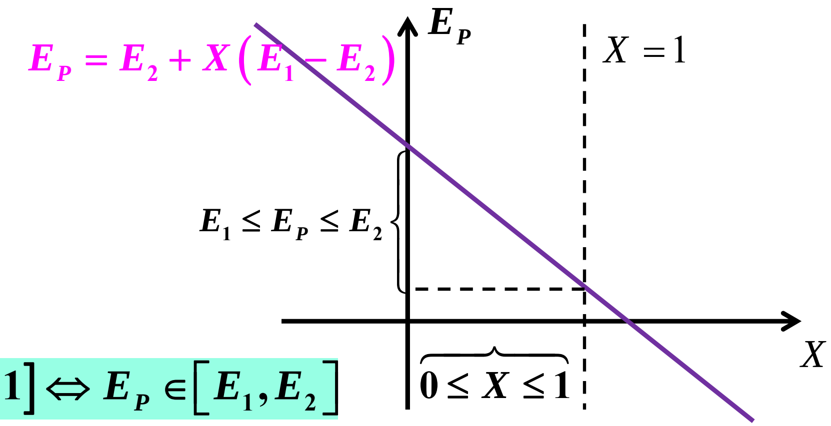
  - *On rappelle que :*

$$\boldsymbol{E[R_P] = E_P = XE[R_1] + (1 - X)E[R_2] = E_2 + X(E_1 - E_2)}$$

  - *Avec $\boldsymbol{E_1 < E_2}$. $\boldsymbol{E_P}$ est une fonction affine décroissante de $\boldsymbol{X}$*
    - Quand $\boldsymbol{X < 0,\ E_P > E_2}$
    - Quand $\boldsymbol{X > 1,\ E_P < E_1}$
    - Quand $\boldsymbol{X}$croit de $\boldsymbol{0}$ à $\boldsymbol{1}$, $\boldsymbol{E_P}$ décroit de $\boldsymbol{E_2}$à $\boldsymbol{E_1}$
  - *Au total* $\boldsymbol{X \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]}$

Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

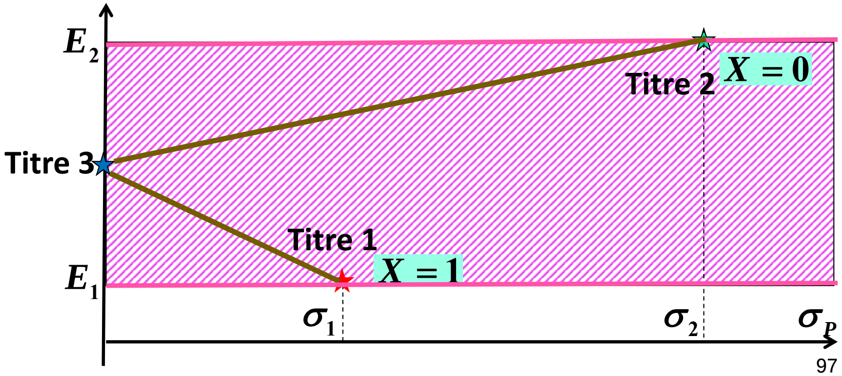
- Espérance de rentabilité des portefeuilles constitués de titres 1 et 2 en fonction de $\boldsymbol{X}$



$\boldsymbol{X \in [0,1] \Leftrightarrow E_P \in [E_1, E_2]}$

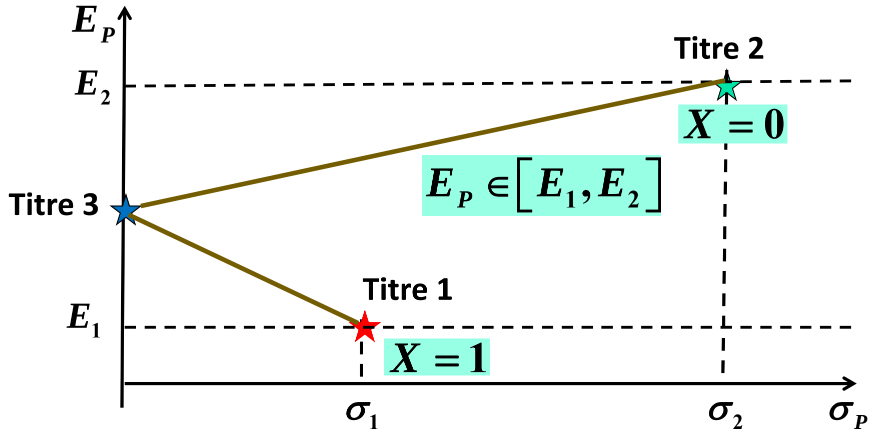
Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- *Ventes à découvert interdites :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2] \Leftrightarrow X \in [0, 1]}$
- *La zone hachurée en rose correspond à l'ensemble des portefeuilles tels que :* $\boldsymbol{E_P \in [E_1, E_2]}$
- *Les portefeuilles formés des titres* 1 *et* 2 *en quantités positives correspondent à l'intersection des deux demi-droites précédentes et de la zone hachurée*



Exercice $\boldsymbol{\rho_{12} = -1}$

- Ventes à découvert interdites : $\boldsymbol{0 \leq X \leq 1}$
  - *L'ensemble des portefeuilles formés des titres* 1 *et* 2 *en quantités positives est la réunion des deux segments de droite*



Liens entre notation du cours et des TD (rappels)

- Quelques notations supplémentaires (poly. de TD)
  - $\boldsymbol{r_s = (E_M - R_f)/\sigma_M^2}$
  - *On peut écrire*
  - $\boldsymbol{E_i = R_f + \beta_i(E_M - R_f) = R_f + r_s Cov(R_i, R_M)}$
  - $\boldsymbol{E_M - R_f}$ *la pente de la SML quand les Betas sont en abscisse*
  - $\boldsymbol{r_s}$ *pente de la SML quand les covariances sont en abscisse*
  - $\boldsymbol{r_e = (E_M - R_f)/\sigma_M}$
  - $\boldsymbol{r_e}$ *ratio de Sharpe, pente de la CML*
  - $\boldsymbol{E_i = R_f + r_e \times (\beta_i \sigma_M)}$