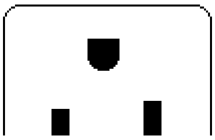
Chapitre 1

L'alimentation d'énergie électrique 120/240 volts

1.0 - Introduction

Au Québec, en 1998, les foyers sont alimentés par une source d' énergie électrique que les gens nomment le 120/240 volts. Nous allons étudier les circuits électriques en partant de ce fait pour comprendre comment fonctionne la société moderne qui, sans électricité, est bien mal en point.

1.1 - La prise d'énergie où on raccorde le grille-pain



Si l'on regarde la prise d'énergie (prise de courant!) (fig 1) où chacun de nous raccorde son grille-pain, soit l'image à droite. Derrière la plaque, des pièces métalliques sont positionnées pour faire un bon contact avec la fiche de raccordement du grille-pain.

Trois fils arrivent dans la boîte derrière cette plaque. Ces trois fils sont normalement : un fil noir, un fil blanc, un fil vert ou un fil nu.

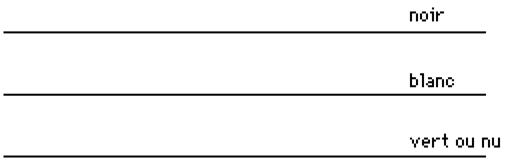


fig. 1

Si l'installation électrique suit les règles de l'art, le fil noir est raccordé à la petite ouverture, le fil blanc est raccordé à la grande ouverture, le fil vert ou le fil nu est raccordé à l'ouverture semi-circulaire.

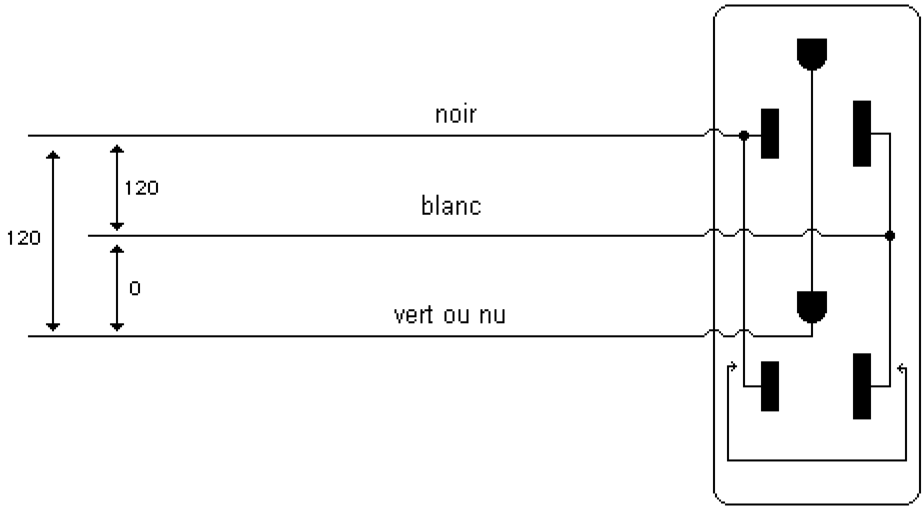


fig 1a: noir

Un voltmètre raccordé entre le fil noir et le fil blanc lira 120 volts.
Un voltmètre raccordé entre le fil noir et le fil vert ou nu lira 120 volts.
Un voltmètre raccordé entre le fil blanc et le fil vert ou nu lira 0 volts.

L'autre extrémité du câble à trois fils se rend au panneau de distribution de la résidence, panneau (Wildi figure 47-50) qui est illustré schématiquement.(fig 2)

Le raccordement de 120 volts utilise les fils L_1, N et la boîte de métal.

Une autre prise d'énergie de 120 volts serait raccordée aux fils L_2, N et la boîte de métal.

L_1, ligne #1
L_2, ligne #2
N, neutre

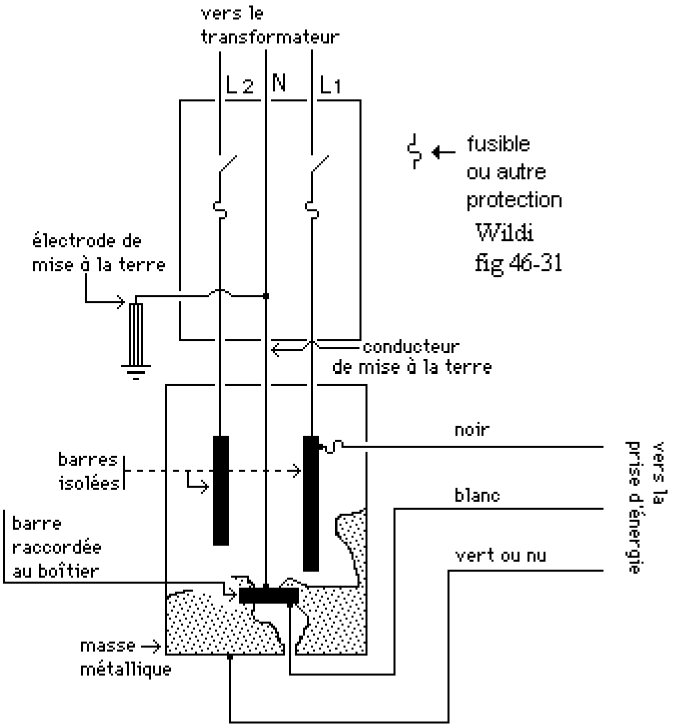
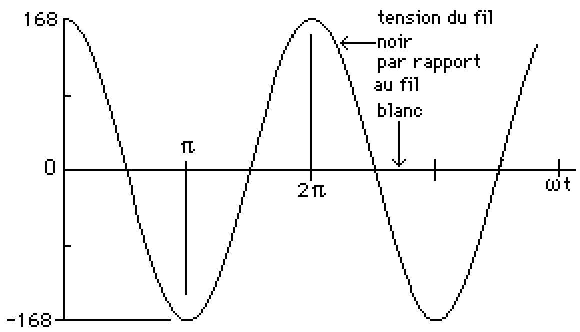


fig 2

Avant de raccorder un circuit de 240 volts, voyons comment se comporte la tension de 120 volts que nous avons observée avec un voltmètre.

Le voltmètre indique un chiffre parce qu'on l'a conçu pour ça. La tension disponible sur le réseau d'énergie n'est pas un chiffre, mais une fonction du temps que nous allons étudier.



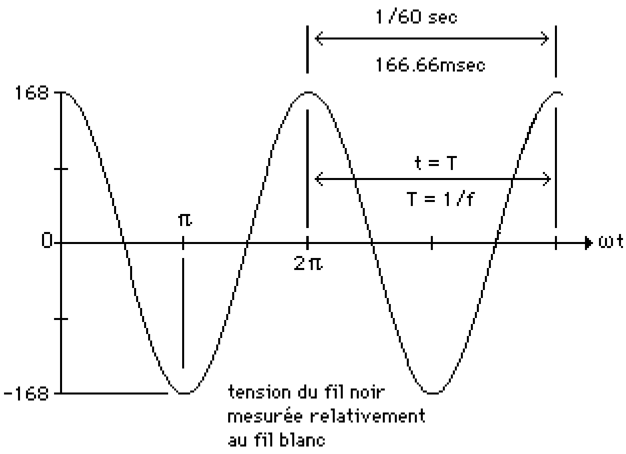
tension du fil noir mesurée relativement au fil blanc

Exprimons, sous forme trigonométrique, la tension du fil noir(n) par rapport au fil blanc(b):

$$V_{nb} = 168\cos\omega t$$

ce qui signifie que la tension du fil noir par rapport au fil blanc passe de 168 à -168 volts 60 fois par seconde car le réseau est à 60 Hz i.e. cycles/sec (f).

Hz
Période: Intervalle de temps constant séparant deux passages successifs de certaines grandeurs variables (dites périodiques) par la même valeur, avec même sens de la variation (la dérivée est de même signe)



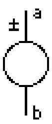
Du graphique on peut tirer: $\omega t = 2\pi$ si t = T(période) = 1/f d'où, ω(rad/sec) = $2\pi f$ soit 377 à 60 Hz
La tension du fil noir(n) par rapport au fil blanc(b) devient:

$$V_{nb} = 168\cos 377t$$

Représentons cette tension par un modèle simple pour ne pas avoir à faire le graphique illustré chaque fois que l'on aura à introduire une tension dans nos problèmes d'électricité.

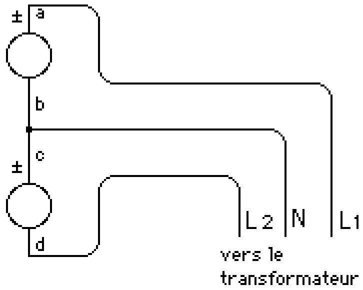
Modèle d'une source de tension alternative, notation à deux indices :

± signale une source alternative.
a et b sont les identifications des deux bornes de la source.

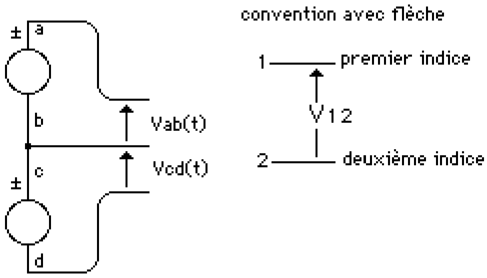


$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi)$
$V_{ab}(t)$ = tension du point "a" par rapport au point "b" et fonction du temps.
$V_{ba}(t)$ = tension du point "b" par rapport au point "a" et fonction du temps.
$V_{ab}(t) = - V_{ba}(t)$
V_{max} = valeur maximum de la fonction.
ω = pulsation angulaire en radians/seconde. $\omega = 2\pi f$
ϕ = angle de déphasage en radians permettant de donner une valeur autre que la valeur max. à t = 0.

Retournons maintenant à notre distribution domestique et faisons un modèle du circuit qui va au transformateur. Le transformateur est en réalité deux sources raccordées comme illustré.



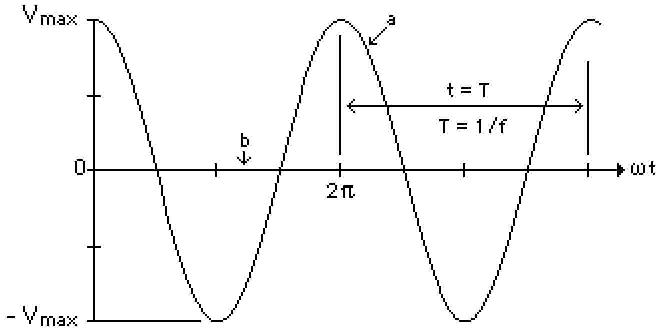
Nous allons voir maintenant la relativité de la référence.



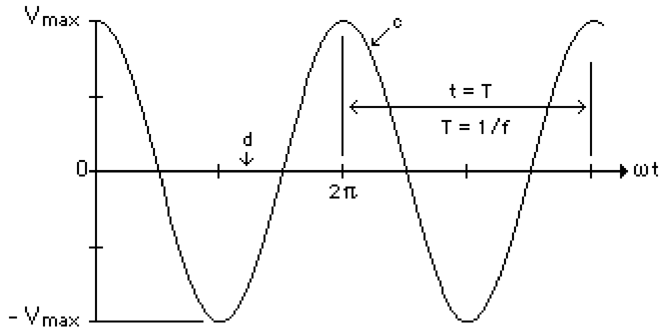
$$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi)$$
$$V_{cd}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi)$$

Posons $\phi = 0$ pour simplifier notre analyse. Pour pouvoir placer les deux tensions sur le même graphique, il faudrait avoir la même définition de l'axe de référence. Je peux changer le point "c" pour le point "d" sur le deuxième graphique en changeant le signe de la fonction .

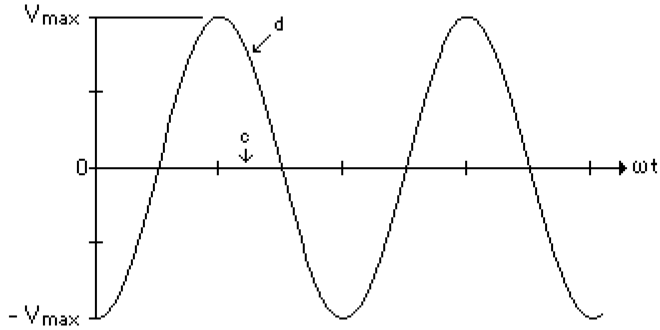
$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t)$



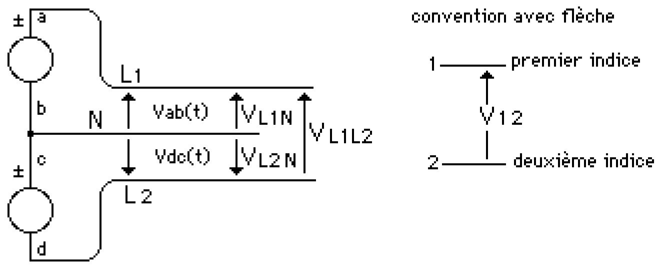
$V_{cd}(t) = V_{max}\cos(\omega t)$



$V_{dc}(t) = -V_{max}\cos(\omega t)$

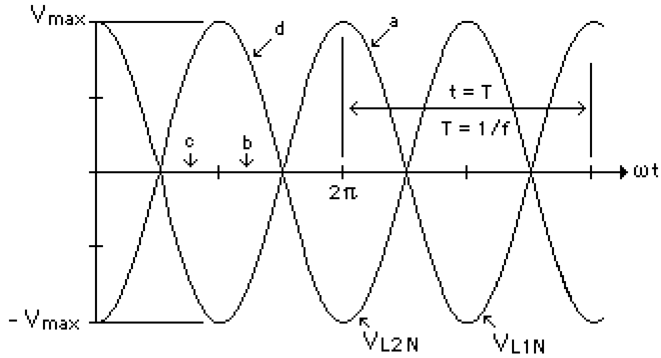


$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t)$
$V_{dc}(t) = -V_{max}\cos(\omega t)$



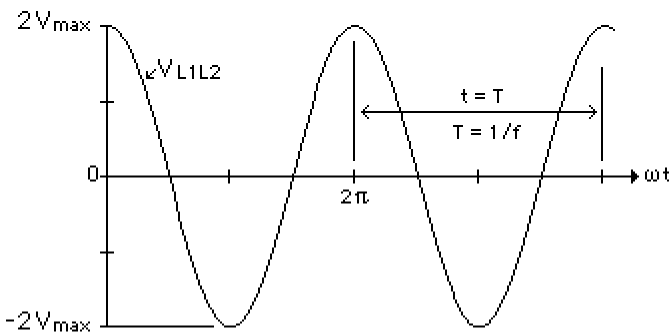
$V_{L1N} = V_{ab}(t)$
$V_{L2N} = V_{dc}(t))$

$V_{L1L2} = V_{L1N} - V_{L2N}$



$V_{L1L2} = V_{max}\cos(\omega t)-(-V_{max}\cos(\omega t))$

$V_{L1L2} = 2V_{max}\cos(\omega t)$

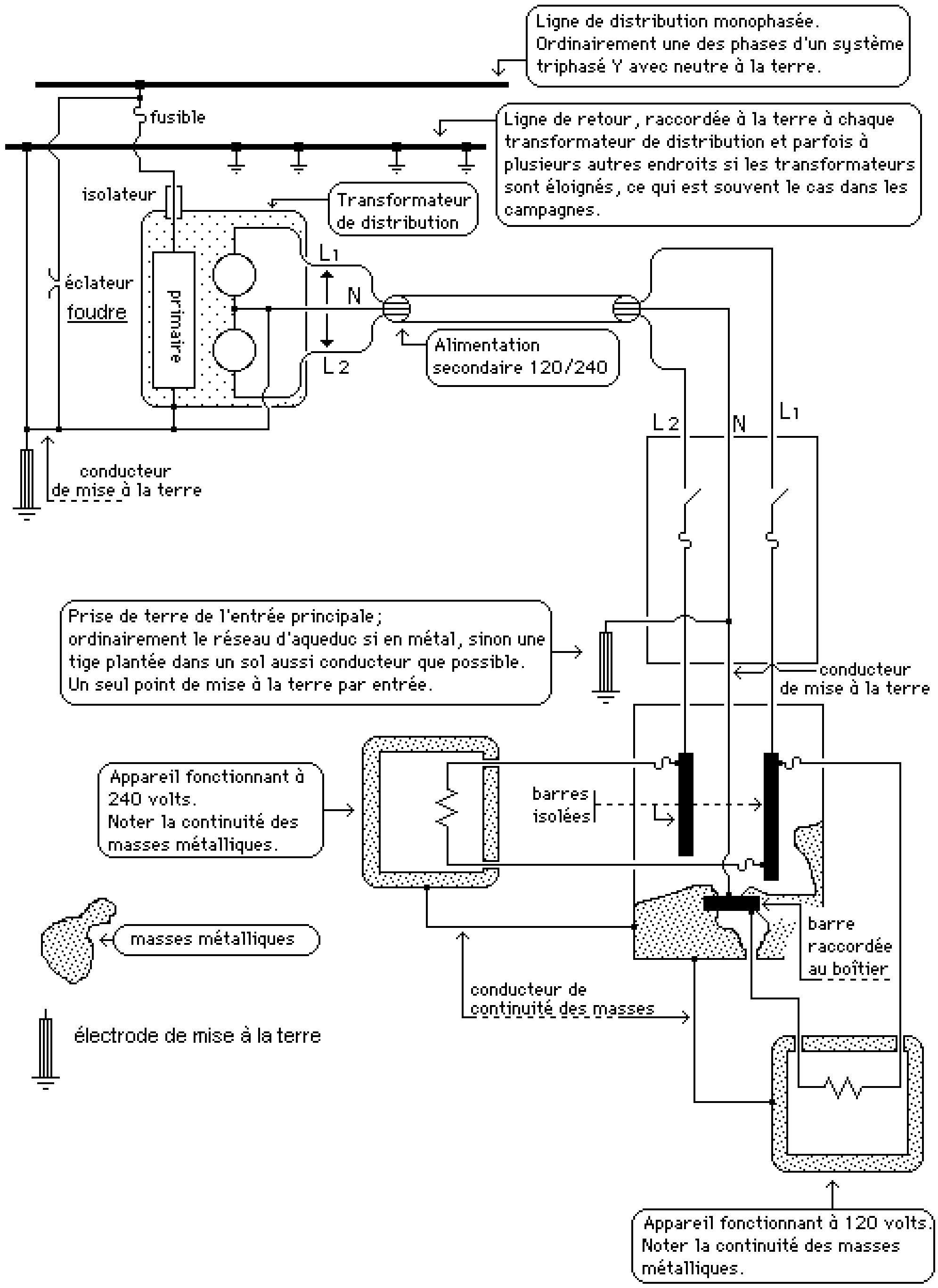


Conclusions:
- un voltmètre raccordé entre L_1 et N lira 120 volts,
- un voltmètre raccordé entre L_2 et N lira 120 volts,

• un voltmètre raccordé entre L_1 et L_2 lira 240 volts,
• il existe une relation simple entre la valeur que lit le voltmètre et la valeur maximum de la fonction lorsque la fonction est un cosinus parfait (nous y reviendrons très prochainement).

Il est maintenant temps de voir comment une résidence est raccordée pour profiter de ces deux tensions.

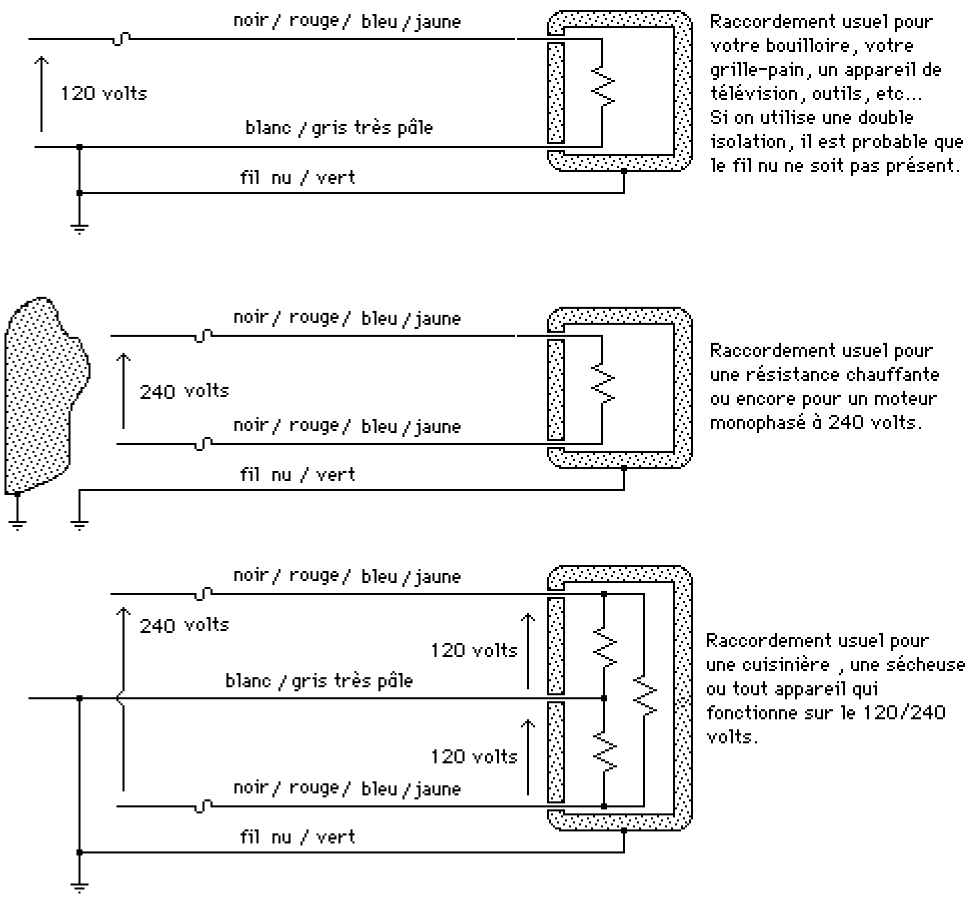
Voici comment on alimente un foyer au Québec en 1995



On constate que tous les boîtiers métalliques sont raccordés ensemble et au sol à l'entrée principale. Ceci assure qu'en tout temps, si une partie d'un élément électrique touche au boîtier, l'élément de protection (fusible) ouvrira le circuit et évitera un risque d'électrocution à l'utilisateur.

foudre électrocution

Fonctionnements des appareils domestiques



La construction et les raccordements sont donc pensés pour que lors d'un défaut (l'élément touche au boîtier), le contact solide avec le sol force le fusible à ouvrir le circuit et ainsi protège les usagers.

La résistance du circuit de retour au sol doit être très petite pour permettre un courant capable de déclencher l'ouverture des protections.

Que se passe-t-il si le fil neutre se brise ou n'est pas raccordé jusqu'au transformateur?

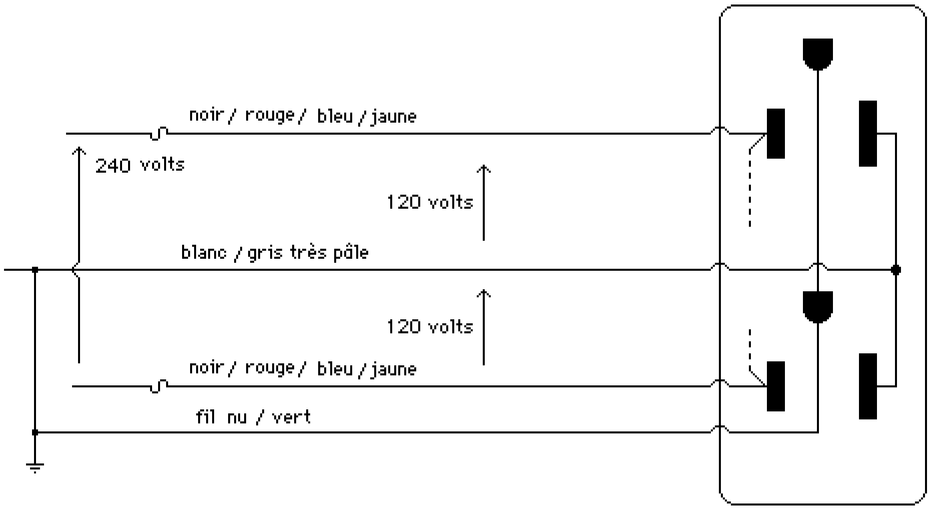
Réponse:

Si une partie sous tension touche au boîtier et qu'un humain touche aussi au boîtier, le courant passera à travers le corps de ce dernier pour retourner au transformateur; ceci cause un danger d'électrocution.

Prise double

Les équipements utilisés dans les cuisines modernes étant de plus en plus nombreux, on placera deux circuits indépendants dans la même boîte pour pouvoir raccorder et le grille pain et la bouilloire sans faire sauter le fusible.

Le raccordement illustré permet de voir que les deux prises sont indépendantes.



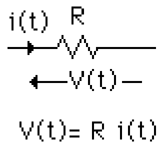
Le trait pointillé signale que les prises commerciales ont une connection entre ces deux bornes. Il faut la briser pour ce montage.

Pour celui qui fera ce raccord, il est nécessaire de s'assurer que les deux petites bornes ne sont pas en court-circuit.

1.2 - La modélisation des effets de l'électricité

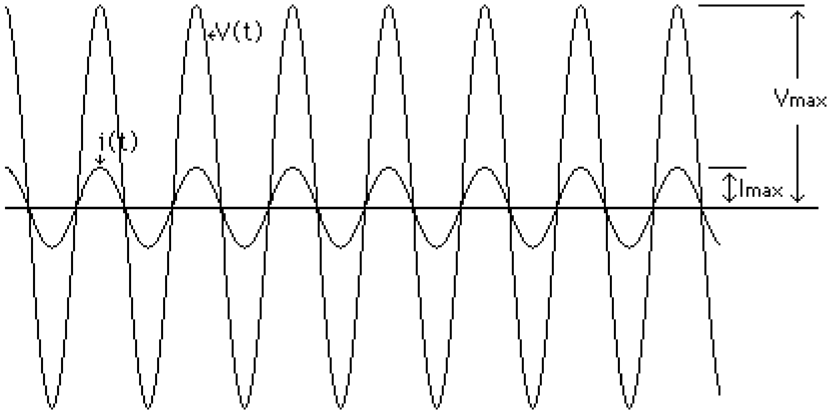
1.2.1 - L'effet "joule"

Au Québec, on chauffe souvent les foyers à l'électricité, et on peut aller acheter des éléments chauffants de 500 watts, 1 000 watts, etc. Ces éléments chauffants seront raccordés sur le 120 volts ou le 240 volts. Le phénomène de conversion de l'électricité en chaleur se nomme l'effet "joule" en l'honneur du physicien anglais James Joule(1818-1889).
Le modèle retenu par la littérature pour schématiser cet effet est:



Ce modèle représente la relation linéaire qui existe entre la tension et le courant lorsque l'effet produit est l'effet "joule".
$V(t) = Ri(t)$
Il est peut-être plus facile de comprendre cette définition si on explicite $R = V(t)/i(t)$

Autrement dit, si le rapport V(t)/i(t) est une constante, l'effet vu par la source est l'effet**"joule"**.



Pour un circuit qui ne contient pas d'harmoniques, si l'on observe les deux fonctions illustrées:

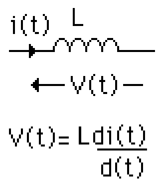
$V(t) = V_{max} \cos\omega t$
$I(t) = I_{max} \cos\omega t$
$\mathbf{R = V_{max}/I_{max}}$ résistance du circuit dont les unités seront nommées "ohm" (symbole Ω) en l'honneur du physicien allemand Georg Ohm(1789-1854).

Résistances physiques :
volume de référence chap. #10

Si le circuit est idéal et ne contient que l'effet "joule" on dit alors que :
le courant est en phase avec la tension; si la tension est la fonction qui est présente à la prise d'énergie domestique, i.e. un cos, le courant sera une fonction similaire à la tension, i.e. un cos, mais d'amplitude différente et déterminée par la valeur de R que l'on nomme la résistance du circuit.

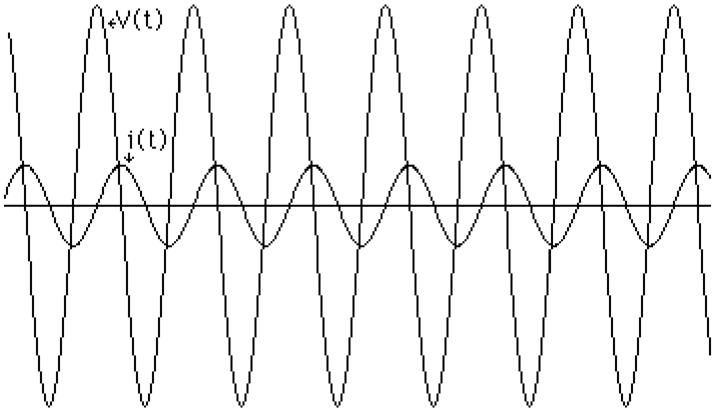
1.2.2 - L'effet "faraday"

Les circuits électriques sont sujets à des effets plus difficiles à observer que celui qui produit de la chaleur. En effet, la chaleur peut être ressentie par le sens du toucher, mais l'effet magnétique du courant électrique est très important et difficile à percevoir avec les sens. C'est Chistian Œrsted, physicien danois(1777-1851), qui observa le premier l'effet du courant électrique sur une boussole (existence de champ magnétique). Les recherches de Michael Faraday, physicien anglais (1791-1867), démystifièrent les champs magnétiques et on nommera effet "faraday" l'effet des champs magnétiques dans les circuits électriques. On représentera l'effet "faraday" par le modèle suivant:



$$V(t) = Ldi(t)/dt$$

Il est peut-être plus facile de comprendre cette définition si on explicite L = V(t)/di(t)/dt où L = rapport de la grandeur du champ magnétique/au courant qui produit ce champ.
Si le rapport V(t)/di(t)/dt est une constante, l'effet vue par la source est l'effet"**faraday**".



L=λ/i
λ = grandeur du champ
i = courant qui produit le champ.

Ces notions très importantes seront à revoir dans une étude sur l'électromagnétisme, sujet plus complexe que les circuits et qui exige une bonne connaissance du calcul vectoriel.

Pour un circuit qui ne contient pas d'harmoniques, si l'on observe les deux fonctions illustrées:

$V(t) = V_{max} \cos\omega t$
$I(t) = I_{max} \cos(\omega t-\pi/2)$ $di(t)/dt = -\omega I_{max} \sin(\omega t-\pi/2) = \omega I_{max} \cos(\omega t)$
$\omega L = V_{max}/I_{max}$ réactance du circuit dont les unités seront aussi nommées "ohm".

Si le circuit est idéal et ne contient que l'effet "Faraday" on dit alors que : le courant est en retard de phase de 90° avec la tension; si la tension est la fonction qui est présente à la prise d'énergie domestique, i.e. un cos, le courant sera une fonction similaire à la tension, i.e. un cos déphasé, mais d'amplitude différente et déterminée par la valeur de ωL que l'on nomme la réactance du circuit.

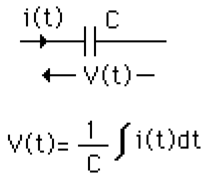
réactance inductive = il ne faut pas confondre réactance inductive $X_L = \omega L$ et $\mathbf{Z}_L = j\omega L$ impédance inductive

$\omega\mathbf{L} = X_L$ réactance inductive "**ohm**" (symbole Ω).
L = inductance en henry (symbole H).

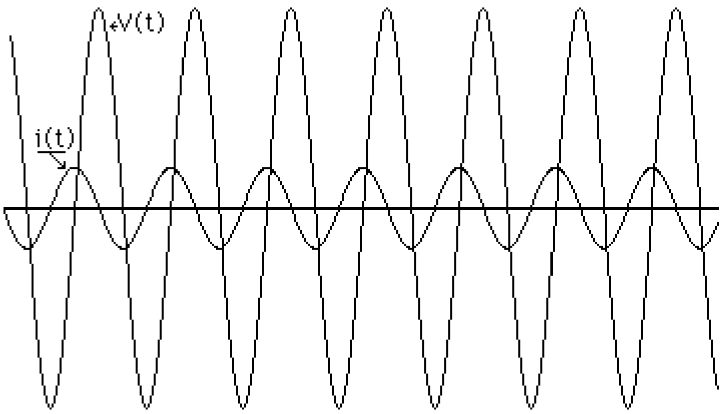
Inductances physiques:
volume de référence chap.#19

1.2.3 - L'effet "coulomb"

Un autre effet important de l'électricité est l'effet produit par les champs électriques. C'est Charles Augustin Coulomb, physicien français(1736-1806), qui découvrit la loi de l'inverse carré des champs électriques (l'effet "Coulomb"). On représentera l'effet "coulomb" par le modèle suivant:



$V(t) = 1/C\int i(t)dt$
Inversons cette relation pour faciliter notre réflexion.
$i(t) = CdV(t)/dt$
Il est peut-être plus facile de comprendre cette définition si on explicite $C = i(t)/dV(t)/dt = \int i(t)dt/V(t) = Q/V$
C = rapport de la grandeur du champ électrique/à la tension qui produit ce champ.
Autrement dit, si le rapport $i(t)/dV(t)/dt$ est une constante, l'effet vu par la source est l'effet"coulomb".



C = Q/V
Q = grandeur du champ
V = tension qui produit le champ.

Ces notions très importantes seront à revoir dans une étude sur l'électromagnétisme, sujet plus complexe que les circuits et qui exige une bonne connaissance du calcul vectoriel.

Pour un circuit qui ne contient pas d'harmoniques, si l'on observe les deux fonctions illustrées:

$$I(t) = I_{max} \cos\omega t$$
$$V(t) = V_{max} \cos(\omega t-\pi/2) \quad dV(t)/dt = -\omega V_{max} \sin(\omega t-\pi/2) = \omega V_{max} \cos(\omega t)$$

$\omega C = I_{max}/V_{max}$ susceptance du circuit dont les unités seront nommées "siémens" en l'honneur de l'ingénieur allemand Werner von Siemens(1816-1892).

Si le circuit est idéal et ne contient que l'effet "coulomb" on dit alors que : le courant est en avance de phase de 90° avec la tension; si la tension est la fonction qui est présente à la prise d'énergie domestique, i.e. un cos, le courant sera une fonction similaire à la tension, i.e. un cos déphasé, mais d'amplitude différente et déterminée par la valeur de ωC que l'on nomme la susceptance du circuit.

1/ωC = XC <u>réactance</u> capacitive "**ohm**" (symbole Ω).
C = capacité en farad (symbole F).

1.3 - Circuit électrique et valeur efficace

Normalement, dans un circuit électrique les trois effets sont présents mais à des degrés tellement différents que souvent, on néglige les effets secondaires pour analyser seulement l'effet prédominant.

Par exemple, le grille-pain et un rond chauffant de la cuisinière ayant été construits pour produire de la chaleur, les deux autres effets ont été minimisés dans la construction et l'on supposera que seul l'effet résistif est alors présent.

On sait maintenant que si la tension est sinusoïdale (un cos), le courant sera aussi sinusoïdal (un cos en phase)et la valeur maximum du courant sera égale à la valeur maximum de la tension divisée par la valeur de la résistance du grille-pain ou du rond chauffant de la cuisinière.

Lorsque le physicien anglais James Joule établit la relation déterminant la quantité de chaleur dégagée par le courant électrique, il utilisa du courant continu (Icc), i.e. du courant qui n'était pas une fonction du temps et qui pouvait se caractériser par un nombre.

Il détermina que la chaleur produite était proportionnelle au carré du courant multiplié par la valeur du rapport entre la tension et le courant, i.e. la résistance, et ce produit devait être totalisé dans le temps.
Donc la chaleur produite par un courant continu (Icc) traversant une résistance, c'est de l'énergie et la découverte de James Joule peut s'exprimer mathématiquement:

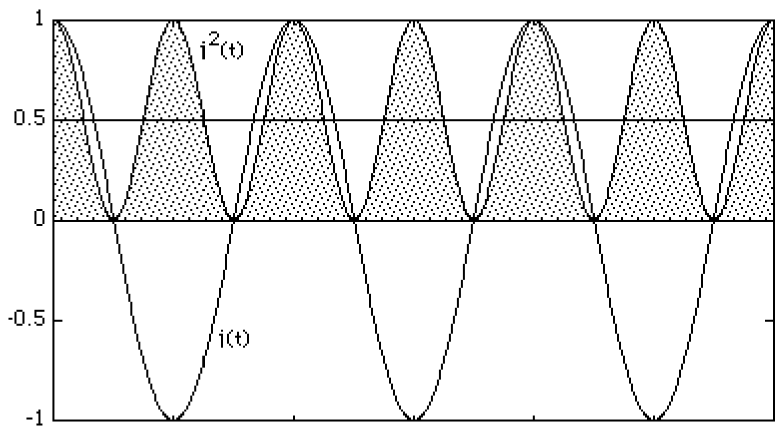
$$\text{Chaleur} = \text{énergie} = \acute{E} = RI_{cc}^2 t$$ unité : joules (watt-seconde):

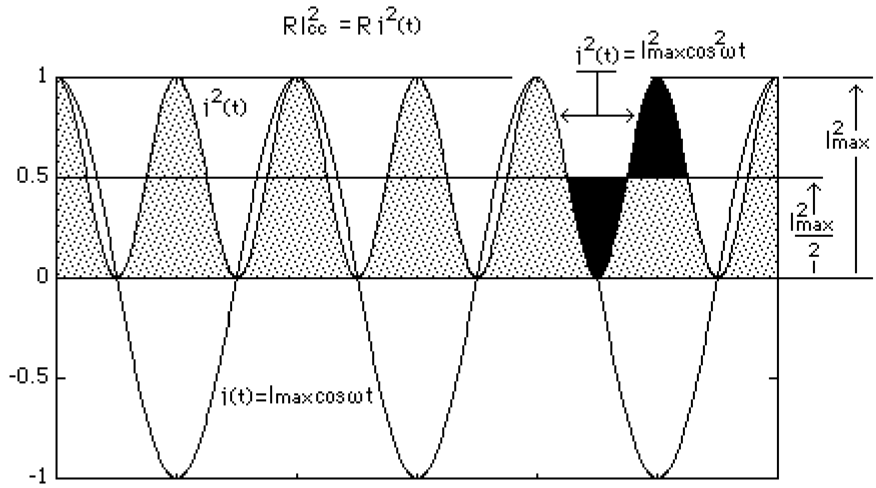
Si on se souvient que le taux de variation de l'énergie est la puissance: dÉ/dt = P

$$P = RI_{cc}^2$$ unité : watt

Établissons maintenant un nombre (pour le courant alternatif) qui représentera la fonction sinusoïdale qui circule dans notre grille-pain et qui, mis au carré, donnera la même puissance que le nombre en courant continu.

Il faut donc: $RI_{cc}^2 = R\,i^2(t)$





Il est assez facile d'accepter que la surface pointillée est égale à la surface comprise entre 0 et 0.5.

Donc l'énergie de chaleur produite par i(t) est égale à l'énergie que produirait un courant continu de 0.5 i.e. $I_{max}{}^2/2$.

Si on enlève le temps de notre réflexion, on conclu que la puissance développée à l'intérieur de l'élément chauffant (R) par un courant i(t) sera la même que celle produite par un I_{cc} si la surface sous la courbe i(t) au carré est égale à la surface sous la courbe d'un courant continu I_{cc} qui aurait pour valeur $I_{max}/\sqrt{2}$.

Cette définition importante détermine le courant efficace i.e. le chiffre qui, mis au carré, multiplie la valeur de la résistance pour donner la puissance qui, intégrée dans le temps, donne l'énergie.

Le concept de valeur efficace s'appliquera aussi bien aux tensions qu'aux courants dans les circuits électriques linéaires.

Nous avons fait une preuve expérimentale avec une fonction sinusoïdale et nous pouvons conclure que la valeur efficace d'une **fonction sinusoïdale pure (i.e. sans harmoniques)** est égale à la valeur maximum divisée par la racine de 2.

Donc si $\mathbf{f(t) = f_{max} \cos\omega t}$

Valeur efficace :
volume de référence art. 22.4

$$\mathbf{f_{eff} = f_{max}/\sqrt{2}}$$

En pratique, certains voltmètres mesurent la valeur efficace seulement si la tension est sinusoïdale et certains ampèremètres mesurent un courant efficace seulement si ce courant est sinusoïdal. La prudence s'impose dans l'interprétation de la lecture d'un voltmètre ou d'un ampèremètre.

En 1998, au Québec et à 60 Hz, la source d'énergie est:

$$v(t) = 120\sqrt{2}\cos(377t \pm ø) \text{ et } v(t) = 240\sqrt{2}\cos((377t \pm ø) \quad V_{eff} = 120 \text{ et } 240$$

et, pour l'Union Européenne et à 50 Hz

$v(t) = 115\sqrt{2}\cos((314t \pm ø)$ et $v(t) = 230\sqrt{2}\cos((314t \pm ø)$ $V_{eff} = 115$ et 230

Pour trouver la valeur efficace (rms) d'une fonction quelconque:

$$f_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)}$$

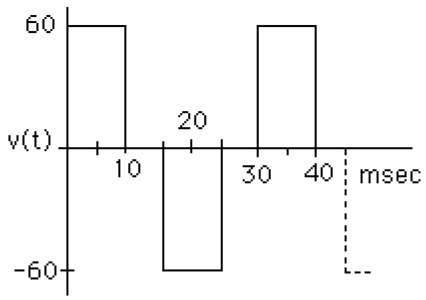
racine carrée de la valeur moyenne de la fonction au carré
["rms" = **r**oot **m**ean **s**quare.**]**

Remarquer que si on applique cette définition au graphique i(t) du haut de la page précédente, on trouve que la formule donne:

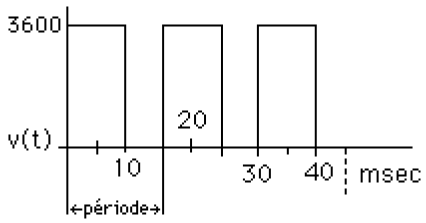
$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)$ surface sous la courbe de la fonction au carré pour un intervalle T, divisée par 'intervalle T donne $I_{max}^2/2$.

En prenant la racine de cette valeur moyenne on trouve $I_{eff} = I_{rms} = I_{max}/\sqrt{2}$.

Exemple: Pour trouver la valeur efficace de la fonction illustrée.



Première étape:
mettre la fonction au carré.



Deuxième étape:
calculer la surface sous la courbe pour une période. 3600*10 = 36000 volts-msec

Troisième étape:
diviser la surface sous la courbe pour une période par la période (valeur moyenne de la fonction au carré).

36000 volts carrés-msec/ 15msec = 2400 volts carrés

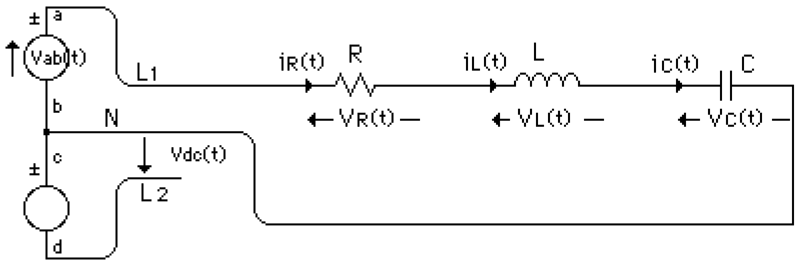
Quatrième étape:
calculer la racine carrée de la (valeur moyenne de la fonction au carré).

Valeur efficace = $\sqrt{2400}$ = 48.9897 volts

1.4 - L'équation intégro-différentielle ID

1.4.1 - Lois de Kirchhoff

Supposons que les trois effets sont présents dans un circuit et que l'on peut représenter ces effets par le modèle suivant.

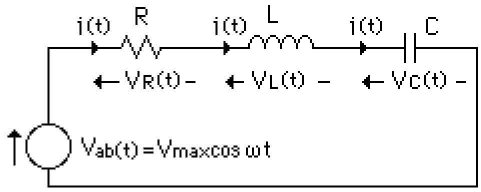


où:
$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t)$ qui est une source de tension de fréquence fixe
$V_R(t) = Ri_R(t)$ effet "Joule"
$V_L(t) = Ldi_L(t)/dt$ effet "Faraday"
$V_C(t) = 1/C\int i_C(t)dt$ effet "Coulomb"

Première loi de Kirchhoff **$\Sigma v(t) = 0$**
Ceci veut dire que:
si je pose une flèche à chaque tension et que cette flèche indique la borne dont la tension est la plus élevée, et ce au même instant, la première loi de Kirchhoff signifie qu'on doit faire la somme algébrique instantanée des tensions autour d'un parcours fermé et poser cette somme égale à zéro.

Ainsi, partant au point "b", passant par "a", R, L, C et revenant sur le fil du bas jusqu'au point "b" la **$\Sigma v(t) = 0$ sera**: $V_{ab}(t) - V_R(t) - V_L(t) - V_C(t) = 0$ si je pose un signe + lorsque je traverse une tension dans le sens de la flèche. Cette équation peut se réécrire: $V_{ab}(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t)$ i.e. la tension de la source est égale à la somme des chutes de tension sur les effets présents.

Deuxième loi de Kirchhoff. **$\Sigma i(t) = 0$**
La somme des courants instantanés qui arrivent en un point est égale à zéro. Pour l'exemple actuel toute les sommes de courant que l'on fera démontreront que:
$i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$



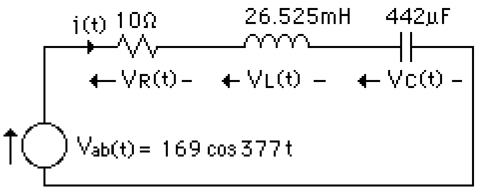
posons $i(t) = i_R(t) = i_L(t) = i_C(t)$ et redessinons notre circuit.

La somme des tensions devient: $V_{max}\cos(\omega t) = Ri(t) + Ldi(t)/dt + 1/C\int i(t)dt$

Voici une équation intégro-différentielle ID qui devra être solutionnée pour établir la valeur du courant si V_{max}, ω, R, L, et C sont donnés, ce qui est ordinairement le cas.

1.4.2 - Solution de l'équation intégro-différentielle ID

Pour essayer de solutionner cette équation, utilisons un approche numérique avec les valeurs inscrites sur le modèle.



Notre équation **Σv(t) = 0** donne:

$$169\cos(377t) = 10i(t) + 0.026525di(t)/dt + 1/0.000442\int i(t)dt$$

Posons comme solution pour i(t) une fonction générale qui contient un cosinus et un sinus de même fréquence angulaire que la source de tension mais dont les amplitudes sont indéfinies:

$$i(t) = A\cos 377t + B\sin 377t$$

que l'on pourrait aussi écrire selon l'identité trigonométrique cos(x-y) = cosx cosy + sinx siny :

$$i(t) = M\cos(377t - \phi) \text{ si } A = M\cos\phi \text{ et } B = M\sin\phi$$

la dérivée de i(t) sera :

$$di(t)/dt = -377A\sin 377t + 377B\cos 377t$$

et l'intégrale de i(t) sera :

$$\int i(t)dt = A/377\sin 377t - B/377\cos 377t + K$$

où K sera supposée nul, i.e. pas de charge sur le condensateur au début du problème.

Calcul de X_L et X_C:

$0.026525*377 = 10$ ce qui est $\omega L = X_L$
$1/(0.000442*377) = 6$ ce qui est $1/\omega C = X_C$

Notre équation **Σv(t) = 0** devient:

$$169\cos(377t) = 10[A\cos 377t + B\sin 377t] + 10[B\cos 377t - A\sin 377t] + 6[A\sin 377t - B\cos 377t]$$

ce qui donne les deux égalités suivantes si on regroupe les termes en cosinus et en sinus dans des équations différentes:

$$169\cos377t = 10A\cos377t + \mathbf{10}B\cos377t - \mathbf{6}B\cos377t$$
$$0 = 10B\sin377t - \mathbf{10}A\sin377t + \mathbf{6}A\sin377t$$

On peut alors simplifier les cosinus et les sinus pour déterminer A et B

$$10A + 4B = 169$$
$$-4A + 10B = 0$$

$$A = 14.57$$
$$B = 5.83$$

et écrire que: $i(t) = 14.57\cos377t + 5.83\sin377t$ est une solution possible.

La solution que nous avons déterminée peut être modifiée par trigonométrie.

$$i(t) = 14.57\cos377t + 5.83\sin377t$$

$$M\cos(337t-\phi) = M\,[\cos(337t)\cos(\phi) + \sin(337t)\sin(\phi)]$$

$$i(t) = M\cos(377t - \phi)$$

si $14.57 = M\cos(\phi)$ et $5.83 = M\sin(\phi)$

$$\phi = 21.8° = 0.38 \text{ rad}$$
$$M = 15.69$$
$$i(t) = 15.69\cos(377t - 0.38)$$

est la même solution présentée dans un format différent.

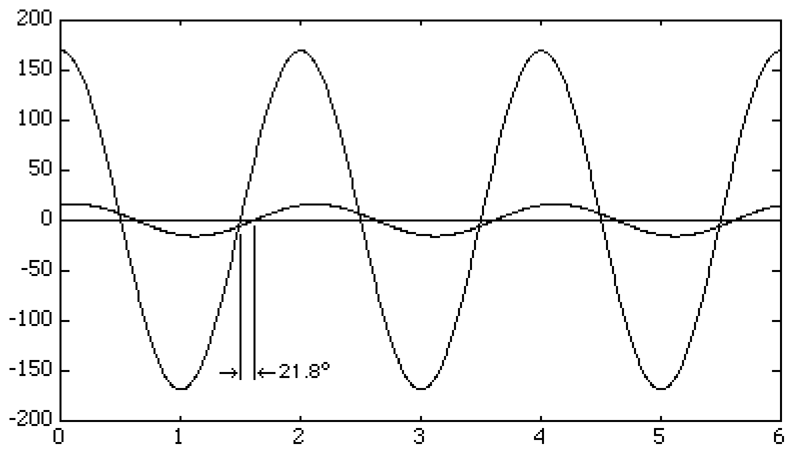
Cette représentation est plus intéressante pour nous, car le courant est de même forme mathématique que la tension i.e. un cosinus, et les seules informations que nous aurons besoin pour écrire cette réponse sera la valeur maximum du courant et la phase du cosinus, i.e. M et ϕ.

Nous allons bientôt développer une technique qui permettra de trouver ces deux valeurs (M et ϕ) de façon systématique et plus simple que la solution que nous venons de faire.

Le graphique des deux fonctions:

$$V_{ab}(t) = 169\cos(377t)$$
$$i(t) = 15.69\cos(377t - 0.38)$$

est présenté avec $V_{ab}(t)$ comme référence.



Noter que i(t) est en retard par rapport à $V_{ab}(t)$.

Éventuellement, nous serons en mesure de prédire l'avance ou le retard en regardant les grandeurs relatives de X_C et X_L.

Discussion de l'équation intégro-différentielle ID

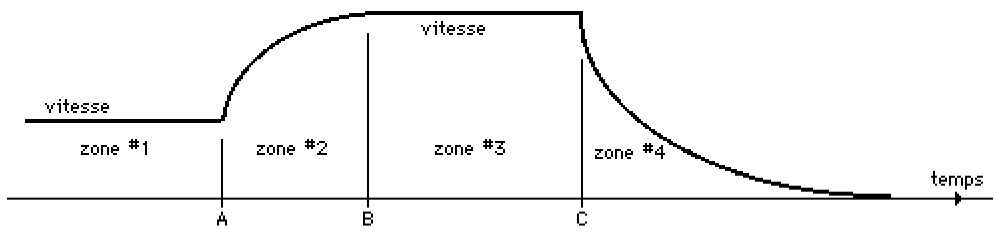
La solution que nous avons déterminée dans les pages précédentes est une solution possible, mais non complète. En effet, les mathématiciens démontrent que les équations différentielles du genre dont nous venons de trouver une solution possible ont besoin d'une autre solution pour satisfaire la rigueur qu'exige la science mathématique. Pour ceux qui ont déjà fait un cours d'équations différentielles, les expressions "solution particulière" et "solution complémentaire" sont des termes déjà connus. Pour l'ingénieur, les termes "solution forcée" et "solution naturelle" ont une signification physique qui facilite la compréhension des phénomènes et ce sont ces deux expressions que nous utiliserons à l'avenir.

Solution forcée : solution de l'équation intégro-différentielle qui dépends de la source d'énergie qui alimente le circuit. C'est cette solution que nous venons de trouver dans les pages précédentes. Elle est forcée par la source sinusoïdale et donne une solution sinusoïdale.

Solution naturelle : solution de l'équation intégro-différentielle lorsque le circuit ne contient pas
de source d'énergie. Bien sur, il faut qu'une certaine énergie soit présente au début de la solution, sinon il n'y a pas de solution. Cette solution dépends de la nature du circuit et de la valeur des composantes présentes et des conditions initiales i.e. l'énergie dans les champs.

Solution transitoire : solution qui existe entre une solution forcée et une autre solution forcée.

Analogie : pour saisir les notions en jeu, prenons on problème que tous connaissent bien i.e. la vitesse d'une automobile qui dépasse un autre véhicule et qui manque d'essence.



Zone #1 : l'accélérateur est à mi-course, la voiture roule à 60km/h; **solution forcée**
Point A : l'accélérateur est poussé à 3/4 de sa course, la voiture débute son accélération.
Zone #2 : la voiture est en accélération; **solution transitoire**
Point B : l'accélérateur est à 3/4 de sa course, la voiture atteint 100km/h.
Zone #3 : l'accélérateur est à 3/4 de sa course, la voiture roule à 100km/h; **solution forcée**
Point C : le moteur arrête, manque d'essence.
Zone #4 : la voiture roule jusqu'à arrêt complet; **solution naturelle**

Les deux solutions forcées sont en réalité le point d'équilibre entre la force du moteur et les forces de frictions.
La solution transitoire est fonction de la masse de l'automobile, des frictions en jeu et du point
de départ "A" et du point d'arrivée "B".
La solution naturelle est fonction de la masse de l'automobile, des frictions en jeu et de l'énergie emmagasinée dans la masse au point "C".

En électrotechnique, le passage d'une solution forcée à une autre solution forcée est très court (quelques Hz) et sera d'intérêt pour les spécialistes.

Dans une première approche du sujet, nous utiliserons la solution forcée pour comprendre les comportements énergétiques des équipements de transformation d'énergie.

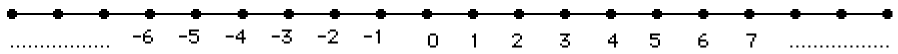
1.5 - Nombres complexes et identité d'Euler

1.5.1 - Nombres complexes

La solution d'équation numérique d'ordre 2 força les mathématiciens à inventer les nombres complexes qui, en réalité, n'ont de complexe que le nom qu'on leur donne.

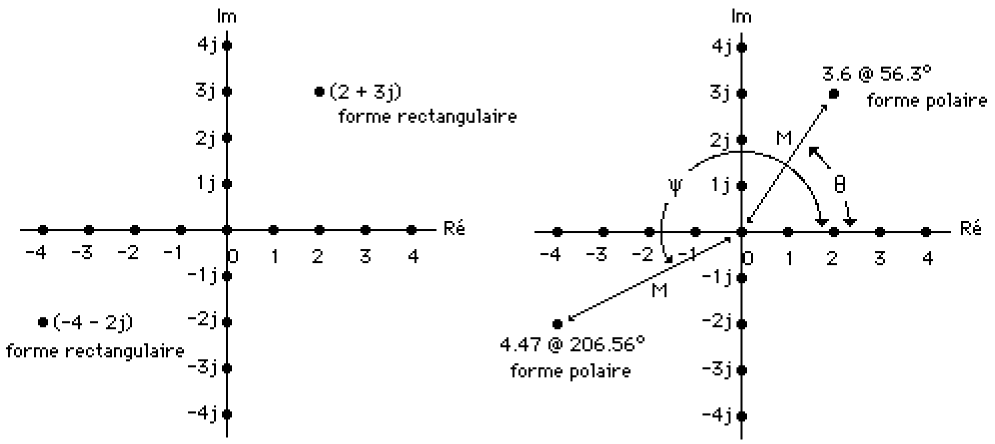
Ainsi si $x^2 + x + 1$ doit être solutionné, on découvre que $x = -1/2 \pm \sqrt{3}/2*j$ ou $j = \sqrt{-1}$.

Tous se souviennent que l'on peut représenter les nombres réels par leur position sur une droite:



Les nombres complexes se représentent par leurs positions dans le plan complexe où l'axe réel est le même que pour les nombres réels, et l'axe orthogonal est l'axe des parties imaginaires.

POSITION D'UN POINT DANS LE PLAN COMPLEXE



Il existe deux manières de définir la position du point (nombre complexe) dans notre plan complexe.

rectangulaire: 2 + 3j et -4 - 2j

polaire: 3.6 @ 56.3° et 4.47 @ 206.56°

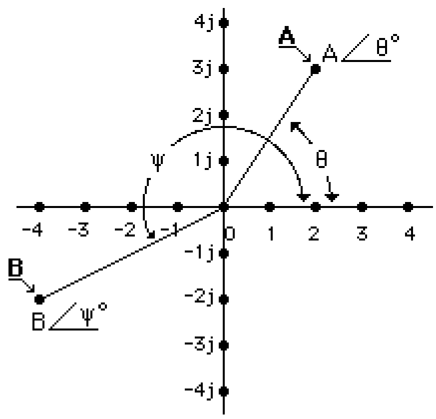
Si M est la distance du point de l'origine des axes et θ où φ est l'angle relatif à l'axe réel positif, notre trigonométrie nous donne les relations:

$$3.6\cos 56.3° = 2 \text{ et } 3.6\sin 56.3° = 3$$

$$4.47\cos 206.56° = -4 \text{ et } 4.47\sin 206.56° = -2$$

Pour distinguer le nombre complexe du nombre réel, nous utiliserons un caractère **gras**. La même lettre en caractère régulier sera la distance du point de l'origine des axes. (module)

Soit **A** = 2 + 3j = 3.6 @ 56.3° = |**A**|[cosθ + jsinθ] et
B = -4 - 2j = 4.47 @ 206.56° = |**B**|[cosψ + jsinψ].
|**A**| = A le module
|**B**| = B le module



1.5.2 - Identité d'Euler

La grande utilité des nombres complexes pour la solution des circuits électriques est la représentation exponentielle.

Soit le nombre complexe: $\mathbf{P} = P\,[\cos\theta + j\sin\theta]$

dont la dérivée par rapport à θ donne: $\frac{d\mathbf{P}}{d\theta} = P\,[-\sin\theta + j\cos\theta] = j\{P\,[\cos\theta + j\sin\theta]\} = j\mathbf{P}$

expression qui peut se transformer en un logarithme naturel par intégration:

Du calcul intégral et différentiel on tire:
d(ln u) = du/u.
De la définition du logarithme naturel (ln)
si y = $e^{(x)}$
ln y = x pour e = 2.71828......

$$\frac{d\mathbf{P}}{\mathbf{P}} = j\,d\theta$$

$$\ln\mathbf{P} = j\theta + C$$

une propriété des logarithmes naturels permet d'écrire:

$$\mathbf{P} = e^{j\theta + C}$$

$$\mathbf{P} = e^{C} e^{j\theta}$$

L'évaluation de cette fonction à θ = 0

$$\mathbf{P} = P\,[\cos 0 + j\sin 0] = e^{C} e^{j0}$$
$$P = e^{C}$$
$$\mathbf{P} = P\,e^{j\theta}$$

C'est la forme exponentielle des nombres complexes qui donne la relation importante:

L'identité d'Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

Leonhard Euler, mathématicien suisse, (1707-1783)

L'identité d'Euler: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

L'identité d'Euler doit être mémorisée pour celui qui veut faire de l'analyse de circuits électriques. Cette identité peut aussi servir à déterminer des expressions pour le cosinus et le sinus utilisant la fonction exponentielle.

Un nombre complexe conjugué se trouve en remplaçant j par -j.

Donc l'identité d'Euler conjugué s'écrira:

conj(Euler) $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$

La somme des deux fonctions i.e. Euler + conj(Euler) donne l'expression du cos

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

La différence des deux fonctions i.e. Euler - conj(Euler) donne l'expression du sin

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2j}$$

Dans l'usage des nombres complexes on identifie les termes suivants:

$$e^{j\theta} = \overbrace{\cos\theta}^{\text{partie réelle}} + j\underbrace{\sin\theta}_{\text{partie imaginaire}}$$

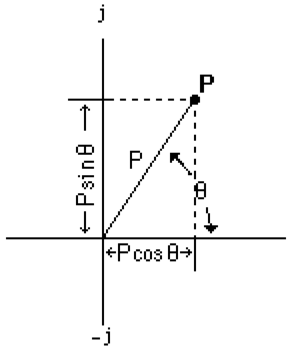
La partie réelle (Ré) est le terme qui n'est pas multiplié par j, la partie imaginaire (Im) est le terme qui est multiplié par j, mais sans le j.

$$\mathbf{P} = P\,e^{j\theta} = P\,[\cos\theta + j\sin\theta]$$

Soit le nombre complexe **P**

$R_é(\mathbf{P}) = P\cos\theta$

$I_m(\mathbf{P}) = P\sin\theta$



1.5.3 - Manipulation des nombres complexes

Pour solutionner des circuits électriques raccordés au réseau d'énergie, il faut pouvoir faire l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des nombres complexes.

Addition et/ou **soustraction: utiliser la forme rectangulaire**

Les parties réelles s'additionnent et/ou se soustraient aux parties réelles et les parties imaginaires s'additionnent et/ou se soustraient des parties imaginaires.
Soit **A** = 2 + 3j = 3.6 @ 56.3° = |**A**|[cosθ + jsinθ]
et **B** = -4 - 2j = 4.47 @ 206.56° = |**B**|[cosψ + jsinψ]
A + **B** = (2 + 3j) + (-4 - 2j) = -2 + j
A - **B** = (2 + 3j) - (-4 - 2j) = 6 + 5j

Multiplication et division: utiliser la forme polaire

Pour multiplier ou diviser deux nombres complexes, il est plus facile d'utiliser la forme polaire. Ainsi si

$$\mathbf{A} = 3.6e^{j56.3°} \qquad \mathbf{B} = 4.47e^{j206.56°}$$

pour multiplier: multiplier les modules et additionner les angles,

$$\mathbf{A\,B} = \left[3.6e^{j56.3°}\right]\left[4.47e^{j206.56°}\right] = 16e^{j262.86°}$$

pour diviser: diviser les modules et soustraire les angles.

$$\frac{\mathbf{A}}{\mathbf{B}} = \frac{\left[3.6e^{j56.3°}\right]}{\left[4.47e^{j206.56°}\right]} = 0.805e^{-j150.25°}$$

On peut aussi **multiplier** terme à terme en forme rectangulaire mais le travail est plus long.

AB = (2 + 3j)(-4 - 2j) = -8 -12j -4j +6 = -2 -16j = 16.12 @ -97.12° ou @ 262.87°

L'opération de **division** en forme rectangulaire est plus difficile à réaliser car il faut rationaliser le rapport en multipliant le numérateur et le dénominateur avec le conjugué du dénominateur.

A/B = (2 + 3j)/(-4 - 2j) = [(2 + 3j)(-4 + 2j)]/[(-4 - 2j)(-4 + 2j)] et utiliser la propriété du produit **[B][conjB]** qui donne module de **B** au carré.

Le résultat est **A/B** = (-14 -8j)/20 = -0.7 - 0.4j = 0.806 @ -150.25°

Démontrez que **[B][**conj**B]** = module de **B** au carré.

1.6 - Linéarité et superposition

1.6.1 - Linéarité

Une équation est dite linéaire si, lorsqu'on multiplie une variable par une constante, l'autre variable est aussi multipliée par la même constante. Ainsi donc l'équation y = 3x est linéaire alors que $y = 3x^2$ ne l'est pas.

Les effets "joule", "faraday" et "coulomb" seront supposés linéaires pour fin d'analyse, même si, à l'occasion, il faudra introduire des nonlinéarités pour satisfaire certains phénomènes. Ainsi, pour notre plus grand bien, les équations suivantes

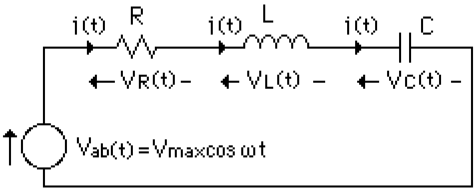
$$V(t) = Ri(t)$$
$$V(t) = Ldi(t)/dt$$
$$V(t) = 1/C\int i(t)dt$$

sont déclarées des équation linéaires.

1.6.2 - Superposition

Lorsqu'une équation est linéaire, la superposition est possible. La superposition signifie que: si $x = x_1 + x_2$ dans une équation linéaire, y sera égal à $y_1 + y_2$ où y_1 est la solution pour x_1 et y_2 est la solution pour x_2.

y = 3x
si x = 4 + 5
y sera 12 + 15



La linéarité et la superposition sont considérées comme valides dans l'analyse des circuits et on laissera toujours de côté les nonlinéarités lors d'une première étude d'un phénomène. Comme un ensemble d'équations linéaires est solutionnable avec des méthodes directes, on rendra nos circuits linéaires pour pouvoir plus facilement les solutionner. En fait, les circuits électriques donnent des équations linéaires intégro-différentielles qui sont faciles à solutionner si la source d`énergie est sinusoïdale.

Les fournisseurs d'énergie comme Hydro-Québec produisent une tension aussi sinusoïdale que possible et surveillent leurs clients pour s'assurer qu'ils n'introduisent pas d'impuretés (harmoniques) dans la fonction V(t) = 169cos(377t).

Si les problèmes rencontrés exigent un jour que l'on tienne compte de la nonlinéarité, il faudra à ce moment utiliser des méthodes d'approximations successives, méthodes qui ne seront pas traitées dans ce texte.

<u>1.7 - Retour sur l'équation intégro-différentielle ID</u>

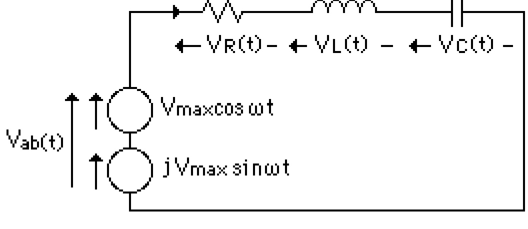
$V_{max}\cos(\omega t) = Ri(t) + Ldi(t)/dt + 1/C\int i(t)dt$

Nous avons déjà solutionné cette équation précédemment, mais la manière de le faire semblait assez ardue. Nous allons utiliser la superposition et notre nouvelle connaissance de l'identité d'Euler pour compliquer le problème, mais faciliter ainsi sa solution. Cette approche s'appelle la transformation du domaine du temps au domaine des fréquences.

Selon notre discussion précédente, si $V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t) + jV_{max}\sin(\omega t)$ le courant sera $I(t) = I_{max}\cos(\omega t \pm \theta) + jI_{max}\sin(\omega t \pm \theta)$, car la superposition dit: la partie réelle de $V_{ab}(t)$ produira la partie réelle de I(t), et nous connaissons ce terme de notre solution précédente.

1.7.1 - Solution avec une exponentielle

Si $V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t) + jV_{max}\sin(\omega t)$

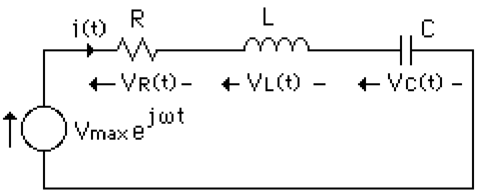


l'identité d'Euler donne: $V_{max}e^{j\omega t} = V_{max}\cos\omega t + jV_{max}\sin\omega t$

et une source d'énergie réelle peut être remplacée par une source complexe.

L'équation ID devient alors:

$V_{max}e^{j\omega t} = Ri(t) + L\,di(t)/dt + 1/C\int i(t)dt$



Posons i(t) une fonction exponentielle très générale:

$$i(t) = Ke^{st} \quad \text{alors} \quad \frac{di(t)}{dt} = sKe^{st} = si(t) \quad \text{et} \quad \int i(t)dt = \frac{1}{s}Ke^{st} = \frac{1}{s}i(t)$$

la dérivée et l'intégrale de notre exponentielle donnent encore l'exponentielle. Si on réécrit l'équation ID avec cette approche, on retrouve l'identité:

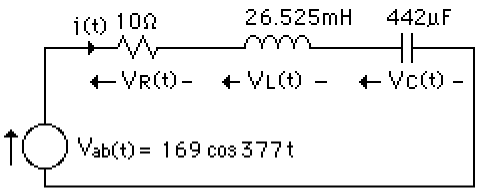
$$V_{max}e^{j\omega t} = Ke^{st}\left[R + sL + \frac{1}{sC}\right] = i(t)\left[R + sL + \frac{1}{sC}\right]$$

qui n'est vrai que si s = jω, car pour s = jω l'exponentielle peut être simplifiée et notre équation devient une équation algébrique en nombres complexes.

$$V_{max} = K\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]$$

Reprenons notre exemple précédent et voyons si l'on peut trouver la même réponse pour i(t). Il suffit en réalité de déterminer la valeur de K pour pouvoir écrire i(t) sous forme de fonction complexe dont la partie réelle sera la solution cherchée.

$$K = \frac{V_{max}}{\left[R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right]}$$



$$j\omega L = j10 \qquad \frac{1}{j\omega C} = -j6$$

$$K = \frac{169}{\left[10 + j10 - j6\right]} = \frac{169}{\left[10.77 @ 21.8°\right]} = 15.69 @ -21.8° = 15.69e^{-j0.38}$$

$$i(t) = 15.69e^{-j0.38}e^{j\omega t} = 15.69e^{j(\omega t - 0.38)}$$

et   i(t) = 15.69cos(377t - 0.38) + j15.69sin(377t - 0.38)

et la partie réelle est la même solution que trouvée précédemment.

$$i(t) = 15.69\cos(377t - 0.38)$$

Ainsi, il parait possible de:

1 - prendre un problème réel qui existe dans le temps et de le transformer dans le monde des nombres complexes;
2 - de manipuler des nombres complexes;

3 - puis de retransformer le problème dans le monde réel et ainsi de simplifier un problème de circuit.

En résumé et sous forme générale:

$$i(t) = Ke^{st} = \left. \frac{V_{max} e^{j\omega t}}{\left[R + sL + \frac{1}{sC} \right]} \right|_{s=j\omega}$$

Cette façon de faire est tellement utile que nous lui assignerons un nom : **la méthode des phaseurs**.

Mise en garde:
après un certain temps, l'usage des phaseurs devient tellement naturel que l'on oublie que nous sommes dans un monde mathématique et que la réalité n'est pas des nombres complexes, mais des fonctions du temps i.e. des cosinus, si on se limite au monde de la distribution d'énergie électrique.

1.7.2 - Les phaseurs

Pour déterminer l'expression générale pour i(t) sous forme complexe, nous avions omis l'angle de la tension à t=0. ϕ = angle de déphasage permettant de donner une valeur autre que la valeur maximum à t=0. Si nous désirons retenir cette information, il faut introduire la source comme:

$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi) + jV_{max}\sin(\omega t \pm \phi)$

$$i(t) = Ke^{st} = \left. \frac{V_{max} e^{j\omega t}}{\left[R + sL + \frac{1}{sC} \right]} \right|_{s=j\omega}$$

$$V_{ab}(t) = \left[V_{max} e^{\pm j\phi} \right] e^{j\omega t}$$

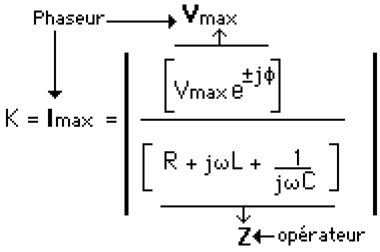
ce qui donne pour notre forme générale:

$$i(t) = Ke^{st} = \left. \frac{\left[V_{max} e^{\pm j\phi} \right] e^{j\omega t}}{\left[R + sL + \frac{1}{sC} \right]} \right|_{s=j\omega}$$

Lorsque l'on fait s = jω l'exponentielle se simplifie des deux côtés de l'égalité et le temps est disparu de notre équation. Cependant, le numérateur est un nombre complexe et le dénominateur est aussi un nombre complexe. Comme le rapport de deux nombres complexes est aussi un nombre complexe, le courant devient une expression complexe.

$\mathbf{I}_{max} = \mathbf{V}_{max}/\mathbf{Z}$
$\mathbf{V}_{max} = \mathbf{Z}\mathbf{I}_{max}$
Si on utilise des valeurs efficaces
on laissera tomber le max et on écrira:

$$\mathbf{V = ZI}$$



Un **phaseur** est la représentation (sous forme d'un nombre complexe) d'une fonction sinusoïdale du temps pour fin d'**addition** ou de **soustraction** dans un problème où la **fréquence est unique**. Le terme **phaseur** ne doit être utilisé que pour les **tensions** et les **courants**. Les **impédances** en nombres complexes sont des **opérateurs** qui modifient les phaseurs pour donner d'autres phaseurs.
Ainsi dans la relation fondamentale **V = ZI**
Z est un **opérateur** qui multiplie le module du **phaseur I** par une grandeur (son propre module)
et lui ajoute un angle (l'angle du nombre complexe **Z**) pour donner le **phaseur V**.

Donc pour utiliser les phaseurs et les nombres complexes: **il faut que la fréquence soit la même pour l'ensemble du problème et il faut convertir les effets inductifs et capacitifs en réactances inductives et capacitives.**

1.7.3 - Représentation de l'exponentielle complexe dans le plan complexe

Une source de tension alternative exprimée sous forme de cosinus est la source d'énergie qui nous est fournie par le réseau de distribution.

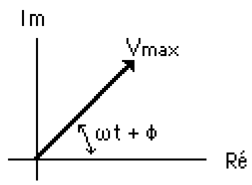
$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi)$.

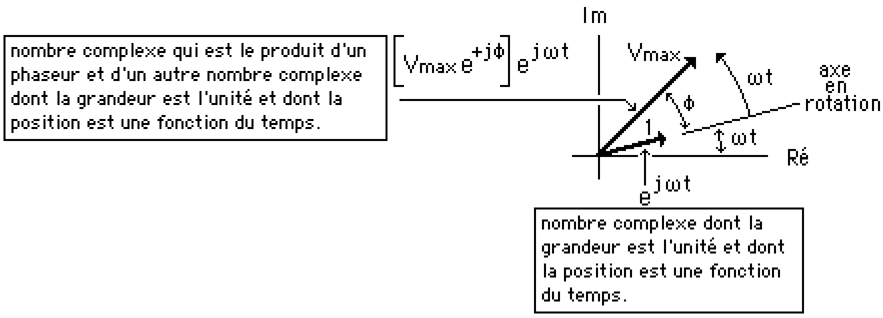
L'ajout d'une partie imaginaire en sinus de même fréquence permet d'utiliser l'identité d'Euler et d'exprimer la fonction dans le plan complexe.

$V_{ab}(t) = V_{max}\cos(\omega t \pm \phi) + jV_{max}\sin(\omega t \pm \phi)$

$V_{ab}(t) = V_{max}e^{j(\omega t \pm \phi)}$

$V_{ab}(t) =[V_{max}e^{\pm j\phi}]e^{j\omega t}$





Dans un problème de circuit fonctionnant à une seule fréquence, toutes les tensions et tous les courants seront à la même fréquence et la multiplication par le nombre complexe unitaire peut être omise et les angles entre les phaseurs seront respectés.

Dans la pratique courante, on placera l'axe en rotation sur l'axe réel et au temps t = 0 on observera tous les phaseurs par rapport à un phaseur de référence.

Nous allons manipuler des fonctions trigonométriques avec cette technique pour en saisir l'utilité.

1.7.4 - Addition et soustraction de fonctions trigonométriques de même fréquence par la technique des phaseurs (le phaseur @0° est le cosinus)

Soit les fonctions suivantes:

$$\mathbf{V}_1(t) = 20\cos(\omega t + \pi/6) = 20\cos(\omega t + 30°)$$
$$\mathbf{V}_2(t) = 10\cos(\omega t + \pi) = 10\cos(\omega t + 180°)$$
$$\mathbf{V}_3(t) = 30\cos(\omega t - \pi/2) = 30\cos(\omega t - 90°)$$
$$\mathbf{V}_4(t) = 40\cos(\omega t - \pi/4) = 40\cos(\omega t - 45°)$$

Pour calculer: $\mathbf{V}_x(t) = \mathbf{V}_1(t) + \mathbf{V}_2(t) + \mathbf{V}_3(t) + \mathbf{V}_4(t)$ par trigonométrie, il faut beaucoup de transformations et une bonne dose de courage.

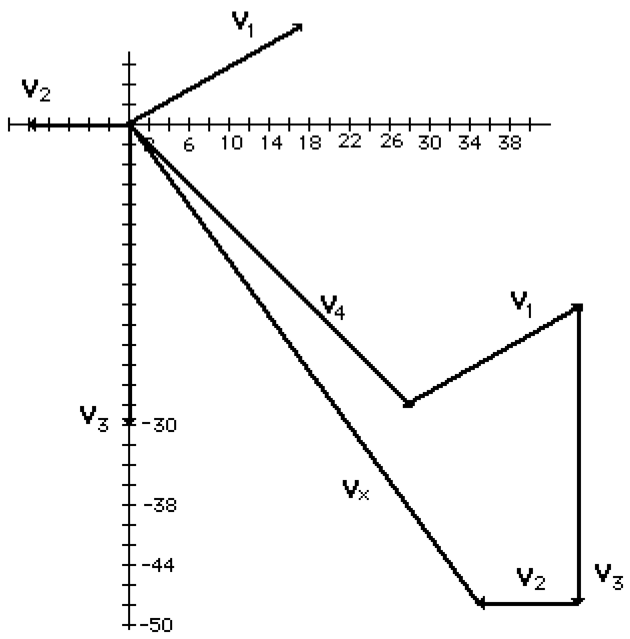
Comme la fréquence angulaire est la même, il suffit de:
1 - convertir chaque fonction en phaseur
2 - additionner les phaseurs
3 - reconvertir le phaseur résultant en fonction du temps.

$$\mathbf{V}_1 = 20@30° = 17.3 + 10*j$$
$$\mathbf{V}_2 = 10@180° = -10 + 0*j$$
$$\mathbf{V}_3 = 30@-90° = 0 - 30*j$$
$$\mathbf{V}_4 = 40@-45° = 28.28 - 28.28*j$$

$$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4 = 35.6 - 48.3*j = 60 @ -53.6°$$

$$V_x(t) = 60\cos(\omega t - 53.6°) = 60\cos(\omega t - 0.9354)$$

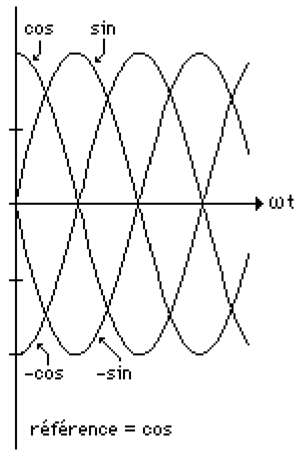
Cette solution peut se faire graphiquement.



1.7.5 - Position des fonctions trigonométriques dans le domaine des phaseurs

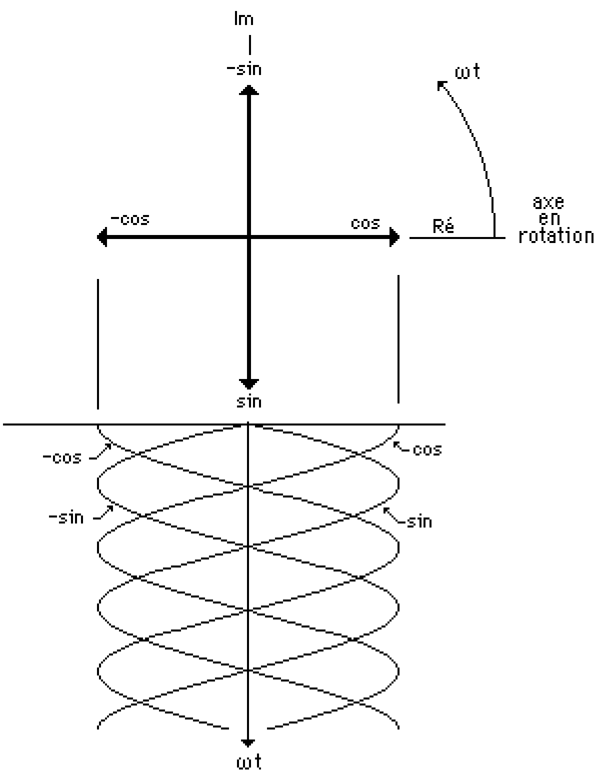
Les fonctions trigonométriques qui nous intéressent sont illustrées en fonction du temps, i.e. le cosinus et le sinus.

Si l'on observe les fonctions du temps à t = 0 avec le cosinus comme référence à cause de l'identité d'Euler, les autres fonctions sont faciles à placer.



Si l'on remet l'axe de rotation en mouvement, on voit que la partie réelle du phaseur projetée sur l'axe réel donne l'amplitude en fonction du temps.

le phaseur @ 0° génère le cosinus
le phaseur @ 90° génère le -sinus
le phaseur @ 180° génère le -cosinus
le phaseur @ -90° génère le sinus



Sur l'ordinateur, vous avez la couleur

1.7.6 - Addition et soustraction de fonctions trigonométriques de même fréquence par la technique des phaseurs (avec des cosinus et des sinus)

Soit les fonctions suivantes:

$V_1(t) = 20\sin(\omega t + \pi/6)$ module 20, sin@30°
$V_2(t) = 10\cos(\omega t + \pi)$ module 10, cos@180°
$V_3(t) = -30\sin(\omega t - \pi/3)$ module 30, -sin@-60°
$V_4(t) = -40\cos(\omega t - \pi/4)$ module 40, -cos@-45°

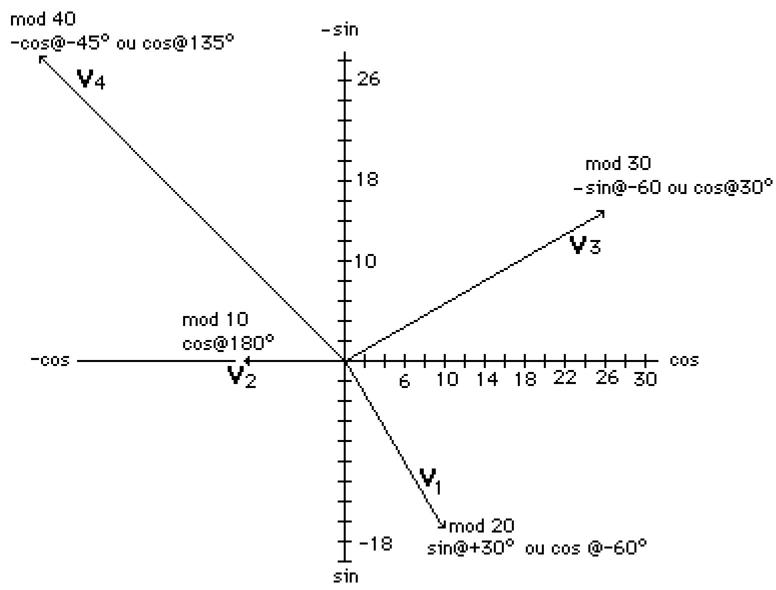
Avant d'écrire les phaseurs de ces fonctions de même fréquence, il faut:
A) soit convertir les sinus en cosinus,
B) soit utiliser un plan complexe et placer les fonctions suivant notre compréhension de la page précédente. On peut alors y voir les relations entre les cosinus et les sinus.

Le phaseur étant toujours considéré comme un cosinus,

$\mathbf{V}_1$ = 20@-60° = 10 - 17.3*j
$\mathbf{V}_2$ = 10@180° = -10 + 0*j
$\mathbf{V}_3$ = 30@30° = 26 + 15*j
$\mathbf{V}_4$ = 40@135° = -28.28 + 28.28*j

$\mathbf{V}_x = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \mathbf{V}_3 + \mathbf{V}_4$ = -2.3 + 26.9*j = 26 @ 95°

Graphiquement, le résultat semble bon.



Récapitulation

La prise d'énergie qui alimente nos appareils domestiques est une fonction du temps.

Le fournisseur d'énergie (Hydro-Québec) essaie de générer et de distribuer cette fonction sous forme sinusoïdale.

Nous utiliserons la fonction cosinus pour représenter cette fonction à cause de l'identité d'Euler.

L'usage des lois de Kirchhoff et des relations entre les modèles qui représentent les effets de l'électricité donnent des équations intégro-différentielles ID qui seront considérées comme linéaires.

Si la source d'énergie est sinusoïdale et que seulement les effets linéaires sont présents, la solution de l'équation (le courant si la source est une tension) sera de même forme que la source d'énergie, mais ne sera pas de même amplitude et ne passera pas à zéro (la phase) en même temps que la source.

Une transformation dans le domaine des phaseurs permettra de déterminer l'amplitude et la phase de la réponse par solution d'équations algébriques en nombres complexes.

La méthode des phaseurs permet d'additionner et de soustraire des fonctions du temps de même fréquence et comme les deux lois de Kirchhoff font appel à des additions et soustractions de tensions et de courants, ces lois seront applicables dans le domaine des nombres complexes, domaine que la littérature nomme parfois domaine des fréquences si on analyse un circuit en gardant la fréquence comme une variable.

Dans le domaine du temps:
Première loi de Kirchhoff $\Sigma v(t) = 0$
Deuxième loi de Kirchhoff $\Sigma i(t) = 0$

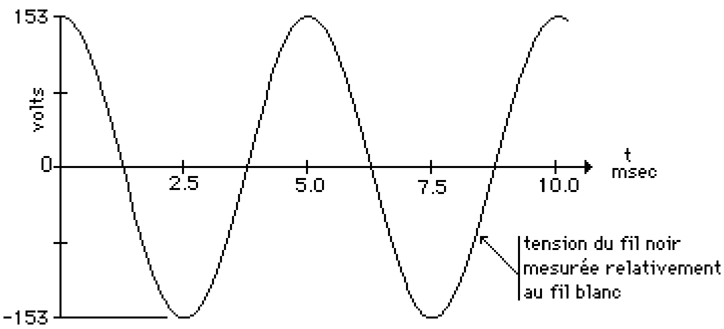
Dans le domaine des fréquences:
Première loi de Kirchhoff ΣV = 0
Deuxième loi de Kirchhoff ΣI = 0

où **V** et **I** sont des phaseurs.

1.8 - Exercices

E1-1
La fonction périodique illustrée est la tension relative entre deux fils i.e. un noir(a) et un blanc(b).
Donnez:

a) la période T
b) la fréquence f
c) la valeur de V_{max}
d) la valeur de V_{moyen}
e) la valeur de V_{eff}
f) la fonction $V_{ab}(t)$



m01sol1

E1-2
La fonction périodique illustrée au numéro 1 est raccordée à un circuit qui contient les effets "joule", "faraday" et "coulomb". Des mesures donnent les valeurs suivantes pour ces effets.

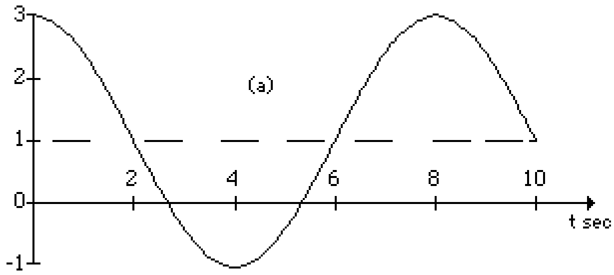
effet "joule" : 10 Ω
effet "faraday" : 7.958mH
effet "coulomb" : 79.58µF

a) Faites un modèle de ce circuit.
b) Écrivez l'équation intégro-différentielle qui régit ce modèle.
c) Calculez la résistance et les réactances qui serviront à représenter les effets.

m01sol2

E1-3

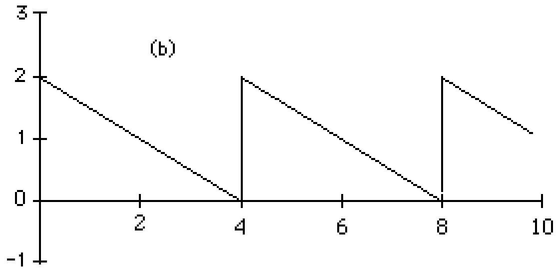
Calculez la valeur efficace des fonctions illustrées.



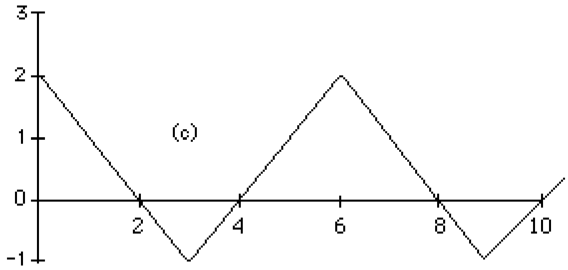
m01sol3a m01sol3aa

E1-3 suite

Calculez la valeur efficace des fonctions illustrées.



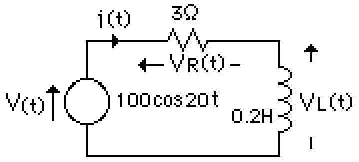
m01sol3b

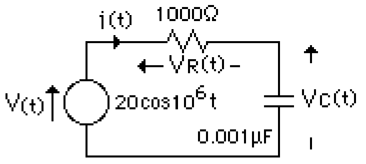


m01sol3c

E1-4

a) Écrivez les équations intégro-différentielles que donnent les lois de Kirchhoff pour les circuits illustrés.
b) Transformez les circuits du domaine du temps au domaine des fréquences.
c) Calculez le phaseur courant.
d) Écrivez la fonction du temps qui représente le courant.





m01sol4

E1-5

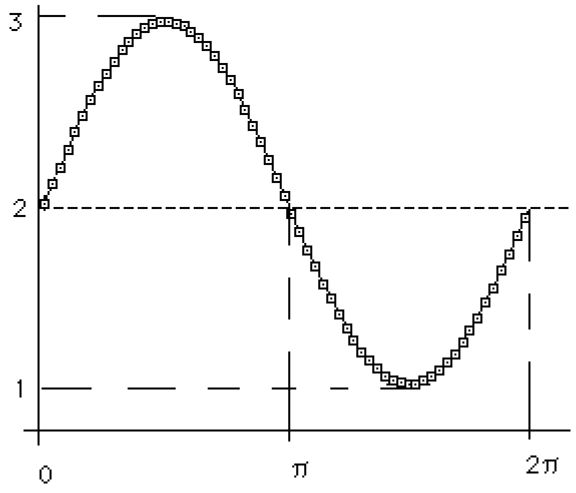
Soit:
$F_1(t) = 10\cos(10t - 0.5236)$, $F_2(t) = -20\sin(10t - 0.5236)$
$F_3(t) = -30\cos(10t + 0.5236)$, $F_4(t) = 15\sin(10t + 1.047)$
$F_5(t) = 20\cos(10t + 1.047)$

Calculez:
a) $F_a(t) = F_1(t) + F_2(t)$
b) $F_b(t) = F_1(t) - F_2(t) + F_3(t) - F_4(t) + F_5(t)$
c) $F_c(t) = -F_1(t) - F_2(t) - F_3(t) + F_4(t)$

m01sol5

E1-6

Le courant sinusoïdal illustré circule dans un circuit R_L série où R=3Ω et L=5mH. La fréquence angulaire est 1krad/sec.



[a] Calculez la valeur moyenne et la valeur efficace (rms) de ce courant.
[b] Trouvez la valeur moyenne et la valeur efficace (rms) du voltage aux bornes de l'ensemble R_L.

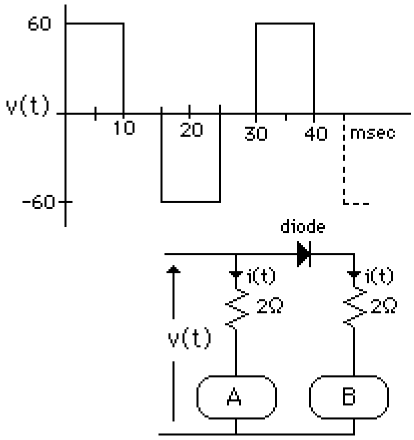
[a] 2A,2.12A
[b] 6V,7.28V

Pour faire cet exercice, il faut retourner aux notions de base. La superposition sera l'outil si le problème est linéaire.

m01sol6

E1-7

Un ampèremètre à courant continu (c.c.) répond à la valeur moyenne du signal qui y circule. Un ampèremètre à courant alternatif (c.a.) répond à la valeur efficace (rms) du signal qui y circule.



a)Soit le circuit illustré où les ampèremètres A & B sont des ampèremètres (c.c.) alors que le signal que l'on applique est l'onde carrée donnée.

Calculez la lecture des ampèremètres "A" et "B".

Rép. A = 0 B = 10

b) Soit le circuit illustré où les ampèremètres A & B sont des ampèremètres (c.a.) alors que le signal que l'on applique est l'onde carrée donnée.

Calculez la lecture des ampèremètres "A" et "B".

Rép. A = 24.49 B = 17.32

La diode ne laisse passer le courant que dans le sens de la flèche.

m01sol7a m01sol7b

E1-8

Le cycle de fonctionnement d'un moteur est:
à t=0 le moteur tourne à vide et consomme 5 hp,
à t=5 sec. le moteur tire 30 hp, la montée en charge étant linéaire, la charge de 30 hp est nécessaire pendant 5 sec., puis le moteur tourne à vide pour 10 sec., avant de recommencer le cycle.

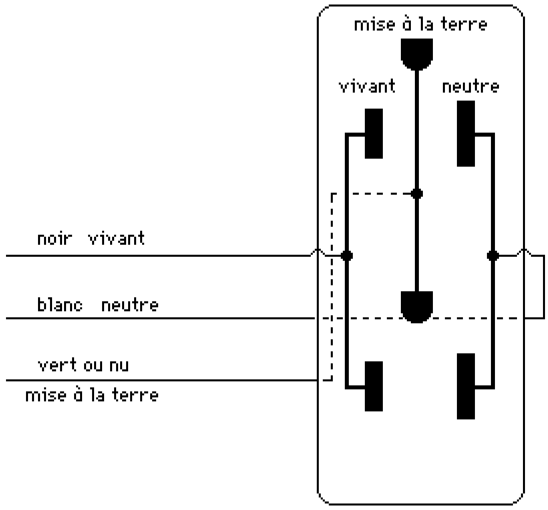
[a] Faire un graphique du cycle.
[b] Calculer le moteur requis. (disponible en 15,20,30,50,hp)

La notion de valeur efficace (rms) peut être utilisée pour calculer la puissance d'un moteur. Faire l'exercice dans cette optique.

m01sol8a m01sol8b

1.9 - Annexe: Position de la mise à la terre

A la première page de ce chapitre, on retrouve une prise d'énergie avec la mise à la terre dans la position du haut de l'ensemble. Lors de la rédaction j'ai observé que certaine prise avait la mise à la terre en haut alors que d'autre avait la mise à la terre en bas. J'ai posé la question suivante à d'autres professeurs du département: "Est-ce qu'il existe une règle pour déterminer si la prise d'énergie doit avoir la mise à la terre en haut ou en bas?"



Le professeur Richard Thibault me répond:

De Richard Thibault
À Adrien Leroux
Objet: Emplacement de la mise à la terre dans une prise murale

J'ai rejoint mon copain Jean-Nil Duquette qui a travaillé 35 ans comme électricien dans des environnements industriels, commerciaux et résidentiels.

Voici ce qu'il m'a dit:

a) le code ne dit rien sauf dans le cas de prises installées dans des campings. Dans ces endroits, la mise à la terre doit être en haut;

b) dans certains travaux industriels, l'ingénieur demande parfois que la mise à la terre soit en haut ou en bas selon les fils de raccordement des équipements qui devront être branchés ultérieurement dans les prises;

c) dans les autres cas, les prises sont installées selon le goût de l'électricien ou de l'entrepreneur. Dans certaines situations (clôtures), les prises sont même installées dans une position horizontale;

d) mon copain met toujours la mise à la terre en haut et ceci pour 2 raisons:

d-i) des trois parties mâles que tu entres dans une prise pour brancher un appareil, celle qui est reliée à la mise à la terre est la plus longue. C'est donc elle que tu entres en premier. Comme tu branches un appareil presque toujours à un niveau plus bas que tes yeux, tu vois mieux cette partie mâle reliée à la mise à la terre si elle est vers le haut. (Si elle est vers le bas, les deux autres parties mâles t'empêchent de bien la voir);

d-ii) sur un chantier de construction, les électriciens utilisent parfois des extensions qui peuvent être longues et, donc, pesantes. Si la mise à la terre est vers le bas, le poids de l'extension aura tendance à faire sortir de la prise les deux autres parties mâles. Si la mise à la terre est vers le haut, la gravité aura tendance à faire entrer encore plus profondément dans la prise les deux autres parties mâles.

Richard