

Guy CHATEIGNER
Michel BOËS
Jean-Paul CHOPIN
Daniel VERKINDÈRE

BTS

Électricité

en 19 fiches

Régimes sinusoïdal
et non-sinusoïdal

Comprendre
et apprendre
facilement

DUNOD

**Guy CHATEIGNER
Michel BOËS
Jean-Paul CHOPIN
Daniel VERKINDÈRE**

Électricité en 19 fiches

Régimes sinusoïdal et non-sinusoïdal

DUNOD

Consultez nos parutions sur dunod.com



Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements



d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour

les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).

© Dunod, Paris, 2008
ISBN 978-2-10-053955-0

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorise, aux termes de l'article L. 122-5, 2^o et 3^o a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Table des matières

Partie 1 : Introduction

Fiche 1	Linéarité / non-linéarité – Régimes périodiques sinusoïdal et non-sinusoïdal	4
----------------	--	---

Partie 2 : Régime sinusoïdal en monophasé

Fiche 2	Grandeur sinusoïdale : représentation temporelle et caractéristiques	10
Fiche 3	Représentation de Fresnel	18
Fiche 4	Notation complexe : loi d'Ohm	26
Fiche 5	Notation complexe : théorèmes	35
Fiche 6	Puissances – Facteur de puissance – Théorème de Boucherot	42
Fiche 7	Modèles série et parallèle d'un dipôle	52
Fiche 8	Adaptation d'impédance	57
Fiche 9	Circuits magnétiques	61
Fiche 10	Fonction de transfert – Diagramme de Bode	68

Partie 3 : Régime périodique

Fiche 11	Valeurs moyenne et efficace – Facteurs de crête, de forme, d'ondulation	76
Fiche 12	Séries de Fourier – Analyse spectrale	86
Fiche 13	Calcul des coefficients de Fourier	105
Fiche 14	Puissances	114

Partie 4 : Régimes sinusoïdal et non-sinusoïdal en triphasé

Fiche 15	Systèmes triphasés en régime sinusoïdal	125
Fiche 16	Installations triphasées en régime sinusoïdal	129
Fiche 17	Puissances en régime sinusoïdal triphasé	140
Fiche 18	Champs tournants	148
Fiche 19	Régime non-sinusoïdal triphasé – Puissances	153

Linéarité / non-linéarité – Régimes périodiques sinusoïdal et non-sinusoïdal

Objectifs : Distinguer un circuit linéaire d'un non-linéaire. Choisir les outils mathématiques adaptés au fonctionnement du circuit : le régime périodique sinusoïdal ou le régime périodique non-sinusoïdal.

I Linéarité / non-linéarité

• Circuit linéaire

Dipôle linéaire – Charge linéaire

Un dipôle – ou une charge – est linéaire si, et seulement si, la fonction f ou g , de sa relation tension-courant $u = f(i)$ ou $i = g(u)$, est linéaire :

$$f(k_1 i_1 + k_2 i_2) = k_1 f(i_1) + k_2 f(i_2) \quad \text{ou} \quad g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda_2 g(u_2)$$

où k_1, k_2, λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

Exemples : Résistances : $u = Ri$, condensateurs : $i = Cdu/dt$ et bobines : $u = Ldi/dt$ constituent des dipôles linéaires si R, L et C sont des constantes.

Si une source de tension sinusoïdale alimente une charge linéaire, alors le courant dans celle-ci est sinusoïdal.

Circuit électrique linéaire

Tous les dipôles qui le constituent sont linéaires. Les tensions et courants du circuit sont reliés par un *système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants*. Lorsqu'une « sortie » (tension ou courant), notée $s = s(t)$, ne dépend que d'une seule « entrée » (tension ou courant), notée $e = e(t)$, le système se réduit à une seule équation :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + \dots + a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + \dots + b_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e \quad (m \leq n)$$

Remarques :

- Si l'équation différentielle comporte un terme constant (dû à une polarisation par exemple) on l'élimine par un changement de variable pour retrouver la forme ci-dessus.
- Si la sortie dépend de plusieurs entrées, on utilise le principe de linéarité (voir ci-dessous).

Exemple : Circuit RLC (Fig. 1.1)

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = u_E$$

$$LC \frac{d^2 u_R}{dt^2} + RC \frac{du_R}{dt} + u_R = RC \frac{du_E}{dt}$$

$$LC \frac{d^2 u_L}{dt^2} + RC \frac{du_L}{dt} + u_L = LC \frac{d^2 u_E}{dt^2}$$

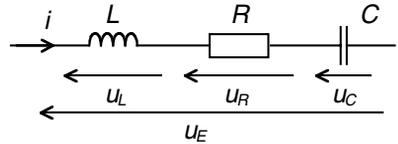


Figure 1.1 Circuit RLC

Principe de linéarité

Dans un circuit linéaire, la réponse d'une grandeur (tension ou courant) désignée comme « sortie » et notée $s(t)$, est la somme des réponses dues à chaque source (indépendante ou liée) d'excitation $e_k(t)$ prise séparément, les autres sources étant éteintes (on dit aussi « passivées », c'est-à-dire rendues passives). Ce qui s'écrit :

$$s(t) = \sum_k f_k[e_k(t)], \text{ les fonctions } f_k \text{ étant linéaires}$$

Exemple : Voir l'exercice « Application du théorème de superposition », fiche 5.

• Circuit non-linéaire

Dipôle non-linéaire – charge non-linéaire

Un dipôle – ou une charge – est non-linéaire si, et seulement si, la fonction f ou g de sa relation tension-courant $u = f(i)$ ou $i = g(u)$, n'est pas linéaire.

Exemples

Une V.D.R. (Voltage Dependant Resistor) : $i = ku^n$, une thermistance (sa résistance est fonction de la température qui dépend donc aussi de la puissance qu'elle dissipe), une bobine à noyau ferromagnétique (Fig. 1.2), une diode (même idéale) et un interrupteur sont des dipôles non-linéaires.

En convention récepteur, la relation entre la tension et le courant s'écrit :

$$u = N \frac{d\varphi}{dt} = N \frac{d.f(i)}{dt}$$

où N est le nombre de spires du bobinage (voir fiche 9).

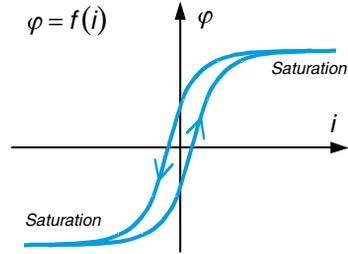


Figure 1.2 Caractéristique $\varphi = f(i)$ d'une bobine à noyau ferromagnétique

Remarque : Dans le cas de la bobine, la tension est proportionnelle à la variation du flux, et la relation tension-flux est linéaire ; mais c'est la relation entre flux et courant, souvent non-linéaire, qui est alors cause de non-linéarité globale.

Si une source de tension sinusoïdale alimente une charge non-linéaire, alors le courant dans celle-ci n'est pas sinusoïdal.

Circuit électrique non-linéaire

Au moins un des dipôles qui le constituent est non-linéaire. Les tensions et courants du circuit sont reliés par un *système d'équations différentielles non-linéaires*, qui nécessite une résolution numérique sophistiquée (ce que font les simulateurs).

II Régimes périodiques sinusoïdal et non-sinusoïdal

- **Régime périodique sinusoïdal**

(Fiches 2 à 10 pour le monophasé et fiches 15 à 18 pour le triphasé)

Régime sinusoïdal (voir fiche 2)

Un circuit électrique est en *régime sinusoïdal permanent* (ou *régime harmonique*) quand tensions et courants sont des fonctions sinusoïdales du temps de même fréquence. **Le circuit électrique doit être linéaire** et alimenté en permanence par une source d'énergie électrique sinusoïdale. Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, elles doivent être synchrones et de même fréquence. Le régime sinusoïdal permanent est un régime périodique particulier.

Notation complexe (voir fiches 4 et 5) et vecteurs de Fresnel (voir fiche 3)

Soit un circuit linéaire dont la sortie $s = s(t)$ dépend de la seule entrée $e = e(t)$. Si $e(t)$ est sinusoïdale, alors $s(t)$ est aussi sinusoïdale de même fréquence (régime sinusoïdal établi). Bien entendu, les calculs sur les valeurs instantanées restent possibles, mais ils deviennent vite longs et délicats (il faut remplacer les expressions de $e(t)$ et $s(t)$ dans l'équation différentielle à coefficients constants). Afin de faciliter les calculs, on utilise deux outils, qui font abstraction du temps : le formalisme complexe ou la construction vectorielle de Fresnel.

$$\left. \begin{array}{l} e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_e) \\ \underline{E} = [E ; \alpha_e] = E e^{j\alpha_e} \\ \vec{E} = [E ; \alpha_e] \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{circuit}} \left\{ \begin{array}{l} s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_s) \\ \underline{S} = [S ; \alpha_s] = S e^{j\alpha_s} \\ \vec{S} = [S ; \alpha_s] \end{array} \right.$$

Passage de l'équation différentielle à coefficients constants à la notation complexe et réciproquement

En supposant valide la notation complexe, on passe de l'équation différentielle à la notation complexe en remplaçant $e(t)$ par \underline{E} , $s(t)$ par \underline{S} , d/dt par $j\omega$ et plus généralement d^k/dt^k par $(j\omega)^k$. L'opération inverse permet de passer de la notation complexe à l'équation différentielle. Le principe est le suivant :

Passage de l'équation différentielle à la notation complexe	$\left\{ \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right.$	$\begin{aligned} \tau \frac{ds}{dt} + s &= K \left(\tau' \frac{de}{dt} + e \right) \\ j\omega\tau \underline{S} + \underline{S} &= K(j\omega\tau' \underline{E} + \underline{E}) \\ \underline{S} &= \frac{K(1 + j\omega\tau') \underline{E}}{1 + j\omega\tau} \end{aligned}$	$\left\{ \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array} \right.$	Passage de la notation complexe à l'équation différentielle
---	---	--	---	---

Remarque : Dans certains cas, il peut être plus simple d'utiliser la notation complexe pour la mise en équation puis d'en déduire l'équation différentielle.

Exemple

Soit le schéma (Fig. 1.3) où u_E est une source de tension variable. En utilisant la notation complexe, on peut exprimer la fonction de transfert $\underline{U}_S/\underline{U}_E$.

Tout calcul fait, on obtient :

$$\frac{\underline{U}_S}{\underline{U}_E} = \frac{1}{1 + j(L/R)\omega + j^2 LC\omega^2}$$

On écrit les termes en \underline{U}_S à gauche et ceux en \underline{U}_E à droite :

$$(j^2 LC\omega^2 + j(L/R)\omega + 1)\underline{U}_S = \underline{U}_E$$

Puis, en remplaçant \underline{U}_S par u_S , \underline{U}_E par u_E , $j\omega$ par d/dt et $j^2\omega^2$ par d^2/dt^2 , on obtient l'équation différentielle reliant u_S à u_E :

$$LC \frac{d^2 u_S}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_S}{dt} + u_S = u_E$$

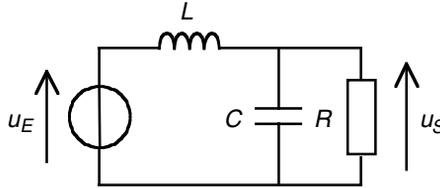


Figure 1.3 Circuit de l'exemple

- **Régime périodique non-sinusoïdal**

(voir fiches 11 à 14 pour le monophasé et fiche 19 pour le triphasé)

Régime périodique (voir fiche 11)

Un circuit électrique est en régime périodique quand tensions et courants sont des fonctions périodiques du temps. Le régime périodique est un régime établi (permanent) obtenu quand tensions et courants sont devenus périodiques.

Signal périodique

Un signal périodique (tension ou courant en électricité) se reproduit à l'identique au cours du temps. Son diagramme temporel est une suite de motifs identiques. La période T d'un signal périodique est la plus petite durée entre deux instants où le signal se reproduit à l'identique :

$$\forall t, s(t + kT) = s(t) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Développement en série de Fourier (voir fiches 12 et 13)

Un signal réel $s(t)$ périodique de période T , développable en série de Fourier, peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) \quad \text{avec } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Remarque : Ce développement permet une *approche spectrale*, chacune des *composantes* du signal étant analysée séparément sur le même circuit ; la composante continue donne lieu à une étude simplifiée en régime continu ; les autres composantes, toutes sinusoïdales, sont identifiées d'après leur fréquence n/T .

Cas d'un circuit linéaire alimenté par une source périodique non-sinusoidale (voir fiche 12, 12.3 « Méthodes », et les exercices en fin de fiche)

Soit un circuit linéaire dont la sortie $s = s(t)$ dépend de la seule entrée $e = e(t)$. Si $e(t)$ est périodique et développable en série de Fourier, alors $s(t)$ est la somme des réponses obtenues pour chacune des composantes du développement en série de Fourier de $e(t)$.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} E_{n_{\max}} \cos(n\omega t + \alpha_n) \xrightarrow{\text{circuit}} s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} S_{n_{\max}} \cos(n\omega t + \beta_n)$$

Cette méthode est basée sur le principe de linéarité (voir paragraphe « Circuit linéaire » ci-dessus).

Exemple : Filtre passe-bas du 1^{er} ordre excité par une tension rectangulaire (Fig. 1.4).

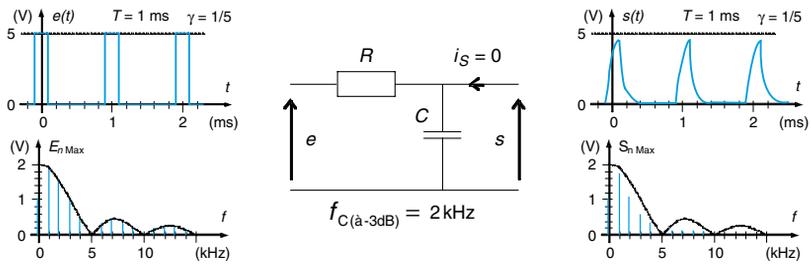


Figure 1.4 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre excité par une tension rectangulaire

Cas d'un circuit non-linéaire

Il existe des cas fréquents (redressement, commutation, composants non-linéaires, etc.) où le circuit est globalement non-linéaire. En régime périodique, l'approche spectrale est valable même si le circuit est non-linéaire. La connaissance des développements en séries de Fourier des tensions et courants permet de résoudre une grande quantité de problèmes pratiques et théoriques.

Exemple : Redresseur double alternance alimenté par une tension sinusoïdale (Fig. 1.5).

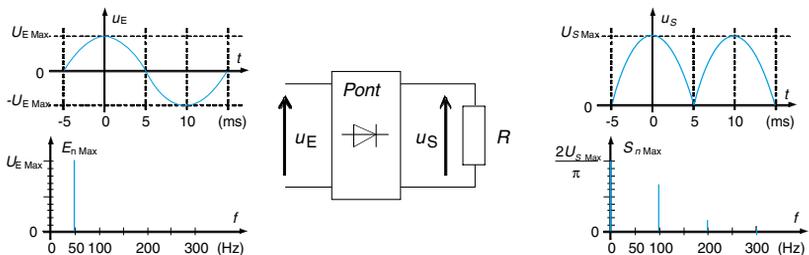


Figure 1.5 Redresseur double alternance alimenté par une tension sinusoïdale

Grandeur sinusoidale : représentation temporelle et caractéristiques

Objectifs : Lire, comprendre et mesurer les caractéristiques d'une grandeur sinusoidale représentée en fonction du temps.

I À savoir

- **Régime sinusoidale permanent**

Un circuit électrique est en *régime sinusoidale permanent* (ou *régime harmonique*) quand tensions et courants sont des fonctions sinusoidales du temps de même fréquence. Le circuit électrique doit être linéaire (c'est-à-dire composé de dipôles linéaires) et alimenté en permanence (le régime transitoire a donc cessé) par une source d'énergie électrique sinusoidale. Si plusieurs sources sont présentes dans un circuit, elles doivent être synchrones et de même fréquence. Le régime sinusoidale permanent est un régime périodique particulier. Un *signal sinusoidale* s'écrit :

$$s(t) = S_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_s)$$

- **Expression temporelle d'une tension sinusoidale** (Fig. 2.1 et Fig. 2.2)

$$u = u(t) = U_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_u)$$

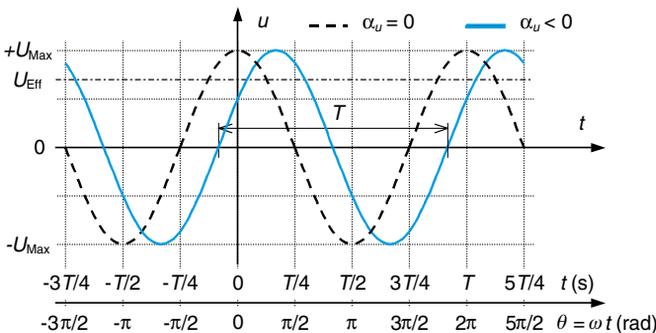


Figure 2.1 La tension en trait continu est en retard de phase sur la référence en trait pointillé

Symbole	Nom	Unité
$u = u(t)$	valeur instantanée de la tension	volt (V)
$U_{\text{Max}} = \hat{U}$	valeur maximale de la tension	volt (V)
$U_{\text{Moy}} = \langle u \rangle = 0$	valeur moyenne de la tension	volt (V)
$U_{\text{Eff}} = U = \frac{U_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}$	valeur efficace de la tension	volt (V)
t	temps	seconde (s)
$\omega t + \alpha_u$	phase de u à l'instant t	radian (rad)
α_u	phase initiale (à $t = 0$) de u	radian (rad)
T (avec $\omega T = 2\pi$)	période	seconde (s)
$f = \frac{1}{T}$	fréquence	hertz (Hz)
$\omega = 2\pi f$	pulsation	radian par seconde (rad/s)

Figure 2.2 Définitions pour une grandeur sinusoïdale

Remarque : Ceci reste valable pour toute grandeur sinusoïdale, par exemple l'intensité d'un courant s'écrit : $i = i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_i)$.

• **Déphasage**

Le déphasage est la différence entre les phases initiales de deux grandeurs sinusoïdales de même fréquence.

Le déphasage entre une tension u et un courant i , u en avance de phase par rapport à i si φ positif, est :

$$\varphi = \alpha_u - \alpha_i$$

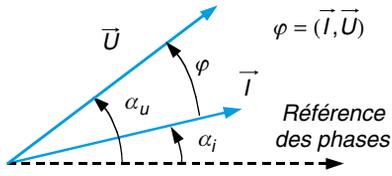


Figure 2.3 Représentation de Fresnel associée (voir fiche 3)

Remarques :

- Les phases initiales et le déphasage sont écrits modulo 2π .
- L'I.E.C. (International Electrotechnical Commission) recommande que la valeur indiquée du déphasage soit supérieure à $-\pi$ rad et inférieure ou égale à π rad, ce qui s'obtient par l'ajout éventuel d'un multiple de 2π rad à la différence $\alpha_u - \alpha_i$.
- Si $\varphi > 0$ alors on dit que la tension u est en **avance de phase** par rapport au courant i (ou que i est en **retard de phase** par rapport à u), et si $\varphi < 0$ alors on dit que u est en **retard de phase** par rapport à i (ou que i est en **avance de phase** par rapport à u).

II Méthodes

En régime sinusoïdal permanent, les tensions et courants d'un circuit sont tous sinusoïdaux de même fréquence. Pour qu'il en soit ainsi, tous les éléments doivent être linéaires, et s'il y a plusieurs sources, toutes doivent être synchrones et de même fréquence.

Les lois des nœuds et des mailles restent valables à condition de les appliquer aux valeurs instantanées, aux représentants vectoriels (voir fiche 3) ou aux représentants complexes (voir fiche 4).

III Mesures

• Voltmètre - Ampèremètre - Pince ampèremétrique

Mesures de la tension aux bornes d'une charge et de l'intensité la traversant.

- Un voltmètre AC (Alternative Current) placé en parallèle ou dérivation (Fig. 2.4) permet de mesurer la valeur efficace de la tension.
- Un ampèremètre AC placé en série (Fig. 2.4), permet de mesurer la valeur efficace de l'intensité d'un courant.

Montage aval dit aussi à courte dérivation ou à tension « vraie ». Condition d'utilisation :

$$i' \ll i \iff Z_{\text{Voltmètre}} \gg Z_{\text{Charge}}$$

Montage amont dit aussi à longue dérivation ou à intensité « vraie ». Condition d'utilisation :

$$u' \ll u \iff Z_{\text{Ampèremètre}} \ll Z_{\text{Charge}}$$

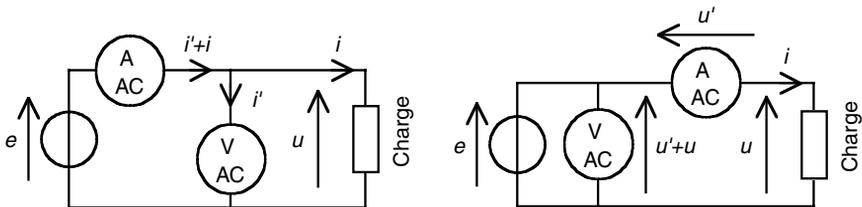


Figure 2.4 Mesures de U_{Eff} et I_{Eff} ; $e = E_{\text{Max}} \cos(\omega t)$

Remarques :

- Le montage aval est le plus couramment utilisé car les voltmètres modernes possèdent toujours des impédances très grandes devant la plupart des charges, alors que les petites impédances des ampèremètres (fonction des calibres) peuvent parfois ne pas être négligeables devant certaines charges.
- L'utilisation d'une pince ampèremétrique (capteur de courant sans contact galvanique à transformateur de courant ou sonde à effet Hall) évite d'avoir à ouvrir le circuit (Exemple du montage amont :

Fig. 2.5). Dans la pratique, c'est la facilité de pose de la pince ampèremétrique et les conditions de sécurité qui imposent souvent le choix du montage amont ou aval.

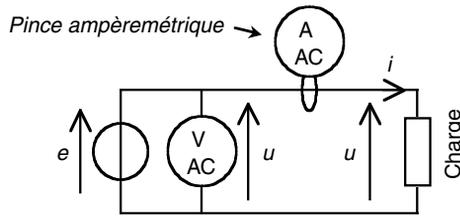


Figure 2.5 Mesures de U_{EF} et I_{EF} avec pince ampèremétrique
Exemple du montage amont

• Oscilloscope

Un oscilloscope permet de visualiser une tension en fonction du temps, de mesurer sa valeur maximale, de mesurer le déphasage entre deux tensions. De plus, les oscilloscopes numériques permettent généralement d'afficher directement les valeurs maximales, moyennes et efficaces, les déphasages, les périodes, les fréquences, etc.

- L'utilisation d'entrées différentielles isolées (ou de sondes différentielles isolées) diminue les risques électriques et écarte les risques de court-circuit par la masse de l'oscilloscope, car la masse de l'appareil est reliée à la terre sauf en cas de double isolation.
- La visualisation des courants est facilitée par l'utilisation de sondes de courant.

Exemple 1 : Mesure du déphasage entre tension et courant d'un dipôle d'impédance Z à l'aide d'un oscilloscope, entrées non isolées (Fig. 2.6). La voie A visualise la tension $u_1 = u_A$ aux bornes du dipôle et la voie B

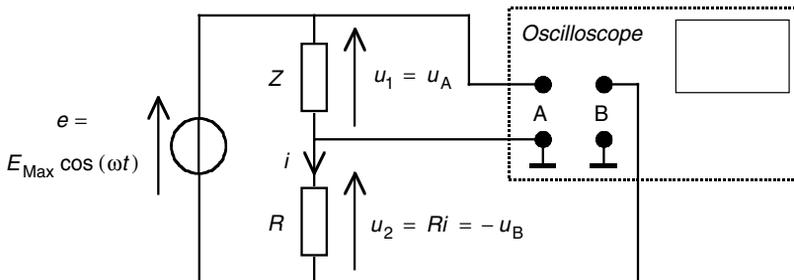


Figure 2.6 Schéma de mesure – La voie B est inversée
Exemple du montage aval

le courant qui le traverse par l'intermédiaire de la résistance R . Les entrées de l'oscilloscope n'étant pas isolées, la masse unique doit être connectée entre le dipôle et la résistance ; il faut donc inverser la voie B afin de retrouver la phase du courant : $u_2 = Ri = -u_B$. Attention, la référence de la source « e » ne doit pas être à la terre !

Le principe de mesure avec un oscilloscope est basé sur la conversion du décalage temporel d'un signal par rapport à un autre en déphasage (Fig. 2.7) :

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1 = \omega(t_2 - t_1) = 2\pi f(t_2 - t_1) = \frac{2\pi(t_2 - t_1)}{T}$$

D'où :

$$\frac{\varphi(\text{rad})}{2\pi} = \frac{t_2 - t_1}{T} \iff \frac{\varphi(^{\circ})}{360} = \frac{t_2 - t_1}{T}$$

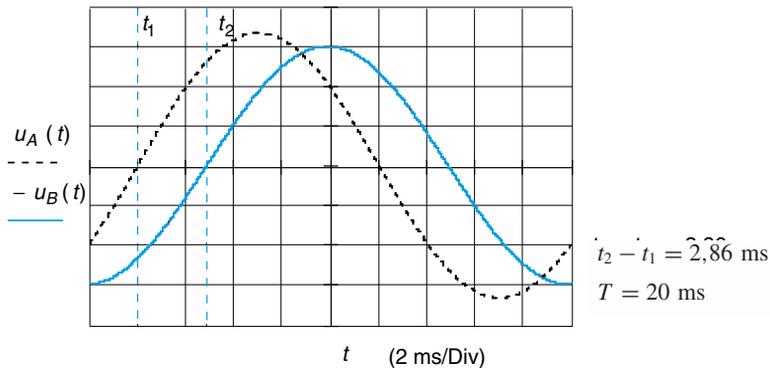


Figure 2.7 Mesure à l'aide des curseurs,

$$\varphi(^{\circ}) \approx 360^{\circ} \times \frac{2,86}{20} \approx 51,5^{\circ}$$

Plusieurs méthodes de mesure du déphasage sont possibles :

- Utilisation de fonctions spécifiques de l'oscilloscope (déphasage φ , décalage temporel $t_2 - t_1$).
- Mesure de temps à l'aide des curseurs, puis conversion (voir Fig. 2.7). On peut améliorer la précision en dilatant à l'écran l'écart $t_2 - t_1$.
- Mesure directe en décalibrant la base de temps afin d'obtenir une échelle en degrés par division. En pratique, on ajuste une demi-période, soit 180° , sur 9 divisions, ce qui donne une échelle de $20^{\circ}/\text{div}$. (Fig. 2.8). On peut aussi ajuster une demi-période sur 10 divisions, ce qui donne une échelle de $18^{\circ}/\text{div}$.

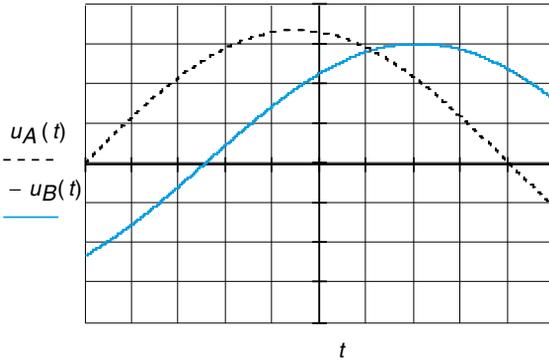


Figure 2.8 Mesure directe, $\varphi_{(v)} \approx 2,6 \times 20^\circ / \text{div.} \approx 52^\circ$

Remarque : Les mesures s’effectuent en mode AC et en ajustant précisément les positions du « zéro » pour supprimer tout décalage continu.

Exemple 2 : Mesure du déphasage entre tension et courant d’un dipôle d’impédance Z à l’aide d’un oscilloscope à entrées différentielles isolées (Fig. 2.9). La voie A visualise la tension $u_1 = u_A$ aux bornes du dipôle et la voie B le courant qui le traverse par l’intermédiaire d’une sonde de courant : $k \times i = u_B$. Ce montage est toujours à préférer au précédent pour sa simplicité et son niveau de sécurité électrique (isolation), notamment dans le cas d’une mesure sur le réseau. Si l’oscilloscope ne possède pas d’entrée isolée, on intercalera, entre la charge et la voie A, une sonde de tension différentielle isolée.

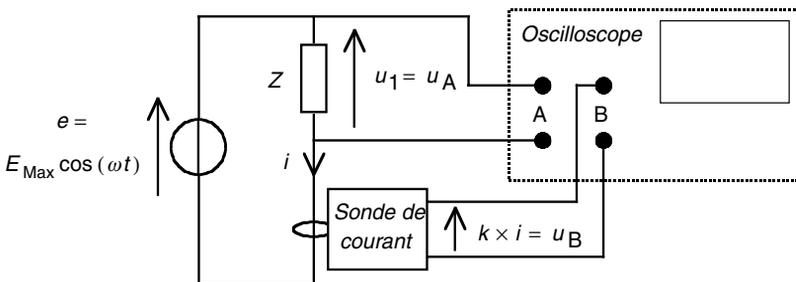


Figure 2.9 Schéma de mesure avec sonde de courant et entrées isolées
Exemple du montage aval

- **Multimètre**

C'est un appareil incorporant plusieurs fonctions : fréquencemètre, ampèremètre, voltmètre, ohmmètre, etc. Sa principale limitation est sa bande passante (20 kHz typique). En position AC on mesurera la valeur efficace du signal sinusoïdal, et en position DC on contrôlera l'absence de composante continue.

Mesures à l'oscilloscope

On relève l'oscillogramme (Fig. 2.10) à l'aide du schéma de mesure donné précédemment où $R = 0,01 \Omega$ et $E_{\text{Eff}} = 230 \text{ V}$ (voir Fig. 2.6).

1. Mesurer la fréquence des tensions.
2. Déterminer les valeurs maximales $U_{1\text{Max}}$ et I_{Max} . En déduire les valeurs efficaces $U_{1\text{Eff}}$ et I_{Eff} .
3. Mesurer le déphasage φ entre u_1 et i , u_1 en avance de phase par rapport à i si φ positif.
4. Déterminer l'impédance Z du dipôle ainsi que sa nature (inductif, résistif ou capacitif).
5. Donner une expression de $u_1(t)$ et $i(t)$.

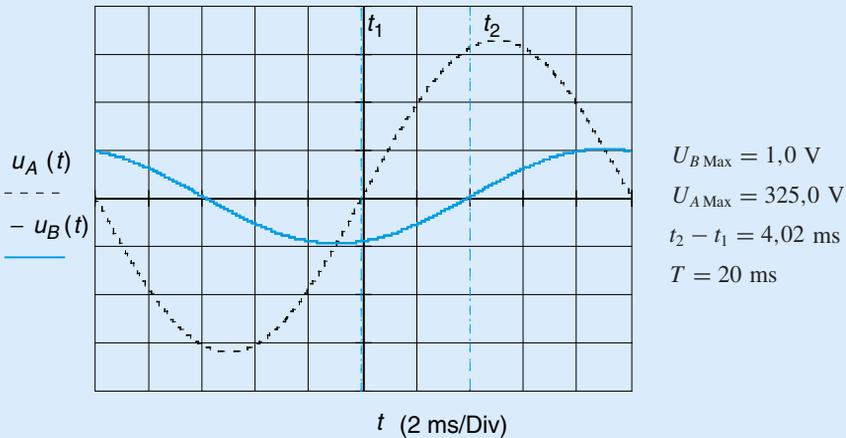


Figure 2.10 Oscillogramme

Solution

1. Fréquence.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{20 \text{ ms}} = 50 \text{ Hz} \quad (T = 10 \times 2 \text{ ms/div.} = 20 \text{ ms})$$

2. Valeurs maximales $U_{1\text{Max}}$ et I_{Max} et valeurs efficaces $U_{1\text{Eff}}$ et I_{Eff}

$$U_{1\text{Max}} = U_{A\text{Max}} \approx 325 \text{ V} \implies U_{1\text{Eff}} = \frac{U_{1\text{Max}}}{\sqrt{2}} \approx 229,8 \text{ V} \approx 230 \text{ V}$$

$$I_{\text{Max}} = \frac{U_{B\text{Max}}}{R} \approx 100 \text{ A} \implies I_{\text{Eff}} = \frac{I_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \approx 70,7 \text{ A}$$

3. Déphasage φ entre u_1 et i . La tension u_1 étant en avance par rapport au courant i , le dipôle est inductif.

$$\frac{\varphi}{360} = \frac{t_2 - t_1}{T} \implies \varphi \approx 360^\circ \times \frac{4,02}{20} \approx 72,4^\circ, \text{ soit } \varphi \approx 1,26 \text{ rad}$$

4. Impédance Z du dipôle.

$$Z = \frac{U_{1\text{Eff}}}{I_{\text{Eff}}} \approx \frac{229,8}{70,7} \approx 3,25 \text{ } \Omega$$

5. Expressions de $u_1(t)$ et $i(t)$. Par définition, on a :

$$u_1(t) = U_{1\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_u) = U_{1\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_i + \varphi)$$

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_i) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t + \alpha_u - \varphi)$$

En prenant la tension $u_1(t)$ pour référence des phases ($\alpha_u = 0$), on obtient :

$$u_1(t) = U_{1\text{Max}} \cos(2\pi f t) \approx 325 \times \cos(100\pi t)$$

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(2\pi f t - \varphi) \approx 100 \times \cos(100\pi t - 1,26)$$

En prenant le courant $i(t)$ pour référence des phases ($\alpha_i = 0$), on obtient :

$$u_1(t) = U_{1\text{Max}} \cos(2\pi f t + \varphi) \approx 325 \times \cos(100\pi t + 1,26)$$

$$i(t) = I_{\text{Max}} \cos(2\pi f t) \approx 100 \times \cos(100\pi t)$$

Représentation de Fresnel

Objectifs : Construire et exploiter une représentation vectorielle de tensions et de courants d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent.

I À savoir

- **Transposition vectorielle**

À chaque grandeur sinusoïdale on associe un vecteur et réciproquement (Fig. 3.1).

Grandeur sinusoïdale		Vecteur associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u)$	↔	Vecteur : \vec{U}
Valeur efficace : $U = U_{\text{Eff}}$	↔	Norme : $ \vec{U} = U$
Phase initiale (à $t = 0$) : α_u	↔	Angle polaire : α_u

Figure 3.1 Vecteur associé à une grandeur sinusoïdale

Remarque : La norme (ou module) du vecteur \vec{U} est ici prise égale à U (valeur efficace) car on mesure généralement les valeurs efficaces des tensions et courants dans les applications industrielles en régime sinusoïdal. Cependant, on aurait aussi pu décider de la prendre égale à U_{Max} (valeur maximale). Les deux possibilités sont équivalentes, puisque l'on a :

$$U = ZI \text{ et } U_{\text{Max}} = ZI_{\text{Max}} \text{ avec } U_{\text{Max}} = U\sqrt{2} \text{ et } I_{\text{Max}} = I\sqrt{2}$$

- **Loi d'Ohm transposée au calcul vectoriel** (Fig. 3.2)

$\vec{U} = [U ; \alpha_u]$ est le vecteur associé à la tension sinusoïdale u , $\vec{I} = [I ; \alpha_i]$ le vecteur associé au courant sinusoïdal i , Z l'impédance en ohms du dipôle, et φ le déphasage en radians ou degrés entre u et i , u en avance de phase par rapport à i si φ positif.

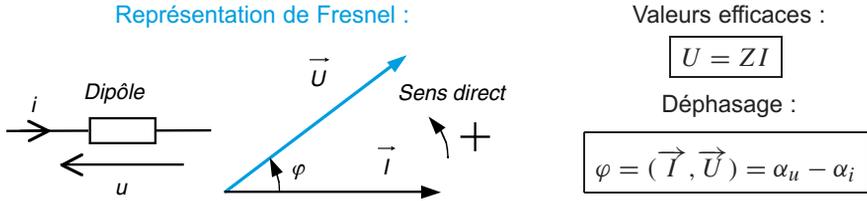


Figure 3.2 Loi d'Ohm transposée au calcul vectoriel

- **Dipôles linéaires élémentaires** (Fig. 3.3)

		Impédance Ω Déphasage (rad)	Représentation de Fresnel
Résistance		$\begin{cases} Z_R = \frac{U_R}{I_R} = R \\ \varphi_R = (\vec{I}_R, \vec{U}_R) = 0 \end{cases}$	
Inductance		$\begin{cases} Z_L = \frac{U_L}{I_L} = L\omega \\ \varphi_L = (\vec{I}_L, \vec{U}_L) = +\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	
Capacité		$\begin{cases} Z_C = \frac{U_C}{I_C} = \frac{1}{C\omega} \\ \varphi_C = (\vec{I}_C, \vec{U}_C) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	

Figure 3.3 Dipôles linéaires élémentaires

II Méthodes

Attention, on ne doit pas ajouter les impédances Z_1, Z_2, \dots, Z_N , exprimées en ohms, de dipôles mis en série, car un dipôle inductif ou capacitif déphase tension et courant entre eux. Similairement, on ne doit pas ajouter les admittances (inverses des impédances) de dipôles mis en parallèle.

- **Lois des nœuds et des mailles**

Elles restent valables à condition de les transposer au calcul vectoriel. Les résultats s'obtiennent alors soit en mesurant modules et phases directement sur la représentation de Fresnel à l'échelle, soit par le calcul en utilisant les relations trigonométriques classiques.

Loi des nœuds (deux formulations)

1) La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent. Exemple (Fig. 3.4) :

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 = \vec{I}_3$$

2) La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle. Exemple (Fig. 3.4) :

$$\vec{I}_1 + \vec{I}_2 - \vec{I}_3 = 0$$

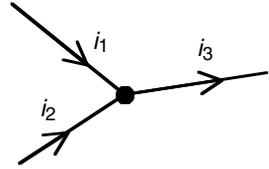


Figure 3.4 Nœud N

Loi des mailles (deux formulations)

1) La somme des tensions dans le sens de parcours de la maille est égale à la somme des tensions en sens inverse. Exemple (Fig. 3.5) :

$$\vec{U}_2 = \vec{U}_1 + \vec{U}_3$$

2) La somme algébrique des tensions dans le sens de parcours d'une maille est nulle. Exemple (Fig. 3.5) :

$$\vec{U}_2 - \vec{U}_1 - \vec{U}_3 = 0$$

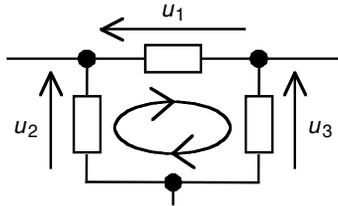


Figure 3.5 Maille M

- Règle de Fresnel (Fig. 3.6)

La somme de deux grandeurs sinusoïdales de même nature (tensions ou courants) et de même fréquence f est une grandeur sinusoïdale de fréquence f ; le module et la phase de cette somme sont donnés par la somme vectorielle associée.

Somme de deux grandeurs sinusoïdales	↔	Somme vectorielle associée
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$		$\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2$

Figure 3.6 Règle de Fresnel

- Projections, module et phase du vecteur somme (Fig. 3.7)

Les projections s'ajoutent :

$$\begin{cases} U_x = U \cos \alpha = U_1 \cos \alpha_1 + U_2 \cos \alpha_2 \\ U_y = U \sin \alpha = U_1 \sin \alpha_1 + U_2 \sin \alpha_2 \end{cases}$$

On en déduit :

$$U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2} \quad \cos \alpha = \frac{U_x}{U} \quad \sin \alpha = \frac{U_y}{U} \quad \tan \alpha = \frac{U_y}{U_x}$$

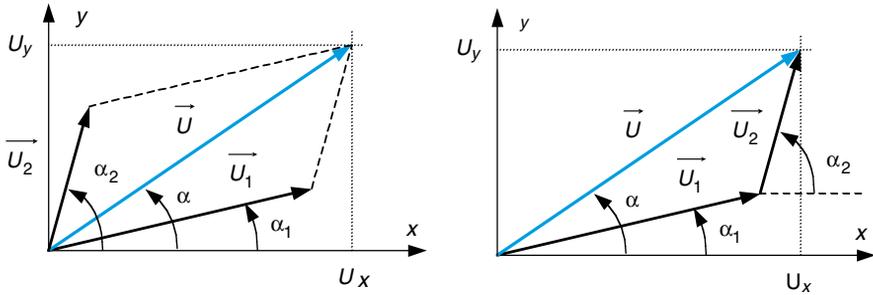


Figure 3.7 Projections, module et phase du vecteur somme (deux constructions possibles)

• Dérivation et intégration (Fig. 3.8)

Grandeur sinusoïdale		Vecteur associé
$u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u)$	\leftrightarrow	$\vec{U} = [U; \alpha_u]$
$\frac{du}{dt} = -\omega U\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_u)$ $= \omega U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u + \pi/2)$	\leftrightarrow	$[\omega U; \alpha_u + \frac{\pi}{2}]$
$\int u dt = U\sqrt{2} / \omega \times \sin(\omega t + \alpha_u)$ $= U\sqrt{2} / \omega \times \cos(\omega t + \alpha_u - \pi/2)$	\leftrightarrow	$[\frac{U}{\omega}; \alpha_u - \frac{\pi}{2}]$

Figure 3.8 Dérivation et intégration

Remarque : On déduit facilement de ces résultats les relations données pour les dipôles élémentaires.

$$u_R = Ri_R \leftrightarrow [U_R; \alpha_u] = [RI_R; \alpha_i + 0] \Rightarrow \begin{cases} Z_R = U_R/I_R = R \\ \varphi_R = (\vec{I}_R, \vec{U}_R) = 0 \end{cases}$$

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} \leftrightarrow [I_C; \alpha_i] = [C\omega U_C; \alpha_u + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \begin{cases} Z_C = U_C/I_C = 1/(C\omega) \\ \varphi_C = (\vec{I}_C, \vec{U}_C) = -90^\circ \end{cases}$$

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \frac{d(Li_L)}{dt} \leftrightarrow [U_L; \alpha_u] = [L\omega I_L; \alpha_i + \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \begin{cases} Z_L = U_L/I_L = L\omega \\ \varphi_L = (\vec{I}_L, \vec{U}_L) = +90^\circ \end{cases}$$

- **Référence des phases**

Il est commode d'attribuer une phase initiale nulle au signal pris pour référence des phases (souvent placée horizontalement dans la représentation de Fresnel). Il est alors souvent plus simple de prendre pour référence des phases : le courant dans le cas d'un circuit série, et la tension dans le cas d'un circuit parallèle.

- **Association d'un vecteur à un sinus**

Toutes les grandeurs sinusoïdales doivent avoir la même origine des phases pour pouvoir être représentées sur un même diagramme de Fresnel. Dans le cas d'un sinus, on écrira :

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_u) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \underbrace{\beta_u - \pi/2}_{\alpha_u})$$

Circuit de repérage de l'ordre des phases

Soit le schéma (Fig. 3.9) d'un circuit de repérage de l'ordre des phases d'une alimentation triphasée. On suppose $C\omega = 1/R$ et la résistance interne de l'ampère-mètre nulle. Les tensions simples, référencées par rapport au neutre, sont :

$$\begin{cases} v_1 = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \\ v_2 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_3 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

1. Tracer la représentation de Fresnel des tensions v_1 , v_2 , v_3 , $u_{12} = v_1 - v_2$, $u_{23} = v_2 - v_3$ et $u_{31} = v_3 - v_1$. En déduire la valeur efficace U des tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} .
2. Tracer la représentation de Fresnel des courants i_R , i_C et i_1 . En déduire la valeur efficace I_1 du courant i_1 .
3. On permute la résistance et le condensateur. Tracer la nouvelle représentation de Fresnel des courants i_R , i_C et i_1 . En déduire le nouveau courant efficace I_1 .
4. Conclure.

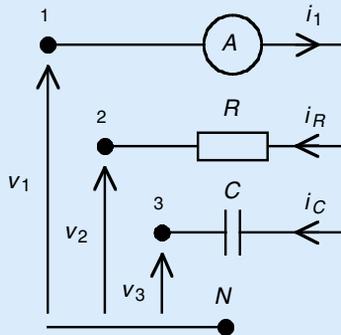


Figure 3.9 Circuit de repérage de l'ordre des phases

Solution

1. Représentation de Fresnel des tensions

– Transposition vectorielle :

$$v_1 = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \longleftrightarrow \vec{V}_1 = [V; 0]$$

$$v_2 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) \longleftrightarrow \vec{V}_2 = [V; -2\pi/3]$$

$$v_3 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3) \longleftrightarrow \vec{V}_3 = [V; -4\pi/3]$$

$$u_{12} = v_1 - v_2 \longleftrightarrow \vec{U}_{12} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2$$

$$u_{23} = v_2 - v_3 \longleftrightarrow \vec{U}_{23} = \vec{V}_2 - \vec{V}_3$$

$$u_{31} = v_3 - v_1 \longleftrightarrow \vec{U}_{31} = \vec{V}_3 - \vec{V}_1$$

– Sachant que $V_1 = V_2 = V_3 = V$, on obtient la représentation de Fresnel (Fig. 3.10).

D'où : $\vec{U}_{12} = [U; +\pi/6]$, $\vec{U}_{23} = [U; -\pi/2]$, $\vec{U}_{31} = [U; -7\pi/6]$

$$\text{avec } U = \sqrt{3} \times V \quad \text{car } \frac{U}{2} = V \cos \frac{\pi}{6} = V \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{triangle rectangle})$$

2. Représentation de Fresnel des courants

– Équations et transposition vectorielle (la résistance interne de l'ampèremètre est supposée nulle) :

$$i_R = \frac{u_{12}}{R} \implies \vec{I}_R = \left[\frac{U}{R}; \frac{+\pi}{6} \right]$$

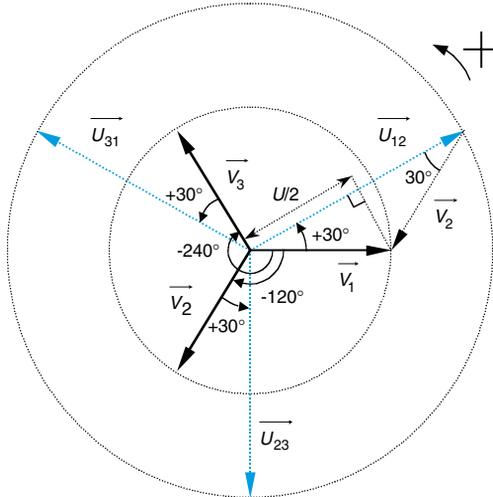


Figure 3.10 Représentation de Fresnel des tensions

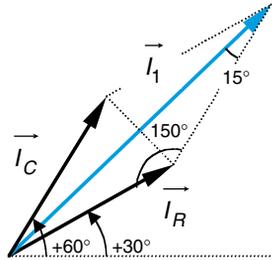
$$i_C = C \frac{du_{13}}{dt} = -C \frac{du_{31}}{dt} \implies \vec{I}_C = \left[C\omega U; \frac{-7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi \right] = \left[C\omega U; +\frac{\pi}{3} \right]$$

$$i_1 = i_R + i_C \longleftrightarrow \vec{I}_1 = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

– Sachant que $C\omega = 1/R$, on obtient la représentation de Fresnel (Fig. 3.11). D'où :

$$\vec{I}_1 = \left[I_1; \frac{+\pi}{4} \right] \text{ avec } I_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \times \frac{U}{R} \approx 1,93 \times \frac{U}{R}$$

$$\text{car } \frac{I_1}{2} = I_R \cos \frac{60^\circ - 30^\circ}{2} = I_R \cos \frac{\pi}{12} \text{ (triangle rectangle)}$$



**Figure 3.11 Représentation de Fresnel
Résistance et condensateur non permutés**

$$\text{et } \cos \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

3. Représentation de Fresnel des courants, résistance et condensateur étant permutés
– Équations et transposition vectorielle :

$$i_R = \frac{-u_{31}}{R} \implies \vec{I}_R = \left[\frac{U}{R}; \frac{-7\pi}{6} + \pi \right] = \left[\frac{U}{R}; \frac{-\pi}{6} \right]$$

$$i_C = C \frac{du_{12}}{dt} \implies \vec{I}_C = \left[C\omega U; \frac{+\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right] = \left[C\omega U; +\frac{2\pi}{3} \right]$$

$$i_1 = i_R + i_C \longleftrightarrow \vec{I}_1 = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

– Sachant que $C\omega = 1/R$, on obtient la représentation de Fresnel (Fig. 3.12). D'où :

$$\vec{I}_1 = \left[I_1; \frac{+\pi}{4} \right] \text{ avec } I_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \times \frac{U}{R} \approx 0,52 \times \frac{U}{R}$$

$$\text{car } \frac{I_1}{2} = I_R \cos \frac{120^\circ + 30^\circ}{2} = I_R \cos \frac{5\pi}{12} \text{ (triangle rectangle)}$$

$$\text{et } \cos \frac{5\pi}{12} = \cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{2\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

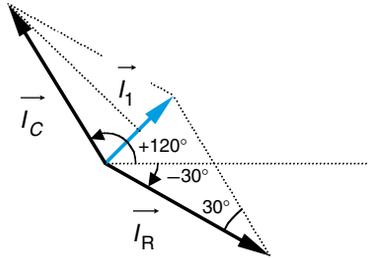


Figure 3.12 Représentation de Fresnel des courants
Résistance et condensateur permutés

4. Conclusion. Si l'ordre des phases est direct (par exemple, 1-2-3 respectivement reliés à Ampèremètre-Résistance-Condensateur) alors $I_1 \approx 1,93 \times U/R$. Par contre, si l'ordre des phases est inverse (par exemple, 1-3-2 respectivement reliés à Ampèremètre-Résistance-Condensateur) alors $I_1 \approx 0,52 \times U/R$. Ainsi, ce simple circuit permet de repérer l'ordre des phases d'une alimentation triphasée.

Notation complexe : loi d'Ohm

Objectifs : Étudier, par les nombres complexes, les tensions et courants d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent (voir aussi les théorèmes présentés sur la fiche 5).

I À savoir

- **Transposition complexe**

À chaque grandeur sinusoïdale on associe un nombre complexe et réciproquement (Fig. 4.1).

Grandeur sinusoïdale		Nombre complexe associé
Valeur instantanée : $u = u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u)$	↔	Nombre complexe $\underline{U} = [U; \alpha_u] = Ue^{j\alpha_u}$
Valeur efficace : $U = U_{\text{Eff}}$	↔	Module : $ \underline{U} = U$
Phase initiale (à $t = 0$) : α_u	↔	Argument : $\text{Arg}(\underline{U}) = \alpha_u$

Figure 4.1 Nombre complexe associé à une grandeur sinusoïdale

Remarques :

- Le module du nombre complexe \underline{U} est ici pris égal à U (valeur efficace) car on mesure généralement les valeurs efficaces des tensions et courants dans les applications industrielles en régime sinusoïdal. Cependant, on aurait aussi pu décider de la prendre égale à U_{Max} (valeur maximale). Les deux possibilités sont équivalentes, puisque l'on a :

$$U = ZI \text{ et } U_{\text{Max}} = ZI_{\text{Max}} \text{ avec } U_{\text{Max}} = U\sqrt{2} \text{ et } I_{\text{Max}} = I\sqrt{2}$$

- Toutes les grandeurs sinusoïdales doivent avoir la même origine des phases. Dans le cas d'un sinus, on écrira :

$$u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \beta_u) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \underbrace{\beta_u - \pi/2}_{\alpha_u})$$

- **Loi d'Ohm généralisée** (Fig. 4.2)

$\underline{U} = [U ; \alpha_u]$ est le nombre complexe associé à la tension sinusoïdale u , $\underline{I} = [I ; \alpha_i]$ le nombre complexe associé au courant sinusoïdal i , \underline{Z} l'impédance complexe du dipôle et \underline{Y} son admittance complexe.



Figure 4.2 Loi d'Ohm généralisée

– L'impédance complexe peut s'écrire :

$$\underline{Z} = [Z ; \varphi] = Z e^{j\varphi} = R + jX = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi$$

où $Z = |\underline{Z}| = U/I$ est l'*impédance*, $\text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi = \alpha_u - \alpha_i$ (modulo 2π) le *déphasage* entre u et i , u en avance de phase par rapport à i si φ positif, $R = \text{Re}(\underline{Z}) = Z \cos \varphi$ la *résistance*, et $X = \text{Im}(\underline{Z}) = Z \sin \varphi$ la *réactance*. Z , R et X s'expriment en ohms (Ω).

– L'admittance complexe peut s'écrire :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \left[\frac{1}{Z} ; -\varphi \right] = [Y ; -\varphi] = G + jB = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi$$

où $Y = |\underline{Y}| = 1/Z = 1/U$ est l'*admittance*, $G = \text{Re}(\underline{Y})$ la *conductance*, et $B = \text{Im}(\underline{Y})$ la *susceptance*. Y , G et B s'expriment en siemens (S) ou ohms⁻¹ (Ω^{-1}).

- **Interprétation géométrique de la loi d'Ohm généralisée**

$$\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \iff \begin{cases} U = ZI \text{ (valeurs efficaces)} \\ \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{I}) \end{cases} \iff \begin{cases} U = ZI \text{ (valeurs efficaces)} \\ \alpha_u = \varphi + \alpha_i \text{ (modulo } 2\pi) \end{cases}$$

On retrouve la représentation de Fresnel (voir fiche 3).

- **Dipôles linéaires élémentaires** (Fig. 4.3)

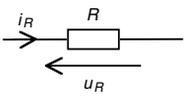
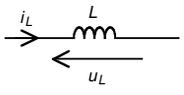
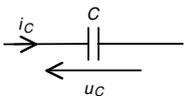
		Impédance complexe	Impédance (Ω) Déphasage (rad)	Résistance (Ω) Réactance (Ω)
Résistance		$\underline{Z}_R = R$	$\begin{cases} Z_R = R \\ \varphi_R = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} R_R = R \\ X_R = 0 \end{cases}$
Inductance		$\underline{Z}_L = j L \omega$ $= L \omega \times e^{+j\pi/2}$	$\begin{cases} Z_L = L \omega \\ \varphi_L = \frac{+\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	$\begin{cases} R_L = 0 \\ X_L = L \omega \end{cases}$
Capacité		$\underline{Z}_C = \frac{1}{j C \omega}$ $= \frac{1}{C \omega} \times e^{-j\pi/2}$	$\begin{cases} Z_C = \frac{1}{C \omega} \\ \varphi_C = \frac{-\pi}{2} \text{ rad} \end{cases}$	$\begin{cases} R_C = 0 \\ X_C = \frac{-1}{C \omega} \end{cases}$

Figure 4.3 Dipôles linéaires élémentaires

- **Association d'impédances en série** (Fig. 4.4)

Deux dipôles sont en série s'ils sont traversés par le même courant (Addition complexe, voir « Méthodes »).

$$\underline{U}_{\text{Tot}} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \underline{Z}_{\text{Equ}} \underline{I} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{Z}_{\text{Equ}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

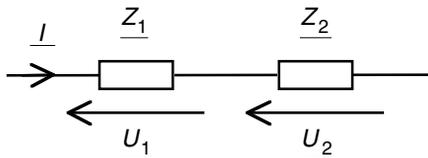


Figure 4.4 Mise en série

- **Association d'impédances en parallèle** (Fig. 4.5)

Deux dipôles sont en parallèle s'ils ont leurs bornes communes (Addition complexe, voir « Méthodes »).

$$\underline{I}_{\text{Tot}} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{Y}_{\text{Equ}} \times \underline{U} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{Equ}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{Y}_{\text{Equ}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \quad \text{ou} \quad \boxed{\underline{Z}_{\text{Equ}} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}}$$

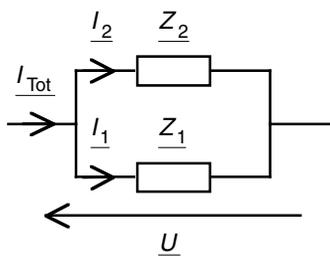


Figure 4.5 Mise en parallèle

II Méthodes

- Lois des nœuds et des mailles

Elles restent valables à condition de les transposer au calcul complexe. D'autres théorèmes sont présentés sur la fiche 5.

Loi des nœuds (deux formulations)

1) La somme des courants qui arrivent à un nœud est égale à la somme des courants qui en partent. Exemple (Fig. 4.6) :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_3$$

2) La somme algébrique des courants aboutissant à un nœud est nulle. Exemple (Fig. 4.6) :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0$$

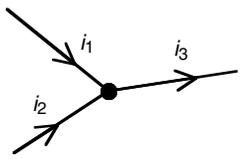


Figure 4.6 Nœud N

Loi des mailles (deux formulations)

1) La somme des tensions dans le sens de parcours de la maille est égale à la somme des tensions en sens inverse. Exemple (Fig. 4.7) :

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_1 + \underline{U}_3$$

2) La somme algébrique des tensions dans le sens de parcours d'une maille est nulle. Exemple (Fig. 4.7) :

$$\underline{U}_2 - \underline{U}_1 - \underline{U}_3 = 0$$

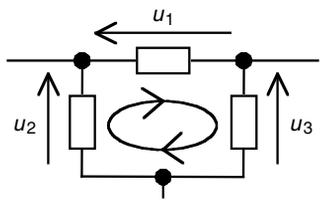


Figure 4.7 Maille M

- Règle de transposition d'une somme (Fig. 4.8)

La somme de deux grandeurs sinusoïdales de même nature (tensions ou courants) et de même fréquence f est une sinusoïde de fréquence f ; le module et la phase de cette somme sont donnés par la somme complexe associée.

Somme de deux grandeurs sinusoïdales	Somme complexe associée
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$	$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2$

Figure 4.8 Règle de transposition d'une somme

Attention, les valeurs efficaces ne s'ajoutent pas en général : $U \neq U_1 + U_2$.

- **Passage de l'équation différentielle à la notation complexe** (voir fiche 1)

On passe de l'équation différentielle à la notation complexe en remplaçant $u(t)$ par \underline{U} , d/dt par $j\omega$ et plus généralement d^k/dt^k par $(j\omega)^k$.

- **Dérivation et intégration** (Fig. 4.9)

Grandeur sinusoïdale	Nombre complexe associé
$u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u)$	$\underline{U} = [U; \alpha_u] = Ue^{j\alpha_u}$
$\frac{du}{dt} = -\omega U\sqrt{2} \sin(\omega t + \alpha_u)$ $= \omega U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u + \pi/2)$	$j\omega \underline{U} = \omega Ue^{j(\alpha_u + \pi/2)}$
$\int u dt = U\sqrt{2} / \omega \times \sin(\omega t + \alpha_u)$ $= U\sqrt{2} / \omega \times \cos(\omega t + \alpha_u - \pi/2)$	$\frac{\underline{U}}{j\omega} = \frac{U}{\omega} e^{j(\alpha_u - \pi/2)}$

Figure 4.9 Dérivation et intégration

Remarque : On déduit facilement de ces résultats les impédances complexes des dipôles élémentaires.

Résistance : $u_R = Ri_R \leftrightarrow \underline{U}_R = R \times \underline{I}_R \implies \underline{Z}_R = R = [R; 0]$

Capacité : $i_C = C \frac{du_C}{dt} \leftrightarrow \underline{I}_C = C \times j\omega \underline{U}_C$
 $\implies \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \left[\frac{1}{C\omega}; -90^\circ \right]$

Inductance : $u_L = L \frac{di_L}{dt} \leftrightarrow \underline{U}_L = L \times j\omega \underline{I}_L$
 $\implies \underline{Z}_L = jL\omega = [L\omega; +90^\circ]$

Circuit RL

Soit le schéma (Fig. 4.10) où $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t)$. En régime sinusoïdal permanent $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$, φ étant le déphasage entre u et i , u en avance de phase par rapport à i si φ positif.

1. Exprimer le courant \underline{I} en notation complexe en fonction de U , R et L .
2. Exprimer le courant efficace I et le déphasage φ .
3. En déduire l'expression temporelle de i .

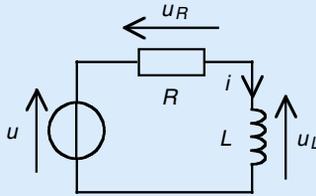


Figure 4.10 Circuit RL

Solution

1. Expression du courant en notation complexe

– Transposition complexe :

$$u = U\sqrt{2} \cos(\omega t) \longleftrightarrow \underline{U} = [U; 0] = U$$

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) \longleftrightarrow \underline{I} = [I; -\varphi] = Ie^{-j\varphi}$$

– Première solution : À partir de l'équation différentielle.

$$u = u_R + u_L = Ri + L \frac{di}{dt}$$

En remplaçant u par \underline{U} , i par \underline{I} et d/dt par $j\omega$, on obtient :

$$\underline{U} = R\underline{I} + Lj\omega\underline{I} \implies \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega}$$

– Deuxième solution (généralement plus simple) : Par les impédances complexes.

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{Z}_R \times \underline{I} + \underline{Z}_L \times \underline{I} \quad \text{avec } \underline{Z}_R = R \text{ et } \underline{Z}_L = jL\omega$$

$$\implies \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega}$$

2. Valeur efficace I et déphasage φ

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{R + jL\omega} \implies I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{I}(R + jL\omega) \implies \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{I}) + \text{Arg}(R + jL\omega) \\ &\implies \varphi = \text{Arg}(\underline{U}) - \text{Arg}(\underline{I}) = \text{Arg}(R + jL\omega) \\ &\implies \tan \varphi = \frac{L\omega}{R} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

3. Expression de i

$$i = I\sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi) = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{L\omega}{R}\right)$$

Circuit de repérage de l'ordre des phases

Soit le schéma (Fig. 4.11) d'un circuit de repérage de l'ordre des phases d'une alimentation triphasée. On suppose $C\omega = 1/R$. Les tensions simples, référencées par rapport au neutre, sont :

$$\begin{cases} v_1 = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \\ v_2 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ v_3 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

1. Exprimer les tensions composées $u_{12} = v_1 - v_2$, $u_{23} = v_2 - v_3$ et $u_{31} = v_3 - v_1$ en notation complexe. En déduire la valeur efficace U des tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} .
2. Exprimer les courants i_R , i_C et i_1 en notation complexe. En déduire la valeur efficace I_1 du courant i_1 .
3. On permute la résistance et le condensateur. Exprimer les courants i_R , i_C et i_1 en notation complexe. En déduire la nouvelle valeur efficace I_1 .
4. Conclure.

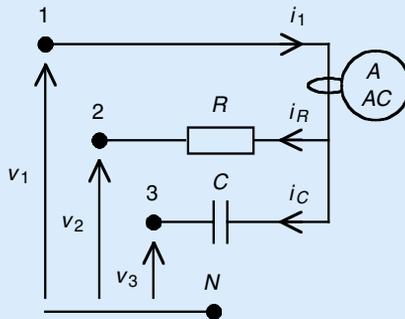


Figure 4.11 Circuit de repérage de l'ordre des phases

Solution

1. Expressions des tensions composées

$$v_1 = V\sqrt{2} \cos(\omega t) \leftrightarrow \underline{V}_1 = [V; 0] = V$$

$$v_2 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 2\pi/3) \leftrightarrow \underline{V}_2 = [V; -2\pi/3] = Ve^{-j2\pi/3}$$

$$v_3 = V\sqrt{2} \cos(\omega t - 4\pi/3) \leftrightarrow \underline{V}_3 = [V; -4\pi/3] = Ve^{-j4\pi/3}$$

$$u_{12} = v_1 - v_2 \leftrightarrow \underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2$$

$$u_{23} = v_2 - v_3 \leftrightarrow \underline{U}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3$$

$$u_{31} = v_3 - v_1 \leftrightarrow \underline{U}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1$$

D'où :

$$\underline{U}_{12} = \underline{V}_1 - \underline{V}_2 = V - Ve^{-j2\pi/3} = V \left(1 - \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= V\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right) = V\sqrt{3} \times e^{j\pi/6}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{V}_2 - \underline{V}_3 = Ve^{-j2\pi/3} - Ve^{-j4\pi/3} = V \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$= -jV\sqrt{3} = V\sqrt{3} \times e^{-j\pi/2}$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{V}_3 - \underline{V}_1 = Ve^{-j4\pi/3} - V$$

$$= V \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = V\sqrt{3} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \right)$$

$$= V\sqrt{3} \times e^{j5\pi/6} = V\sqrt{3} \times e^{-j7\pi/6}$$

Et finalement :

$$\underline{U}_{12} = [U; +\pi/6], \underline{U}_{23} = [U; -\pi/2], \underline{U}_{31} = [U; -7\pi/6] \quad \text{avec } U = \sqrt{3} \times V$$

2. Expressions des courants

$$i_R = \frac{u_{12}}{R} \Rightarrow \underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{12}}{R} = \frac{U}{R} e^{j\pi/6} = \left[\frac{U}{R}; \frac{+\pi}{6} \right]$$

$$i_C = -C \frac{du_{31}}{dt} \Rightarrow$$

$$\underline{I}_C = -jC\omega \underline{U}_{31} = -jC\omega U e^{-j7\pi/6} = C\omega U e^{-j7\pi/6} e^{-j\pi/2}$$

$$= C\omega U e^{j\pi/3} = \left[C\omega U; +\frac{\pi}{3} \right]$$

$$i_1 = i_R + i_C \implies \underline{I}_1 = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{U}{R} e^{j\pi/6} + C\omega U e^{j\pi/3}$$

Sachant que $C\omega = 1/R$, on obtient :

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U}{R} \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Soit : $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\pi/4} = \left[I_1 ; \frac{+\pi}{4} \right]$ avec $I_1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \times \frac{U}{R} \approx 1,93 \times \frac{U}{R}$

3. Expressions des courants, résistance et condensateur étant permutés

$$i_R = \frac{-u_{31}}{R} \implies \underline{I}_R = \frac{-U_{31}}{R} = \frac{-U}{R} e^{-j7\pi/6} = \frac{U}{R} e^{-j\pi/6} = \left[\frac{U}{R} ; \frac{-\pi}{6} \right]$$

$$i_C = C \frac{du_{12}}{dt} \implies$$

$$\underline{I}_C = jC\omega \underline{U}_{12} = jC\omega U e^{j\pi/6} = C\omega U e^{j2\pi/3} = \left[C\omega U ; \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$i_1 = i_R + i_C \implies \underline{I}_1 = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{U}{R} e^{-j\pi/6} + C\omega U e^{j2\pi/3}$$

Sachant que $C\omega = 1/R$, on obtient :

$$\underline{I}_1 = \frac{U}{R} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U}{R} \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Soit : $\underline{I}_1 = I_1 e^{j\pi/4} = \left[I_1 ; \frac{+\pi}{4} \right]$ avec $I_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \times \frac{U}{R} \approx 0,52 \times \frac{U}{R}$

4. Conclusion. Si l'ordre des phases est direct (par exemple, 1-2-3 respectivement sur Pince ampèremétrique-Résistance-Condensateur) alors $I_1 \approx 1,93 \times U/R$. Par contre, si l'ordre des phases est inverse (par exemple, 1-3-2 respectivement sur Pince ampèremétrique-Résistance-Condensateur) alors $I_1 \approx 0,52 \times U/R$. Ainsi, ce simple circuit permet de repérer l'ordre des phases d'une alimentation triphasée.

Notation complexe : théorèmes

Objectifs : Simplifier l'étude, par les nombres complexes, des tensions et courants d'un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent.

I Quel théorème utiliser ?

Théorème	Utilisation
Superposition	Calcul d'un courant ou d'une tension dans un circuit comprenant deux, voire trois, sources indépendantes.
Diviseur de tension – Diviseur de courant	Calcul rapide d'une tension par rapport à une autre pour une structure particulière de circuit – <i>Idem</i> pour le courant.
Thévenin – Norton	Calcul des deux éléments (source et impédance) connectés en série, ou en parallèle, équivalents à un dipôle donné.
Millmann	Calcul d'une tension dans un circuit comprenant plusieurs sources de tensions.

Figure 5.1 Quel théorème utiliser ?

II Méthodes

• Théorème de superposition

Dans un circuit linéaire, l'intensité complexe du courant dans une branche (respectivement, la tension complexe entre deux bornes) est la somme algébrique des intensités complexes des courants (respectivement, des tensions complexes) dues à chaque source indépendante prise séparément, les autres sources indépendantes étant éteintes (c'est-à-dire rendues passives).

Remarques :

- Les sources commandées (dites aussi liées) ne doivent pas être rendues passives.

- Rendre passive (ou éteindre) une source de tension ou de courant « réelle », c'est la remplacer par son impédance interne. Rendre passive une source de tension « idéale » c'est la remplacer par un court-circuit, tandis que rendre passive une source de courant « idéale » c'est la remplacer par un circuit ouvert.
- Le théorème de superposition découle du principe de linéarité (voir fiche 1).

• **Diviseur de tension – Diviseur de courant** (Fig. 5.2)

	Schéma	Relations
Diviseur de tension		$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{U}_0$ $= \frac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \times \underline{U}_0$
Diviseur de courant		$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} \times \underline{I}_0$ $= \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{I}_0$

Figure 5.2 Diviseurs de tension et de courant

Remarques :

- Les formules données (Fig. 5.2) ne sont valables que si aucune charge extérieure ne vient modifier le montage.
- Les formules du diviseur de tension se retrouvent très facilement en remarquant que les impédances $\underline{Z}_1 = 1/\underline{Y}_1$ et $\underline{Z}_2 = 1/\underline{Y}_2$ sont en

série :
$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

- Les formules du diviseur de courant se retrouvent très facilement en remarquant que les impédances $\underline{Z}_1 = 1/\underline{Y}_1$ et $\underline{Z}_2 = 1/\underline{Y}_2$ sont en

parallèle :
$$\frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{I}_0 = \underline{Z}_1 \times \underline{I}_1$$

• **Théorèmes de Thévenin et de Norton**

Tout dipôle actif linéaire AB, composé de résistances, de condensateurs, de bobines, de sources indépendantes et/ou commandées, peut être représenté (Fig. 5.3) par :

- 1) un schéma équivalent série (modèle de Thévenin) comprenant une source de tension complexe \underline{E}_0 et une impédance complexe \underline{Z}_0 , ou

- 2) un schéma équivalent parallèle (modèle de Norton) comprenant une source de courant complexe \underline{I}_0 et une impédance complexe \underline{Z}_0 ; où \underline{E}_0 est la tension à vide du dipôle AB, soit $\underline{E}_0 = \underline{U}$ à $\underline{I} = 0$, \underline{I}_0 est le courant de court-circuit du dipôle AB, soit $\underline{I}_0 = \underline{I}$ à $\underline{U} = 0$, \underline{Z}_0 est l'impédance complexe vue entre les bornes A et B lorsque toutes les sources indépendantes du dipôle AB ont été rendues passives.

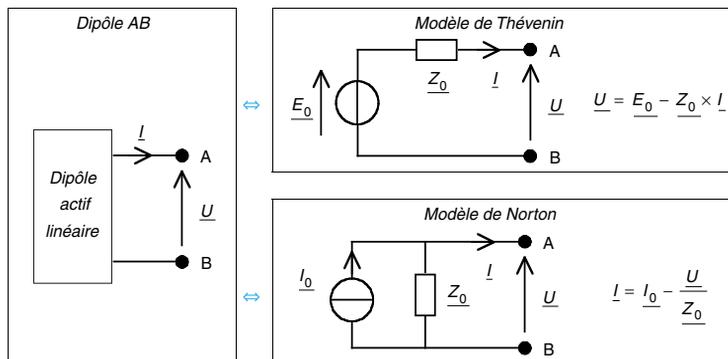


Figure 5.3 Modèles de Thévenin et de Norton d'un dipôle

Remarques :

- Pour déterminer \underline{Z}_0 , les sources commandées ne doivent pas être éteintes.
- Les modèles de Thévenin et de Norton ne sont équivalents que pour l'extérieur. Ils ne rendent pas compte de la puissance dissipée par le circuit réel qu'ils remplacent.
- Les modèles de Thévenin et de Norton sont équivalents : même tension \underline{U} et même intensité \underline{I} pour une charge donnée. Le passage de l'un à l'autre s'effectue par la relation : $\underline{E}_0 = \underline{Z}_0 \times \underline{I}_0$

• Théorème de Millmann

D'après le théorème de Thévenin, les dipôles (Fig. 5.4) sont équivalents. Pour ce circuit type, le théorème de Millmann permet d'exprimer la tension à vide du dipôle AB, soit $\underline{E}_0 = \underline{U}$ à $\underline{I} = 0$, par la formule :

$$\underline{E}_0 = \frac{\sum_{k=1}^N \underline{E}_k \times \underline{Y}_k}{\sum_{k=1}^N \underline{Y}_k} = \frac{\underline{E}_1 \times \underline{Y}_1 + \underline{E}_2 \times \underline{Y}_2 + \dots + \underline{E}_N \times \underline{Y}_N}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \dots + \underline{Y}_N} \quad \text{avec } \underline{Y}_k = \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

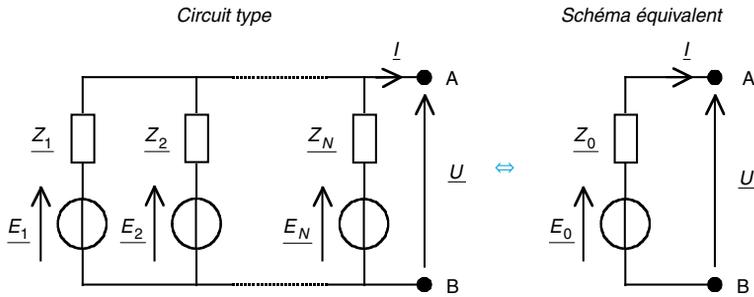


Figure 5.4 Application du théorème de Millmann

Remarques :

- Ne pas oublier au dénominateur de la formule les branches sans source, c'est-à-dire les admittances complexes \underline{Y}_k pour lesquelles les tensions \underline{E}_k sont nulles.
- En toute généralité, l'impédance complexe \underline{Z}_0 est donnée par le théorème de Thévenin. Cependant, dans le cas particulier où les sources \underline{E}_1 à \underline{E}_N sont toutes indépendantes, alors l'impédance complexe

$$\underline{Z}_0 = 1/\underline{Y}_0 \text{ est donnée simplement par : } \underline{Y}_0 = \sum_{k=1}^N \underline{Y}_k$$

Application du théorème de superposition

Soit le circuit électrique à deux sources (Fig. 5.5). Exprimer la tension \underline{U} en appliquant le théorème de superposition, les sources étant supposées indépendantes.

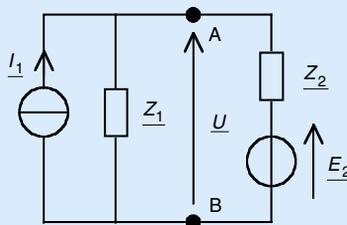


Figure 5.5 Circuit à deux sources

Solution

- Source 2 « passivée » ou éteinte (Fig. 5.6). Les impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 se retrouvant en parallèle, on a :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{I}_1$$

- Source 1 « passivée » ou éteinte (Fig. 5.6). Par application du diviseur de tension, on a :

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \underline{E}_2$$

- En superposant les deux états (Fig. 5.6), on obtient :

$$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = \frac{\underline{Z}_1 \times (\underline{Z}_2 \times \underline{I}_1 + \underline{E}_2)}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

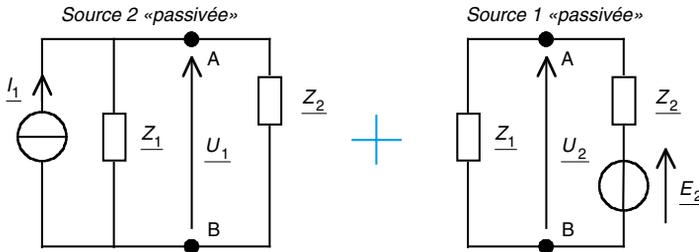


Figure 5.6 Circuit à deux sources – Superposition des états

Remarques :

- Une autre solution est de transformer le dipôle constitué de la source de tension \underline{E}_2 en série avec l'impédance \underline{Z}_2 en dipôle constitué d'une source de courant $\underline{I}_2 = \underline{Z}_2/\underline{E}_2$ en parallèle avec l'impédance \underline{Z}_2 (équivalence Thévenin-Norton). Ensuite, il suffit d'exprimer la tension \underline{U} :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times (\underline{I}_1 + \underline{I}_2) = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \times \left(\underline{I}_1 + \frac{\underline{E}_2}{\underline{Z}_2} \right)$$

- En vertu du principe de linéarité, l'expression précédente de \underline{U} reste exacte si une source est commandée mais elle ne donne plus directement la solution. C'est pourquoi le théorème de superposition stipule que seules les sources indépendantes doivent être rendues passives. Par exemple, si $\underline{E}_2 = -A\underline{U}$ ($A > 0$), le théorème de superposition n'est plus applicable car une seule source indépendante demeure, mais l'expression précédente de \underline{U} reste exacte (principe de linéarité). On a alors :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_1 \times (\underline{Z}_2 \times \underline{I}_1 - A\underline{U})}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

D'où, tout calcul fait :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + A \times \underline{Z}_1} \times \underline{I}_1$$

Application des théorèmes de Thévenin et de Norton

Soit le circuit pseudo-intégrateur RC (Fig. 5.7). Déterminer les modèles de Thévenin et de Norton vus par la charge (circuit à gauche des points A et B).

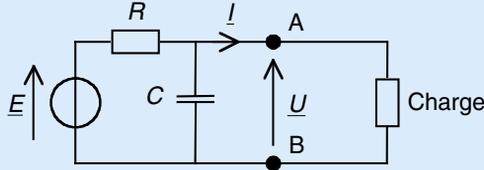
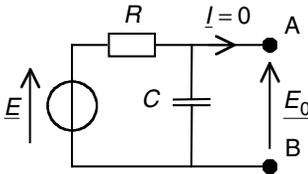


Figure 5.7 Circuit pseudo-intégrateur RC

Solution

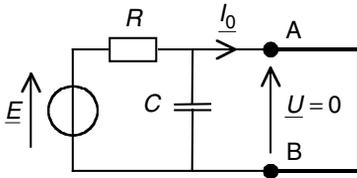
1. Tension à vide du dipôle AB, soit $\underline{E}_0 = \underline{U}$ à $\underline{I} = 0$ (Fig. 5.8)



$$\underline{E}_0 = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{E}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega}$$

Figure 5.8 Circuit pseudo-intégrateur RC – Expression de \underline{E}_0

2. Courant de court-circuit du dipôle AB, soit $\underline{I}_0 = \underline{I}$ à $\underline{U} = 0$ (Fig. 5.9)



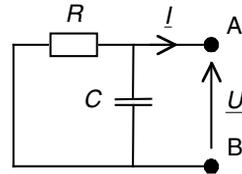
$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{E}}{R}$$

Figure 5.9 Circuit pseudo-intégrateur RC – Expression de \underline{I}_0

3. Impédance complexe \underline{Z}_0 vue entre A et B lorsque les sources indépendantes sont rendues passives (Fig. 5.10). La résistance et le condensateur sont en parallèle.

$$\underline{Z}_0 = \left. \frac{\underline{U}}{-\underline{I}} \right|_{\text{Sources indépendantes éteintes}} = \frac{\underline{Z}_R \times \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Figure 5.10 Circuit pseudo-intégrateur RC – Expression de \underline{Z}_0



4. Schémas équivalents (Fig. 5.11)

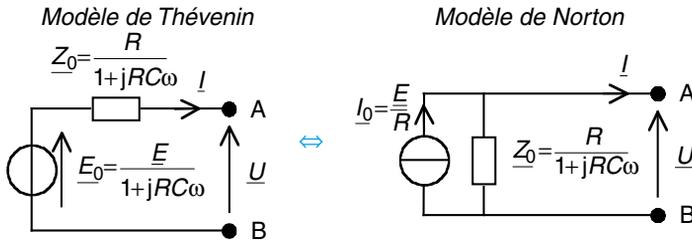


Figure 5.11 Circuit pseudo-intégrateur RC – Schémas équivalents

Remarque : On vérifiera que $\underline{E}_0 = \underline{Z}_0 \times \underline{I}_0$.

Application du théorème de Millmann

Soit le circuit électrique à deux sources (Fig. 5.12). Exprimer la tension \underline{U} en appliquant le théorème de Millmann, puis le courant \underline{I} .

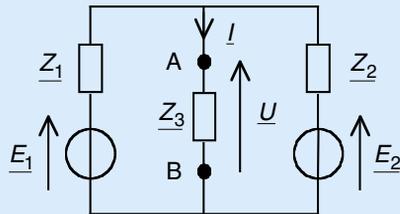


Figure 5.12 Circuit à deux sources

Solution

Le théorème de Millmann permet d'exprimer directement la tension \underline{U} , et par suite le courant \underline{I} , que les sources soient indépendantes ou liées. Attention, il ne faut pas oublier au dénominateur les branches sans source.

$$\underline{U} = \frac{\frac{E_1}{\underline{Z}_1} + \frac{E_2}{\underline{Z}_2} + \frac{0}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_3 \times (\underline{Z}_2 \times \underline{E}_1 + \underline{Z}_1 \times \underline{E}_2)}{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \times (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \quad \text{et} \quad \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_3}$$

Puissances – Facteur de puissance – Théorème de Boucherot

Objectifs : Calculer et mesurer la puissance absorbée par un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent monophasé.

I À savoir

- **Convention récepteur** (Fig. 6.1)

On considère ici uniquement des dipôles orientés selon la convention récepteur. Avec cette convention, la puissance instantanée $p = ui$ est positive quand le dipôle fonctionne en récepteur (la puissance est absorbée ou transformée), et négative quand il fonctionne en générateur (la puissance est fournie ou produite). Par suite, la puissance moyenne (ou active) est positive lorsque le dipôle absorbe plus de puissance qu’il n’en fournit sur une période : le dipôle est *globalement récepteur* ; et négative en cas contraire : le dipôle est *globalement générateur*.

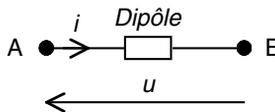


Figure 6.1 Convention récepteur

Notations :

$$u = u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u) \leftrightarrow \underline{U} = [U; \alpha_u] = Ue^{j\alpha_u}$$

$$i = i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i) \leftrightarrow \underline{I} = [I; \alpha_i] = Ie^{j\alpha_i}$$

Déphasage entre u et i : $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$

u est en avance de phase par rapport à i si φ est positif.

- **Puissance instantanée – Puissance active**

La puissance instantanée est le produit de la tension instantanée par le courant instantané :

$$p = ui$$

En régime sinusoïdal permanent, la puissance instantanée s'écrit :

$$p = ui = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_u) \times I\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_i)$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$p = \underbrace{UI \cos(\varphi)}_P + \underbrace{UI \cos(2\omega t + \alpha_u + \alpha_i)}_{P_{\text{Fluc}}} = P + p_{\text{Fluc}}$$

Remarques :

– La puissance instantanée est la somme de la puissance P dite *puissance active* (terme constant) et de la puissance p_{Fluc} dite *puissance fluctuante* (terme variable à valeur moyenne nulle et fréquence double de celle de la tension).

– La puissance active P est la puissance moyenne P_{Moy} (voir fiche 11).

$$P_{\text{Moy}} = \langle p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = P \text{ où } T \text{ est la période.}$$

– Le relevé d'une puissance instantanée à l'aide d'un oscilloscope est présenté au paragraphe « Mesures ».

• Puissances – Facteur de puissance (Fig. 6.2)

	Unité	Définition	Relations
Puissance apparente complexe	volt-ampère (VA)	$\underline{S} = \underline{U} \times \overline{\underline{I}}$	$\underline{S} = P + jQ = S e^{j\varphi}$
Puissance active ou moyenne	watt (W)	$P = UI \cos(\varphi)$	$P = P_{\text{Moy}}$ $= \text{Re}(\underline{S})$
Puissance réactive	volt-ampère-réactif (var)	$Q = UI \sin(\varphi)$	$Q = P \tan(\varphi)$ $= \text{Im}(\underline{S})$
Puissance apparente	volt-ampère (VA)	$S = UI$	$S^2 = P^2 + Q^2$ $= \underline{S} \times \overline{\underline{S}} = \underline{S} ^2$
Facteur de puissance		$f_P = \frac{P}{S}$	$f_P = \cos(\varphi)$

Notation : $\overline{\underline{X}}$ est le complexe conjugué de \underline{X}

Figure 6.2 Puissances – Facteur de puissance (convention récepteur)

Remarques :

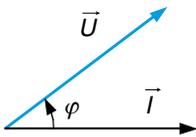
– Le facteur de puissance $f_P = \cos(\varphi)$ est de même signe que la puissance active P ; il est positif lorsque le dipôle est **globalement récep-**

teur et négatif lorsque le dipôle est **globalement générateur** (convention récepteur).

- La puissance réactive Q est du signe de $\sin(\varphi)$; elle est positive lorsque la tension est en avance de phase par rapport au courant (cas d'un récepteur inductif) et négative lorsque la tension est en retard de phase par rapport au courant (cas d'un récepteur capacitif).
- Si on avait pris la valeur maximale U_{Max} (resp. I_{Max}) au lieu de la valeur efficace U (resp. I) pour le module de \underline{U} (resp. \underline{I}), alors la puissance apparente complexe aurait été définie par $\underline{S} = \frac{1}{2} \times \underline{U} \times \underline{I}$ (voir fiche 4). Dans tout cet ouvrage on a pris les valeurs efficaces pour modules et, en conséquence, $\underline{S} = \underline{U} \times \underline{I}$.
- Relation utile :

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \tan^2 \varphi}$$

- La puissance active apparaît comme le produit scalaire $P = \vec{U} \cdot \vec{I}$ des vecteurs $\vec{U} = [U ; \alpha_u]$ et $\vec{I} = [I ; \alpha_i]$ associés aux grandeurs u et i (Fig. 6.3).



Produit scalaire (P est un réel) :

$$\begin{aligned} P &= \vec{U} \cdot \vec{I} = \vec{I} \cdot \vec{U} \\ &= |\vec{I}| \times |\vec{U}| \times \cos(\vec{I}, \vec{U}) \\ &= UI \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\text{avec } I = |\vec{I}|, U = |\vec{U}|$$

$$\text{et } \varphi = (\vec{I}, \vec{U}) = \alpha_u - \alpha_i$$

Figure 6.3 Produit scalaire

• Énergies

La puissance instantanée est la dérivée de l'énergie par rapport au temps :

$$\boxed{p = \frac{dw}{dt}} \implies w_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p dt \quad (\text{Énergie absorbée de } t_1 \text{ à } t_2)$$

En régime sinusoïdal permanent, l'énergie s'écrit :

$$w_{t_1 \rightarrow t_2} = \int_{t_1}^{t_2} p dt = \int_{t_1}^{t_2} (P + p_{\text{Fluc}}) dt = P(t_2 - t_1) + \int_{t_1}^{t_2} p_{\text{Fluc}} dt$$

Sur un nombre entier de périodes $P_{\text{Fluc Moy}} = \langle p_{\text{Fluc}} \rangle = 0$. En conséquence, sur un nombre entier de périodes, ou dès que la durée de « comptage » $t_2 - t_1$ est grande devant la période, on peut écrire :

$$\boxed{w_{t_1 \rightarrow t_2} = P(t_2 - t_1)} \quad (P \text{ étant constant})$$

• Interprétations physiques

À la puissance active P correspond une énergie active $W_{\text{Act}(t_1 \rightarrow t_2)} = P(t_2 - t_1)$ qui est absorbée et/ou transformée dans le récepteur en énergie thermique, mécanique, chimique, etc. L'énergie active s'exprime en wattheures (Wh) ou kilowattheures (kWh), plus rarement en joules (J), bien que le joule soit l'unité légale. On a : $1 \text{ W} \times 1 \text{ s} = 1 \text{ J} \implies 1 \text{ Wh} = 3600 \text{ J}$.

À la puissance réactive Q correspond une énergie réactive $W_{\text{Réact}(t_1 \rightarrow t_2)} = Q(t_2 - t_1)$ qui va périodiquement de la source vers le récepteur puis du récepteur vers la source, et ainsi de suite sans jamais être absorbée par le récepteur. L'énergie réactive s'exprime en varheures (varh) ou kilovarheures (kvarh).

Les puissances active et réactive pouvant varier au cours du temps, on définit le facteur de puissance pendant une durée $t_2 - t_1$ donnée :

$$f_{P(t_1 \rightarrow t_2)} = \frac{W_{\text{Act}(t_1 \rightarrow t_2)}}{\sqrt{W_{\text{Act}(t_1 \rightarrow t_2)}^2 + W_{\text{Réact}(t_1 \rightarrow t_2)}^2}}$$

L'existence d'une puissance réactive conduit à une augmentation du courant dans le générateur et la ligne alimentant le récepteur. Cette augmentation engendre un surcroît de pertes et nécessite un surdimensionnement des moyens de transport. La puissance apparente est l'élément essentiel du dimensionnement de la ligne et du générateur. Pour une puissance active donnée, plus le facteur de puissance est faible et plus le courant est élevé. C'est pourquoi on impose un facteur de puissance élevé et pénalise financièrement les consommateurs d'énergie réactive.

Remarque : Pour les domaines de tension HTA, et BT avec une puissance souscrite supérieure à 36 kVA, l'énergie réactive soutirée est facturée pendant les mois de novembre à mars, de 6h00 à 22h00, les jours ouvrables, pour la partie qui dépasse 40 % de l'énergie active consommée pendant la même période. En conséquence, en régime sinusoïdal permanent, il faut que :

$$[\tan(\varphi)]_{\text{Mensuel}} = \frac{W_{\text{Réact sur le mois}}}{W_{\text{Act sur le mois}}} < 0,4$$

Et donc que le facteur de puissance mensuel soit :

$$[\cos(\varphi)]_{\text{Mensuel}} > 0,93$$

II Méthodes

- **Utilisation de la puissance apparente complexe**

Elle permet d'exprimer conjointement les puissances active et réactive et de calculer la puissance apparente d'un dipôle. Principe :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{S} = \underline{U} \times \bar{\underline{I}} \\ \underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I} \implies \underline{U} = \underline{Z} \times \bar{\underline{I}} \end{array} \right\} \implies \underline{S} = \underline{Z} \times \underline{I} \times \bar{\underline{I}} = \underline{Z} \times I^2 = \frac{\underline{U} \times \bar{\underline{U}}}{\underline{Z}} = \frac{U^2}{\underline{Z}}$$

Il suffit ensuite d'identifier avec $\underline{S} = P + jQ$ et de calculer $S = |\underline{S}|$. On vérifiera les expressions données pour les dipôles linéaires élémentaires (Fig. 6.4).

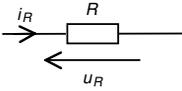
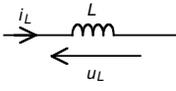
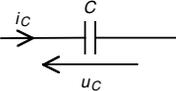
		Puissance active	Puissance réactive	Facteur de puissance
Résistance		$P_R = R I_R^2 = \frac{U_R^2}{R}$	0	$f_{P(R)} = 1$
Inductance		0	$Q_L = L \omega I_L^2 = \frac{U_L^2}{L \omega}$	$f_{P(L)} = 0$
Capacité		0	$Q_C = \frac{-I_C^2}{C \omega} = -C \omega U_C^2$	$f_{P(C)} = 0$

Figure 6.4 Dipôles linéaires élémentaires

- **Théorème de Boucherot : première formulation**

La puissance active (respectivement réactive) consommée par un ensemble de dipôles est égale à la somme des puissances actives (respectivement réactives) consommées par chaque dipôle. Ainsi, un ensemble de N dipôles, absorbe une puissance active P_{Ens} et une puissance réactive Q_{Ens} avec :

$$P_{\text{Ens}} = \sum_{k=1}^N P_k \quad \text{et} \quad Q_{\text{Ens}} = \sum_{k=1}^N Q_k$$

- **Théorème de Boucherot : deuxième formulation**

La puissance apparente complexe consommée par un ensemble de dipôles est égale à la somme des puissances apparentes complexes consommées par chaque dipôle.

$$\underline{S}_{\text{Ens}} = \sum_{k=1}^N \underline{S}_k$$

Remarque : Attention, les puissances apparentes ne s'additionnent pas. La puissance apparente se calcule par :

$$S_{\text{Ens}} = \sqrt{P_{\text{Ens}}^2 + Q_{\text{Ens}}^2} = |S_{\text{Ens}}|$$

- **Utilisation du théorème de Boucherot**

Le tableau suivant résume la situation.

	Puissance active (W)	Puissance réactive (var)
Dipôle 1	P_1	Q_1
Dipôle 2	P_2	Q_2
Dipôle 3	P_3	Q_3
Ensemble (Théorème de Boucherot)	$P_{\text{Ens}} = P_1 + P_2 + P_3$ $= UI \cos(\varphi)$	$Q_{\text{Ens}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$ $= UI \sin(\varphi)$

On en déduit $\tan(\varphi)$ et le facteur de puissance f_P :

$$\tan(\varphi) = \frac{Q_{\text{Ens}}}{P_{\text{Ens}}} \quad \text{et} \quad f_P = \frac{P_{\text{Ens}}}{S_{\text{Ens}}} = \frac{P_{\text{Ens}}}{\sqrt{P_{\text{Ens}}^2 + Q_{\text{Ens}}^2}} = \cos(\varphi)$$

On en déduit aussi l'intensité efficace :

$$I = \frac{P_{\text{Ens}}}{U \cos(\varphi)} = \frac{S_{\text{Ens}}}{U}$$

- **Correction du facteur de puissance**

Voir les exercices proposés ci-dessous.

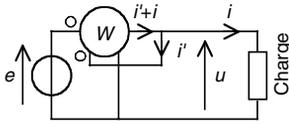
III Mesures

Les mêmes méthodes peuvent être utilisées pour mesurer des puissances ou des énergies (« compteurs électriques »).

- **Appareils élémentaires**

- La puissance active se mesure à l'aide d'un *wattmètre* (Fig. 6.5) qui indique la valeur moyenne de la puissance instantanée $p = ui$.
- Un voltmètre et un ampèremètre permettent le calcul de la puissance apparente à partir des mesures de la tension et de l'intensité efficaces (voir fiche 2, « Mesures »).

Montage aval si :
 $i' \ll i \iff Z_{\text{Voltmètre}} \gg Z_{\text{Charge}}$



Montage amont si :
 $u' \ll u \iff Z_{\text{Ampèremètre}} \ll Z_{\text{Charge}}$

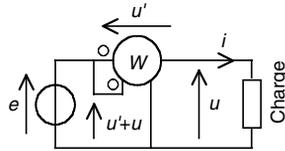


Figure 6.5 Mesure de la puissance active, $e = E_{\text{Max}} \cos(\omega t)$

- **Puissancemètre numérique**

Plus performants et plus simples d'usage (possibilité de mesure de l'intensité sans contact par pince ampèremétrique), les appareils numériques s'imposent pratiquement partout ; ils intègrent un grand nombre de fonctions : puissances active, réactive, et apparente, facteur de puissance, tension et courant efficaces, fréquence, etc. Il faut cependant bien connaître les limites et les principes de calcul décrits dans la notice technique d'un tel appareil pour éviter les erreurs d'interprétation. En général, les tensions et intensités instantanées sont mesurées et les grandeurs affichées sont calculées par :

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt} \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T u i dt \quad S = UI \quad Q = \sqrt{S^2 - P^2}$$

- **Oscilloscope**

Il permet de visualiser la tension et l'intensité (de préférence avec une sonde de courant) instantanées ainsi que la puissance instantanée en multipliant la tension par le courant, de mesurer les valeurs moyennes et efficaces, le déphasage, etc.

Exemple

Allure de la puissance instantanée (Fig. 6.6) de l'exemple donné pour la mesure de déphasage (voir Mesures, fiche 2). Le produit des voies A et B : $u_A \times (-u_B)$ donne l'image de la puissance instantanée et s'exprime en V^2 . La puissance instantanée possède une période de 10 ms, égale à la moitié de la période de u_A et u_B . Sur une période, elle est négative entre t_1 et t_2 (le dipôle est générateur) et positive en dehors (le dipôle est récepteur). Le calcul de la valeur moyenne de $u_A \times (-u_B)$ donnerait une image de la puissance active en V^2 , t_1 et t_2 permettent de calculer le déphasage ($\varphi \approx 51,5^\circ$), etc.

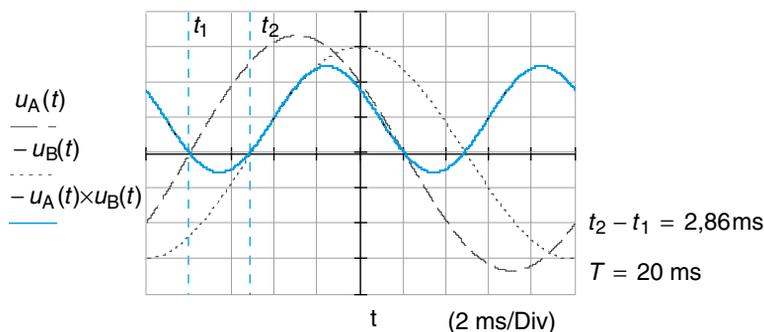


Figure 6.6 Visualisation de la puissance instantanée

Remarque : Pour déterminer la puissance active, on mesure généralement la valeur moyenne de la puissance instantanée. Le calcul à partir des valeurs efficaces et du déphasage par $P = UI \cos(\varphi)$ est entaché d'une incertitude qui peut être importante lorsque φ se rapproche de $\pm\pi/2$. En effet, on démontre que l'incertitude relative sur P est donnée par :

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I} + |\varphi \times \tan \varphi| \frac{\Delta \varphi}{|\varphi|} \quad (P, U \text{ et } I \text{ sont positifs})$$

Relèvement du facteur de puissance

Un atelier branché sur le réseau 230 V, 50 Hz comporte : deux moteurs de puissance utile 4 kW avec un facteur de puissance de 0,7 et un rendement de 0,85, un moteur de puissance utile 2 kW avec un facteur de puissance de 0,8 et un rendement de 0,8, et dix lampes de 100 W.

1. Calculer les puissances active et réactive totales de l'atelier, son facteur de puissance, puis le courant efficace total nécessaire à son alimentation.
2. Calculer la capacité des condensateurs à placer en parallèle pour relever le facteur de puissance à environ 0,93 ($\tan \varphi = 0,4$). En déduire le nouveau courant efficace total nécessaire à l'alimentation de l'atelier.
3. L'atelier est alimenté par une ligne de résistance $r = 0,1 \Omega$ et de réactance $x = 0,1 \Omega$. En utilisant le théorème de Boucherot, calculer la valeur efficace de la tension que devrait délivrer la source pour que la valeur efficace de la tension au niveau de l'atelier soit $U = 230 \text{ V}$ dans les deux cas précédent (sans et avec C).

Solution

1. Puissances active et réactive totales de l'atelier – Courant efficace total. Le tableau suivant dresse le bilan des puissances.

	Puissance active $P = P_U/\eta$	Puissance réactive $Q = P \tan\varphi$
Deux moteurs de $P_U = 4$ kW, $\cos\varphi = 0,7$ et $\eta = 0,85$	$2 \times \frac{4}{0,85} \approx 9,41$ kW	$9,41 \times 1,02 \approx 9,60$ kvar
Un moteur de $P_U = 2$ kW, $\cos\varphi = 0,8$ et $\eta = 0,8$	$\frac{2}{0,8} = 2,50$ kW	$2,5 \times 0,75 \approx 1,88$ kvar
Dix lampes de 100 W	$10 \times 0,1 = 1$ kW	0
Atelier (théorème de Boucherot)	$P_1 \approx 12,91$ kW	$Q_1 \approx 11,48$ kvar

D'où le facteur de puissance de l'atelier :

$$\tan \varphi_1 = \frac{Q_1}{P_1} \approx \frac{11,47}{12,91} \approx 0,889 \implies f_{p_1} = \cos \varphi_1 \approx 0,747$$

$$\text{ou directement par } f_{p_1} = \cos \varphi_1 = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_1}{\sqrt{P_1^2 + Q_1^2}}$$

Il en résulte l'intensité efficace nécessaire à l'alimentation de l'atelier :

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} \approx \frac{12,91 \cdot 10^3}{230 \times 0,747} \approx 75,1 \text{ A}$$

Remarques :

- La puissance active, du signe du $\cos \varphi$, est positive pour un récepteur et négative pour un générateur.
- La puissance réactive, du signe du $\sin \varphi$, est positive pour un récepteur inductif et négative pour un récepteur capacitif.

2. Calcul de C (principe Fig. 6.7) – Nouveau courant efficace total.

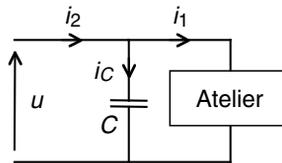


Figure 6.7 Relèvement du facteur de puissance

Le tableau suivant résume la situation.

	Puissance active	Puissance réactive
Atelier sans C	$P_1 = UI_1 \cos \varphi_1$	$Q_1 = UI_1 \sin \varphi_1 = P_1 \tan \varphi_1$
Capacité C	$P_C = 0$	$Q_C = UI_C \sin(-\pi/2) = -C\omega U^2$
Atelier avec C	$P_2 = UI_2 \cos \varphi_2$ $= P_1 + P_C = P_1$	$Q_2 = UI_2 \sin \varphi_2 = P_2 \tan \varphi_2$ $= Q_1 + Q_C$

On en déduit la puissance réactive que devra absorber le condensateur :

$$Q_C = Q_2 - Q_1 = P_1 [\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1] \approx 12,91 \cdot 10^3 \times [0,4 - 0,889] \approx -6,31 \text{ kvar}$$

Or $Q_C = -C\omega U^2$, d'où :

$$C = \frac{P_1 [\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2]}{2\pi f U^2} \approx \frac{12,91 \cdot 10^3 \times [0,889 - 0,4]}{2 \times \pi \times 50 \times 230^2} \approx 380 \text{ }\mu\text{F}$$

Il en résulte la nouvelle intensité efficace nécessaire à l'alimentation de l'atelier après relèvement du facteur de puissance :

$$\left. \begin{array}{l} P_1 = UI_1 \cos \varphi_1 \\ P_2 = UI_2 \cos \varphi_2 = P_1 \end{array} \right\} \implies I_2 = I_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi_2} \approx 75,1 \times \frac{0,747}{0,928} \approx 60,5 \text{ A}$$

Le relèvement du facteur de puissance diminue l'intensité efficace nécessaire.

Remarque : Attention, la loi des nœuds s'applique aux valeurs instantanées ($i_2 = i_1 + i_C$) mais pas aux valeurs efficaces.

3. Tension délivrée par la source. On applique le théorème de Boucherot.

– Sans le condensateur C . On a :

$$P_{\text{Source 1}} = P_1 + rI_1^2 \approx 13,48 \text{ kW} \quad Q_{\text{Source 1}} = Q_1 + xI_1^2 \approx 12,04 \text{ kvar}$$

$$S_{\text{Source 1}} = \sqrt{P_{\text{Source 1}}^2 + Q_{\text{Source 1}}^2} \approx 18,07 \text{ kVA}$$

$$U_{\text{Source 1}} = S_{\text{Source 1}}/I_1 \approx 240,6 \text{ V}$$

– Avec le condensateur C . On a :

$$P_{\text{Source 2}} = P_1 + rI_2^2 \approx 13,28 \text{ kW} \quad Q_{\text{Source 2}} = Q_1 + Q_C + xI_2^2 \approx 5,53 \text{ kvar}$$

$$S_{\text{Source 2}} = \sqrt{P_{\text{Source 2}}^2 + Q_{\text{Source 2}}^2} \approx 14,38 \text{ kVA}$$

$$U_{\text{Source 2}} = S_{\text{Source 2}}/I_2 \approx 237,9 \text{ V}$$

– Ainsi, la diminution de puissance réactive consommée par la charge conduit aussi à une diminution des chutes de tension en ligne.

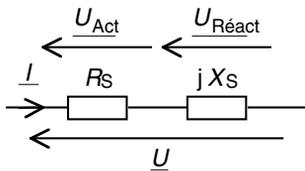
Modèles série et parallèle d'un dipôle

Objectifs : Déterminer les modèles série et parallèle d'un dipôle globalement récepteur en régime sinusoïdal permanent monophasé. Transformer un dipôle série en un dipôle parallèle et réciproquement.

I À savoir

- Modèles série et parallèle

Tout dipôle globalement récepteur consommant une puissance active P et une puissance réactive Q peut être représenté par un modèle équivalent série (Fig. 7.1) ou un modèle équivalent parallèle (Fig. 7.2). En convention récepteur, la puissance active P d'un dipôle globalement récepteur est toujours positive (voir fiche 6) et, en conséquence, on a : $-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2$.

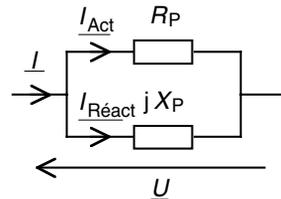


$$\underline{Z}_S = R_S + jX_S$$

$$P = UI \cos(\varphi) = R_S I^2$$

$$Q = UI \sin(\varphi) = X_S I^2$$

Figure 7.1 Modèle équivalent série



$$Y_P = \frac{1}{\underline{Z}_P} = \frac{1}{R_P} - \frac{j}{X_P}$$

$$P = UI \cos(\varphi) = U^2 / R_P$$

$$Q = UI \sin(\varphi) = U^2 / X_P$$

Figure 7.2 Modèle équivalent parallèle

Remarque : En convention récepteur, les résistances série R_S et parallèle R_P sont positives pour un dipôle globalement récepteur (P positif), tandis qu'elles seraient négatives pour un dipôle globalement générateur (P négatif).

• **Facteur de qualité**

Un dipôle réactif globalement récepteur (P positif) est parfait s'il n'absorbe pas de puissance active. Pour chiffrer cette perfection, on définit le facteur de qualité f_Q par :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} \quad (f_Q \text{ est positif})$$

Remarques :

- Le facteur de qualité dépend presque toujours de la fréquence.
- Le facteur de qualité est souvent noté Q , mais attention alors à ne pas le confondre avec la puissance réactive.
- En notant $\varphi = \alpha_u - \alpha_i$ le déphasage entre u et i , u en avance de phase par rapport à i si φ positif, on a (voir fiche 6) :

$$\left. \begin{aligned} Q &= P \tan(\varphi) \\ f_Q &= |Q|/P \end{aligned} \right\} \implies f_Q = |\tan(\varphi)|$$

II Compléments

• **Tension active – Tension réactive** (Fig. 7.1 et Fig. 7.3)

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_{\text{Act}} + \underline{U}_{\text{Réact}} \\ \vec{U} &= \vec{U}_{\text{Act}} + \vec{U}_{\text{Réact}} \implies U^2 = U_{\text{Act}}^2 + U_{\text{Réact}}^2 \\ U_{\text{Act}} &= U \cos(\varphi) \implies P = U_{\text{Act}} I \\ U_{\text{Réact}} &= U \sin(\varphi) \implies Q = U_{\text{Réact}} I \end{aligned}$$

($U_{\text{Réact}}$ est positif pour un dipôle inductif et négatif pour un dipôle capacitif)

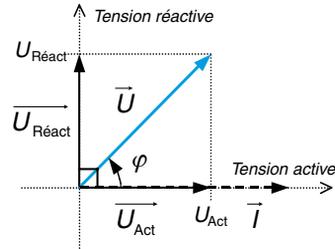


Figure 7.3 Tensions active et réactive Cas d'un dipôle inductif ($\varphi > 0$)

• **Courant actif ou « watté » – Courant réactif ou « déwatté »** (Fig. 7.2 et Fig. 7.4)

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_{\text{Act}} + \underline{I}_{\text{Réact}} \\ \vec{I} &= \vec{I}_{\text{Act}} + \vec{I}_{\text{Réact}} \implies I^2 = I_{\text{Act}}^2 + I_{\text{Réact}}^2 \\ I_{\text{Act}} &= I \cos(\varphi) \implies P = UI_{\text{Act}} \\ I_{\text{Réact}} &= I \sin(\varphi) \implies Q = UI_{\text{Réact}} \end{aligned}$$

($I_{\text{Réact}}$ est positif pour un dipôle inductif et négatif pour un dipôle capacitif)

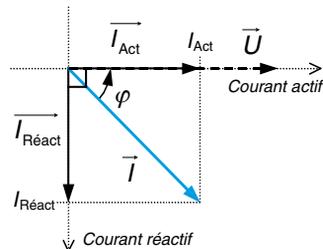


Figure 7.4 Courants active et réactif Cas d'un dipôle inductif ($\varphi > 0$)

III Méthodes

- **Facteur de qualité d'un dipôle série** (Fig. 7.1)

Le même courant traverse la résistance et la réactance. D'où :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{|X_S|I^2}{R_S I^2} = \frac{|X_S|}{R_S} \quad \text{ou bien} \quad \left. \begin{array}{l} f_Q = |\tan(\varphi)| \\ \underline{Z}_S = \underline{U}/\underline{I} = R_S + jX_S \end{array} \right\} \Rightarrow f_Q = \frac{|X_S|}{R_S}$$

- **Facteur de qualité d'un dipôle parallèle** (Fig. 7.2)

La résistance et la réactance ont leurs bornes communes. D'où :

$$f_Q = \frac{|Q|}{P} = \frac{U^2/|X_P|}{U^2/R_P} = \frac{R_P}{|X_P|} \quad \text{ou bien} \quad \left. \begin{array}{l} f_Q = |\tan(\varphi)| \\ \underline{Y}_P = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{1}{R_P} - \frac{j}{X_P} \end{array} \right\} \Rightarrow f_Q = \frac{R_P}{|X_P|}$$

- **Transformation modèle série \leftrightarrow modèle parallèle**

Pour établir les formules de passage entre l'un et l'autre des modèles, on écrit que l'admittance du dipôle parallèle (Fig. 7.2) est égale à l'admittance du dipôle série (Fig. 7.1) :

$$\frac{1}{R_P} - \frac{j}{X_P} = \frac{1}{R_S + jX_S} = \frac{R_S - jX_S}{R_S^2 + X_S^2} = \frac{R_S}{R_S^2 + X_S^2} - \frac{jX_S}{R_S^2 + X_S^2}$$

En identifiant les parties réelles d'une part et les parties imaginaires d'autre part, et tout calcul fait, on obtient :

$$\boxed{R_P = R_S(1 + f_Q^2)} \quad \text{et} \quad \boxed{X_P = X_S \left(1 + \frac{1}{f_Q^2}\right)}$$

Si $f_Q^2 \gg 1$ alors $R_P \approx R_S f_Q^2$ et $X_P \approx X_S$

Attention, le facteur de qualité dépendant de la fréquence, les formules de passage ci-dessus en dépendent aussi. En conséquence, les modèles série et parallèle ne sont équivalents qu'à une fréquence particulière.

IV Mesures

En mesurant la puissance active P , le courant efficace I et la tension efficace U , on peut déterminer les éléments du modèle équivalent série (voir Fig. 7.1) et du modèle équivalent parallèle (voir Fig. 7.2). Principe :

- On mesure P (voir fiche 6), I et U (voir fiche 2).
- On calcule $Q = \sqrt{S^2 - P^2}$.
- On calcule $R_S = P/I^2$, $X_S = Q/I^2$, $R_P = U^2/P$ et $X_P = U^2/Q$.

Four à induction

Un four à induction est équivalent à un circuit série composé d'une inductance pure $L_S = 60 \mu\text{H}$ et d'une résistance $r_S = 10 \text{ m}\Omega$ (Fig. 7.5). La fréquence de fonctionnement de la tension d'alimentation du four est fixée à $f = 600 \text{ Hz}$.

- Exprimer et calculer le facteur de qualité du dipôle à la fréquence $f = 600 \text{ Hz}$.
- En déduire le modèle parallèle du dipôle à la fréquence $f = 600 \text{ Hz}$.
- Le dipôle AB est alimenté par une source de tension sinusoïdale de valeur efficace $U_1 = 1000 \text{ V}$. Exprimer et calculer les puissances active et réactive, les courants actif et réactif. En déduire l'intensité efficace du courant absorbé par la bobine.
- On ne dispose en réalité que d'un générateur de tension sinusoïdale de valeur efficace $U_2 = 90 \text{ V}$ et de fréquence $f = 600 \text{ Hz}$. Voulant obtenir pour le four le même point de fonctionnement (même intensité efficace) on ajoute en série avec celui-ci un condensateur de capacité C que l'on se propose de calculer.
 - Calculer la puissance apparente du dipôle modifié.
 - Montrer que la puissance réactive absorbée par ce dipôle a deux valeurs possibles. Calculer ces valeurs.
 - Calculer le facteur de qualité du dipôle modifié dans les deux cas possibles.
 - La solution technologique choisie (onduleur de tension à 4 thyristors en pont) est telle que le courant dans la charge doit être en avance par rapport à la tension. Calculer la valeur de C .

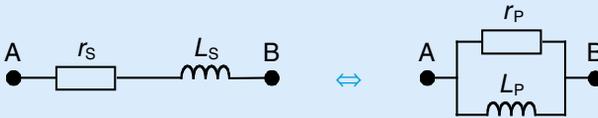


Figure 7.5 Modèle série – Modèle parallèle

Solution

- Facteur de qualité.

$$f_{Q1} = \frac{|X_S|}{r_S} = \frac{L_S \omega}{r_S} \approx 22,6$$

- Éléments du modèle parallèle. On a :

$$\frac{1}{r_P} - \frac{j}{L_P \omega} = \frac{1}{r_S + jL_S \omega} = \frac{r_S - jL_S \omega}{r_S^2 + (L_S \omega)^2}$$

En identifiant les parties réelles, on obtient :

$$r_P = \frac{r_S^2 + (L_S \omega)^2}{r_S} = r_S (1 + (L_S \omega / r_S)^2) = r_S (1 + f_{Q1}^2)$$

En identifiant les parties imaginaires, on obtient :

$$L_P = \frac{r_S^2 + (L_S\omega)^2}{L_S\omega^2} = L_S(1 + (r_S/L_S\omega)^2) = L_S\left(1 + \frac{1}{f_{Q1}^2}\right)$$

Et aussi :

$$X_P = X_S\left(1 + \frac{1}{f_{Q1}^2}\right)$$

Puisque $f_{Q1}^2 \gg 1$, on a :

$$r_P = r_S f_{Q1}^2 \approx 5,12 \Omega, L_P \approx L_S = 60 \mu\text{H} \text{ et } X_P \approx X_S \approx 226 \text{ m}\Omega$$

3. Puissances active et réactive, courants actif et réactif.

$$P_1 = U_1^2/r_P \approx 195 \text{ kW}$$

$$Q_1 = U_1^2/X_P \approx 4412 \text{ kvar}$$

$$I_{1\text{Act}} = P_1/U_1 = U_1/r_P \approx 195 \text{ A}$$

$$I_{1\text{Réact}} = Q_1/U_1 = U_1/X_P \approx 4412 \text{ A}$$

$$I_1 = \sqrt{I_{1\text{Act}}^2 + I_{1\text{Réact}}^2} \approx 4417 \text{ A}$$

4. Dipôle modifié

4.1. Puissance apparente du dipôle modifié. On veut la même intensité I_1 , d'où :

$$S_2 = U_2 I_1 \approx 397,5 \text{ kVA}$$

4.2. Puissance réactive du dipôle modifié. La puissance active est inchangée : $P_2 = P_1$.

En conséquence, on a :

$$S_2^2 = P_1^2 + Q_2^2 \implies Q_2 = \pm\sqrt{S_2^2 - P_1^2} \approx \pm 346 \text{ kvar}$$

4.3. Facteur de qualité du dipôle modifié.

$$f_{Q2} = \frac{|Q_2|}{P_1} \approx 1,78$$

4.4. Valeur de C . Le courant dans la charge devant être en avance par rapport à la tension, la puissance réactive Q_2 doit être choisie négative. D'où :

$$Q_C = Q_2 - Q_1 \approx -4760 \text{ kvar}$$

La puissance réactive absorbée par le condensateur est :

$$Q_C = \frac{-I_1^2}{C\omega} \implies C = \frac{-I_1^2}{Q_C\omega} \approx 1090 \mu\text{F}$$

Adaptation d'impédance

Objectifs : Comprendre et utiliser les conditions d'adaptation d'impédance en régime sinusoïdal permanent.

I Principe

Pour que le transfert de puissance soit maximal d'un générateur vers un récepteur, l'impédance du générateur et celle du récepteur doivent être adaptées l'une à l'autre. On dit alors qu'il y a adaptation d'impédance (ou adaptation d'impédance en puissance).

II À savoir

Le générateur étant représenté par son modèle de Thévenin (Fig. 8.1) et le récepteur ne comportant pas de source, la condition d'adaptation d'impédance est :

$$\boxed{\underline{Z}_G = \overline{\underline{Z}_U}} \iff \begin{cases} R_G = R_U \\ X_G = -X_U \end{cases} \iff \begin{cases} |\underline{Z}_G| = |\underline{Z}_U| \\ \text{Arg}(\underline{Z}_G) = -\text{Arg}(\underline{Z}_U) \end{cases}$$

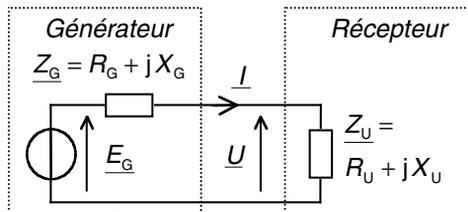


Figure 8.1 Générateur (modèle de Thévenin) – Récepteur

La puissance active absorbée par le récepteur est :

$$P_U = R_U I^2 = \frac{R_U E_G^2}{|\underline{Z}_G + \underline{Z}_U|^2} = \frac{R_U E_G^2}{(R_G + R_U)^2 + (X_G + X_U)^2}$$

Lorsque les impédances sont adaptées, la puissance absorbée par le récepteur $P_{U\text{Max}} = R_U I_{\text{Max}}^2$ est égale à la puissance dissipée dans la résistance du générateur $R_G I_{\text{Max}}^2$; la puissance fournie par le générateur est alors égale à $2P_{U\text{Max}}$, soit un rendement de 1/2.

$$\begin{cases} R_G = R_U \\ X_G = -X_U \end{cases} \implies \boxed{P_{U\text{Max}} = \frac{E_G^2}{4R_U}} \quad \text{et} \quad I_{\text{Max}} = \sqrt{\frac{P_{U\text{Max}}}{R_U}} = \frac{E_G}{2R_U}$$

• Adaptateur d'impédance

Pour transférer le maximum de puissance d'un générateur à un récepteur non adaptés en impédance ($Z_G \neq Z_U$), on intercale un adaptateur d'impédance qui ne doit pas dissiper de puissance active.

Adaptation d'impédance par T.P.

Soit le schéma (Fig. 8.2) d'adaptation d'impédance par transformateur parfait (T.P.) de rapport de transformation réel. Compte tenu des sens indiqués des tensions et des courants, les équations du T.P. s'écrivent :

$$m = \frac{U_2}{U_1} = \frac{I_1}{I_2}$$

1. Exprimer l'impédance d'entrée vue au primaire du T.P. par le générateur.
2. Exprimer l'impédance de sortie vue au secondaire du T.P. par la charge.
3. Donner les modèles de Thévenin vus au primaire et au secondaire du T.P.
4. Déterminer la condition d'adaptation d'impédance.
5. Les impédances du générateur et de la charge étant résistives, calculer le rapport de transformation qui permet de réaliser l'adaptation d'impédance pour $R_G = 600 \Omega$ et $R_U = 150 \Omega$.

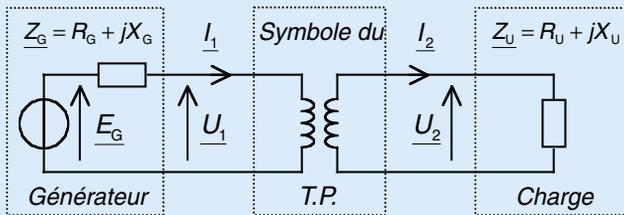


Figure 8.2 Adaptation d'impédance par T.P.

Solution

Pour bien comprendre, et bien que l'on puisse s'en passer ici, on commence par remplacer le T.P. par le schéma équivalent de son modèle interne décrit par les équations rappelées en début d'énoncé (Fig. 8.3).

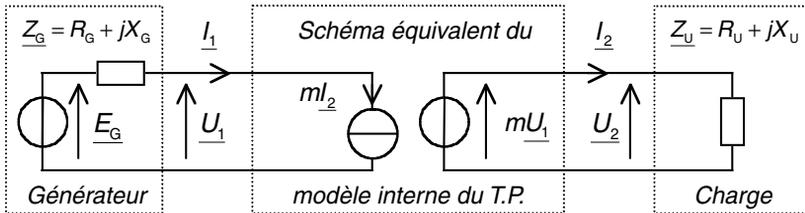


Figure 8.3 Adaptation d'impédance – Modèle interne du T.P.

1. Impédance d'entrée vue au primaire du T.P. Les sources mI_2 et mU_1 du T.P. sont commandées ; elles ne doivent donc pas être éteintes. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_1 = m\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = m\underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_U \times \underline{I}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_E = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2/m}{m\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_U}{m^2}$$

2. Impédance de sortie vue au secondaire du T.P. On éteint le générateur : $\underline{E}_G = 0$ mais pas les sources mI_2 et mU_1 qui sont commandées. D'où :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{I}_1 = m\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = m\underline{U}_1 \\ \underline{U}_1 = -\underline{Z}_G \times \underline{I}_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_S = \frac{\underline{U}_2}{-\underline{I}_2} \Big|_{\underline{E}_G=0} = \frac{m\underline{U}_1}{-\underline{I}_1/m} = m^2 \underline{Z}_G$$

3. Modèles de Thévenin vus au primaire et au secondaire (Fig. 8.4)

– Le modèle de Thévenin vu au primaire est constitué de l'impédance d'entrée \underline{Z}_E déterminée précédemment en série avec la source de tension $\underline{E}_E = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \underline{E}_E = \underline{U}_1 \Big|_{\underline{I}_1=0} \\ \underline{I}_1 = 0 \Rightarrow \underline{I}_2 = \underline{I}_1/m = 0 \Rightarrow \underline{U}_2 = m\underline{U}_1 = 0 \Rightarrow \underline{U}_1 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E}_E = 0$$

– Le modèle de Thévenin vu au secondaire est constitué de l'impédance de sortie \underline{Z}_S déterminée précédemment en série avec la source de tension \underline{E}_S .

$$\left. \begin{array}{l} \underline{E}_S = \underline{U}_2 \Big|_{\underline{I}_2=0} = m\underline{U}_1 \\ \underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_1 = m\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_1 = \underline{E}_G \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{E}_S = m\underline{E}_G$$

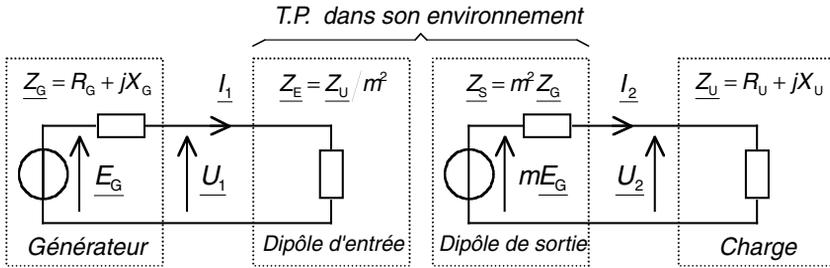


Figure 8.4 Modèles de Thévenin vus au primaire et au secondaire

Attention, il ne faut pas confondre le modèle interne du T.P. (Fig. 8.3), et les modèles vus au primaire et au secondaire (Fig. 8.4). Son modèle interne est indépendant du générateur et de la charge, ce qui n'est pas le cas des modèles de Thévenin vus au primaire et au secondaire.

4. Condition d'adaptation d'impédance.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Au primaire : } \underline{Z}_E = \frac{\underline{Z}_U}{m^2} = \underline{Z}_G \\ \text{ou bien} \\ \text{Au secondaire : } \underline{Z}_S = m^2 \underline{Z}_G = \underline{Z}_U \end{array} \right\} \iff \begin{cases} \frac{R_U}{m^2} = R_G \\ \frac{X_U}{m^2} = -X_G \end{cases}$$

5. Impédances purement résistives.

$$m = \sqrt{\frac{R_U}{R_G}} = \sqrt{\frac{150}{600}} = 0,5$$

Remarques :

- L'impédance de charge, placée au secondaire du T.P., est vue divisée par m^2 au primaire ($\underline{Z}_E = \underline{Z}_U / m^2$).
- L'impédance du générateur, placée au primaire du T.P., est vue multipliée par m^2 au secondaire ($\underline{Z}_S = m^2 \underline{Z}_G$).
- Le T.P. ne permet pas d'adapter indépendamment les parties réelles et les parties imaginaires des impédances, et il ne permet pas de modifier le signe entre les parties imaginaires.
- Le T.P. permet facilement d'adapter les impédances de la charge et du générateur lorsqu'elles sont purement résistives ou se comportent comme telles dans une bande de fréquence donnée ; la condition d'adaptation est alors indépendante de la fréquence dans l'hypothèse du T.P.
- Si les impédances de la charge et du générateur sont réactives, il faut modifier la réactance au primaire ou au secondaire par ajout d'éléments réactifs.

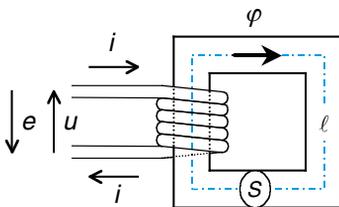
Circuits magnétiques

Objectifs : Étudier les circuits magnétiques en régime sinusoïdal. Connaître le modèle linéaire de la bobine à noyau de fer et la signification physique de ses éléments.

I À savoir

- **Loi de Lenz-Faraday – Formule de Boucherot – Loi d’Hopkinson**

Soit le circuit magnétique typique supposé linéaire, sans perte magnétique et sans fuite de flux, sur lequel est enroulé un conducteur électrique isolé supposé de résistivité nulle (Fig. 9.1).



N : nombre de spires du bobinage.
 S (en m^2) : section du circuit magnétique.
 ℓ (en m) : longueur de la ligne moyenne de champ dans le circuit magnétique.
 μ (en H/m) : perméabilité magnétique du circuit magnétique. Avec nos hypothèses : $B = \mu H$ où μ est supposée constante.

Figure 9.1 Circuit magnétique typique bobiné

Loi de Lenz-Faraday

Alimenté par une tension $u(t)$ variable, le bobinage est parcouru par un courant variable $i(t)$, source d’un champ $B(t)$ variable dans le circuit magnétique. Le flux $\varphi(t) = B(t) \times S$ de ce champ à travers une section droite du circuit magnétique est donc variable. La variation de ce flux se traduit par l’apparition d’une force électromotrice induite $e(t)$. La figure précédente (Fig. 9.1) montre clairement que $u(t) = -e(t)$. Son expression en instantané, avec $u = u(t)$, $e = e(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\varphi_{Tot} = \varphi_{Tot}(t)$, est donnée par :

$$e = -N \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-d\varphi_{Tot}}{dt} \quad \text{ou} \quad u = N \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi_{Tot}}{dt}$$

où φ (en Wb) est le flux d'induction magnétique à travers une section du circuit magnétique (c'est le flux embrassé par spire), et $\varphi_{\text{Tot}} = N\varphi$ (en Wb) est le flux total à travers la surface totale $S_{\text{Tot}} = NS$ (c'est-à-dire embrassé par la totalité du bobinage). La relation précédente montre que si la tension u est sinusoïdale, le flux φ l'est également. En notation complexe pour le régime sinusoïdal, la loi de Lenz-Faraday s'écrit :

$$\boxed{\underline{U} = j\omega N \underline{\Phi} = j\omega \underline{\Phi}_{\text{Tot}}} \iff \begin{cases} U = \omega N \Phi \\ \text{Arg}(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\underline{\Phi}) \end{cases}$$

où \underline{U} , $\underline{\Phi}$ et $\underline{\Phi}_{\text{Tot}}$ sont les représentants complexes de u , φ et φ_{Tot} .

Formule de Boucherot

L'induction magnétique $B = B(t)$ (en teslas : T) est reliée au flux d'induction magnétique $\varphi = \varphi(t)$ par $\varphi = BS$, soit en notation complexe pour le régime sinusoïdal :

$$\underline{U} = j\omega N S \underline{B} \iff \begin{cases} U = \omega N S B = \sqrt{2}\pi f N S B_{\text{Max}} \\ \text{Arg}(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\underline{B}) \end{cases}$$

On obtient alors la formule de Boucherot, valable en régime sinusoïdal, qui relie la valeur efficace de la tension à la valeur maximale de l'induction magnétique :

$$\boxed{U \approx 4,44 N f S B_{\text{Max}}}$$

Loi d'Hopkinson

Cette loi (écriture du théorème d'Ampère dans le cas d'un circuit magnétique parfait : $H\ell = Ni$) relie le flux d'induction magnétique $\varphi = \varphi(t)$ au courant électrique $i = i(t)$ par :

$$\boxed{\varepsilon = Ni = \mathfrak{R}\varphi} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \times \frac{\ell}{S}}$$

où $\varepsilon = Ni$ s'appelle la force magnétomotrice (en A) et \mathfrak{R} la réluctance (en H^{-1}). En notation complexe pour le régime sinusoïdal, la loi d'Hopkinson s'écrit :

$$\boxed{\underline{\varepsilon} = N \underline{I} = \mathfrak{R} \underline{\Phi}} \quad \text{où } \underline{\varepsilon}, \underline{I} \text{ et } \underline{\Phi} \text{ sont les représentants complexes de } \varepsilon, i \text{ et } \varphi.$$

Remarque : μ étant constante, \mathfrak{R} est une constante et, en conséquence, i est sinusoïdal comme φ .

Inductance

En introduisant l'inductance L (en H), le flux total s'écrit :

$$\boxed{\varphi_{\text{Tot}} = N\varphi = Li} \quad \text{avec} \quad \boxed{L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}}$$

Finalement, en notation complexe pour le régime sinusoïdal, on obtient :

$$\boxed{\Phi_{\text{Tot}} = N\Phi = LI} \implies \boxed{U = j\omega N\Phi = j\omega\Phi_{\text{Tot}} = jL\omega I}$$

Avec ces hypothèses, résistivité nulle du conducteur électrique et circuit magnétique linéaire sans perte et sans fuite, la bobine est parfaite, d'inductance L . En régime sinusoïdal, la tension est en avance de $\pi/2$ sur le flux et le courant (Fig. 9.2).

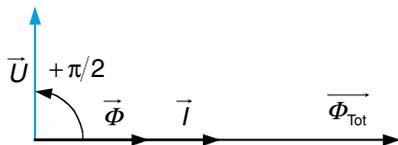


Figure 9.2 Représentation de Fresnel

• Modèle linéaire d'une bobine à noyau de fer

Valable en régime sinusoïdal et hors saturation, il permet de prendre en compte les imperfections liées à la construction de la bobine ou à la nature des différents matériaux utilisés. Le schéma équivalent (Fig. 9.3) de ce modèle est composé des éléments ci-dessous :

- La résistance r rend compte de la résistance du conducteur électrique ramenée en dehors du bobinage entraînant des pertes par effet Joule.
- L'inductance magnétisante L_m rend compte du flux magnétisant φ_m (en Wb) qui est le flux d'induction magnétique à travers une section du noyau ferromagnétique.

$$N\varphi_m = L_m i_m$$

- L'inductance de fuite L_f rend compte du flux de fuite φ_f (en Wb) qui est le flux en dehors ou sortant du noyau ferromagnétique.

$$N\varphi_f = L_f i$$

- La résistance R_f rend compte des pertes magnétiques (pertes par courants de Foucault et pertes par hystérésis) appelées « pertes fer ». La modélisation par une résistance aux bornes de L_m est justifiée car ces pertes sont quasiment proportionnelles au carré de la tension induite par le flux magnétisant φ_m (loi de Lenz-Faraday).

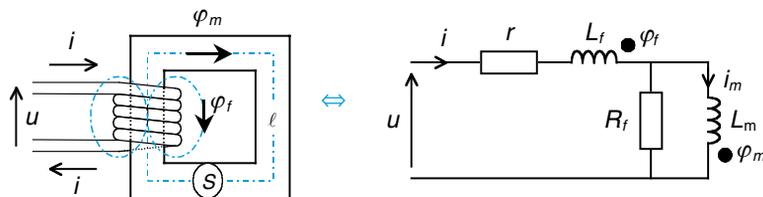


Figure 9.3 Schéma équivalent du modèle linéaire d'une bobine à noyau de fer

II Compléments

La présence d'un milieu ferromagnétique permet d'obtenir des bobines de grande inductance, mais engendre des non-linéarités : le flux dans le circuit magnétique n'est pas une fonction linéaire du courant (la perméabilité magnétique, la réluctance et donc l'inductance ne sont pas constantes). Le flux est saturé à partir d'une certaine valeur du courant, et il diffère selon que le courant croît ou décroît (cycle d'hystérésis). La caractéristique $\varphi = f(i)$ d'un circuit magnétique bobiné sans fuite de flux correspond à celle de $B = f(H)$ du milieu magnétique aux facteurs d'échelle près. En effet, les relations : $\varphi = BS$ (flux à travers la surface S) et $H\ell = Ni$ (théorème d'Ampère) permettent de passer de B à φ d'une part et de H à i d'autre part (Fig. 9.4).

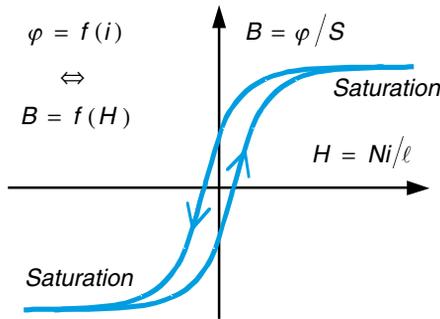


Figure 9.4 Cycle d'hystérésis et saturation d'un circuit magnétique

Il est donc clair que, du fait de la saturation, l'inductance $L = N\varphi/i$ est une fonction nettement décroissante de i . En conséquence, si on impose une tension sinusoïdale $u = U_{\text{Max}} \cos(\omega t)$ aux bornes de la bobine, alors :

- le flux est sinusoïdal : $Nd\varphi/dt = u$
- l'induction magnétique est sinusoïdale : $B = \varphi/S$
- l'excitation magnétique n'est pas sinusoïdale : $H = f^{-1}(B)$
- le courant n'est pas sinusoïdal : $i = H\ell/N$

Plus on s'éloigne de la zone presque linéaire (H faible) de la caractéristique $B = f(H)$, plus le courant présente des pointes et moins il est sinusoïdal (exemple Fig. 9.5). Attention, en cas de forte saturation, la bobine se comporte pratiquement comme un court-circuit !

Bien que la présence d'un noyau de fer rende l'inductance de la bobine non linéaire et donc le régime non-sinusoïdal en toute rigueur, on utilise tout de même le modèle linéaire d'une bobine à noyau de fer (Fig. 9.3) et on suppose le régime sinusoïdal ; les éléments du modèle doivent être déterminés au fonctionnement nominal (tension, courant) car ils en dépendent.

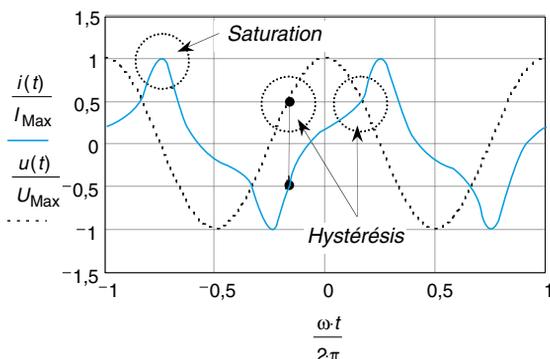


Figure 9.5 Allure du courant dans une bobine à noyau de fer

III Mesures

Pour le modèle linéaire d'une bobine à noyau de fer, on se contente souvent d'un modèle R - L parallèle que l'on détermine en mesurant la puissance active P , le courant efficace I et la tension efficace U (voir fiche 7).

Bobine en régime sinusoïdal

1. On désire réaliser une inductance en bobinant N spires sur un circuit magnétique (voir Fig. 9.1) de section du fer $S = 26 \text{ cm}^2$ et de longueur de la ligne de champ « moyenne » $\ell = 50 \text{ cm}$. Le circuit magnétique est supposé non saturé, sans hystérésis et de perméabilité relative $\mu_R = 1000$. La résistance du bobinage et les fuites de flux sont négligeables.

L'alimentation de la bobine s'effectue sous $V = 230 \text{ V}$ à $f = 50 \text{ Hz}$. On désire obtenir une induction maximale $B_{\text{Max}} = 1,4 \text{ T}$ dans le fer. On suppose toutes les grandeurs sinusoïdales.

1.1. Calculer le nombre de spires N .

1.2. Montrer que la loi d'Hopkinson peut aussi s'écrire $\varepsilon_{\text{Fer}} = H_{\text{Fer}} \ell$. En déduire l'amplitude (ou valeur maximale) de la force magnétomotrice dans le fer $\varepsilon_{\text{Fer Max}}$.

2. La construction n'est pas parfaite et laisse apparaître des entrefers dont la somme $\sum e \ll \ell$. Ceux-ci sont comptés pour une force magnétomotrice d'amplitude $\varepsilon_{\text{Air Max}} = 250 \text{ A}$.

2.1. En déduire l'amplitude de la force magnétomotrice totale $\varepsilon_{\text{Tot Max}}$, puis les valeurs maximale et efficace du courant magnétisant i_m .

2.2. Evaluer la somme des entrefers $\sum e$.

3. Soit le schéma équivalent (Fig. 9.6) de la bobine en régime sinusoïdal. La puissance absorbée mesurée sous tension nominale est $P = 47 \text{ W}$.

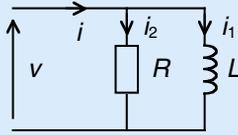


Figure 9.6 Schéma équivalent de la bobine

- 3.1. Repérer le courant magnétisant.
- 3.2. Exprimer et calculer la réactance puis l'inductance de la bobine.
- 3.3. Que modélise la résistance R ? Exprimer et calculer R .
- 3.4. Exprimer et calculer la valeur efficace I du courant appelé par la bobine.
- 3.5. Dans le cas d'une réalisation peu soignée, la somme des entrefers est doublée. Comment varie alors l'inductance de la bobine ? Justifier.
4. Parmi les 5 grandeurs suivantes : v , i , φ , $B(t)$ et $H(t)$ dites celles qui sont sinusoïdales et celles qui ne le sont pas dans la réalité. Justifier.

Solution

1.1. Nombre de spires. Par application de la formule de Boucherot, on obtient :

$$N \approx \frac{V}{4,44 f S B_{\text{Max}}} \approx 285$$

1.2. Immédiatement en appliquant le théorème d'Ampère ($H\ell = Ni$), ou en remplaçant dans la loi d'Hopkinson \mathfrak{R} et φ par leur expression, on obtient :

$$\varepsilon_{\text{Fer}} = \mathfrak{R}_{\text{Fer}} \varphi = \frac{\ell}{\mu S} \times \mu H_{\text{Fer}} S = H_{\text{Fer}} \ell$$

D'où :
$$\varepsilon_{\text{Max}} = H_{\text{Max}} \ell = B_{\text{Max}} \ell / \mu \approx 557 \text{ A}$$

2.1. Présence d'entrefers. Les forces magnétomotrices s'ajoutent :

$$\varepsilon_{\text{Tot}} = \varepsilon_{\text{Fer}} + \varepsilon_{\text{Air}} = H_{\text{Fer}} \ell + H_{\text{Air}} \sum e \quad (\text{c'est toujours le théorème d'Ampère})$$

D'où :
$$\varepsilon_{\text{Tot Max}} = \varepsilon_{\text{Fer Max}} + \varepsilon_{\text{Air Max}} \approx 807 \text{ A}$$

Les valeurs maximale et efficace du courant magnétisant sont données par la définition de la force magnétomotrice : $\varepsilon_{\text{Tot}} = Ni_{\text{m}}$

D'où :
$$I_{\text{m Max}} = \frac{\varepsilon_{\text{Tot Max}}}{N} \approx 2,83 \text{ A} \quad \text{et} \quad I_{\text{m}} = I_{\text{m Eff}} = \frac{I_{\text{m Max}}}{\sqrt{2}} \approx 2 \text{ A}$$

2.2. Le flux étant conservatif et en supposant la section S constante dans les entrefers ($\sum e \ll \ell$), on a :

$$\sum e = \frac{\varepsilon_{\text{Air Max}}}{H_{\text{Air Max}}} = \frac{\mu_0 \varepsilon_{\text{Air Max}}}{B_{\text{Max}}} \approx 0,22 \text{ mm}$$

On constate qu'une très faible longueur d'entrefer est responsable d'environ 30 % de l'appel de courant.

3.1. Courant magnétisant. C'est le courant i_1 qui traverse L . D'où :

$$I_1 = I_m \approx 2 \text{ A}$$

3.2. Réactance et inductance de la bobine. On a :

$$X = \frac{V}{I_1} \approx 115 \text{ } \Omega \implies L = \frac{X}{\omega} \approx 365 \text{ mH}$$

On peut aussi calculer l'inductance par la relation :

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}_{\text{Tot}}} \approx 365 \text{ mH}$$

avec $\mathfrak{R}_{\text{Tot}} = \mathfrak{R}_{\text{Fer}} + \mathfrak{R}_{\text{Air}} = \frac{\ell}{\mu S} + \frac{e}{\mu_0 S} \approx 2,22 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$ et $N \approx 285$

3.3. Résistance R . Elle modélise les « pertes fer ». C'est le seul élément du schéma équivalent qui absorbe la puissance active, d'où :

$$R = V^2/P \approx 1,13 \text{ k}\Omega$$

3.4. Valeur efficace du courant appelé par la bobine. Les courants i_1 et i_2 sont en quadrature (i_1 est la composante réactive de i et i_2 sa composante active), d'où :

$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2} \approx 2,02 \text{ A} \quad \text{avec} \quad I_2 = V/R = P/V \approx 0,2 \text{ A}$$

3.5. Si la somme des entrefers $\sum e$ est doublée alors la force magnétomotrice due aux entrefers est aussi doublée ($\varepsilon_{\text{Air Max}} \approx 500\text{A}$), ce qui augmente la force magnétomotrice totale ($\varepsilon_{\text{Tot Max}} \approx 1057\text{A}$), le courant magnétisant ($I_1 \approx 2,63 \text{ A}$), et finalement diminue l'inductance ($L \approx 279 \text{ mH}$).

On peut aussi raisonner sur la réluctance : Si la somme des entrefers $\sum e$ est doublée, alors la réluctance due aux entrefers est aussi doublée ($\mathfrak{R}_{\text{Air}} \approx 1,37 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$), ce qui augmente la réluctance totale ($\mathfrak{R}_{\text{Tot}} \approx 2,9 \cdot 10^5 \text{ H}^{-1}$), et finalement diminue l'inductance ($L \approx 279 \text{ mH}$).

4. Grandeurs sinusoïdales et non-sinusoïdales.

– La tension v est sinusoïdale car imposée par le réseau.

– Le flux φ est sinusoïdal car $v = N d\varphi/dt$, soit en complexe : $\underline{V} = j\omega N \underline{\Phi}$.

– L'induction magnétique $B(t)$ est sinusoïdale car $\varphi = BS$.

– L'excitation magnétique $H_{\text{Fer}}(t)$ n'est pas sinusoïdale car $B = f(H_{\text{Fer}})$ n'est pas linéaire.

– Le courant i n'est pas sinusoïdal car $\varepsilon_{\text{Tot}} = Ni_1 = H_{\text{fer}}\ell + H_{\text{Air}} \sum e$ et $H_{\text{Fer}}(t)$ n'est pas sinusoïdal.

Fonction de transfert – Diagramme de Bode

Objectifs : Analyser le comportement d'un circuit électrique linéaire décrit par sa fonction de transfert ; tracer son module et son déphasage en utilisant des échelles linéaire-linéaire ou linéaire-logarithmique (diagramme de Bode).

I À savoir

Soit un circuit électrique linéaire (voir fiche 1) où une grandeur (tension ou courant) désignée comme « sortie » et notée $s = s(t)$ dépend d'une seule autre grandeur (tension ou courant) désignée comme « entrée » et notée $e = e(t)$. Pour connaître son comportement en fréquence, on étudie le circuit en régime sinusoïdal en associant le nombre complexe $\underline{E} = [E; \alpha_E] = Ee^{j\alpha_E}$ à la grandeur sinusoïdale $e(t) = E\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_E)$ et le nombre complexe $\underline{S} = [S; \alpha_S] = Se^{j\alpha_S}$ à la grandeur sinusoïdale $s(t) = S\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_S)$ (Fig. 10.1).



Figure 10.1 Circuit linéaire – Fonction de transfert complexe

- **Fonction de transfert (F.T.) complexe, ou F.T. isochrone, ou transmittance complexe \underline{T}** (voir Fig. 10.1)

C'est le rapport des représentants complexes de deux grandeurs (tensions et/ou courants en électricité) sinusoïdales synchrones et de même fréquence.

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \left[\frac{S}{E}; \alpha_S - \alpha_E \right] = \frac{S}{E} e^{j(\alpha_S - \alpha_E)}$$

- **Module T de la F.T. complexe \underline{T}**

$$T = |\underline{T}| = \frac{S}{E} = \frac{S_{\text{Max}}}{E_{\text{Max}}} \quad \text{avec } S_{\text{Max}} = S\sqrt{2} \text{ et } E_{\text{Max}} = E\sqrt{2}$$

- **Déphasage φ de la F.T. complexe \underline{T}**

φ est le déphasage entre $s(t)$ et $e(t)$, $s(t)$ en avance de phase par rapport à $e(t)$ si φ positif ; il s'exprime en radians (rad) ou degrés ($^\circ$).

$$\boxed{\varphi = \text{Arg } \underline{T} = \alpha_S - \alpha_E} \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

avec $-\pi < \varphi \leq \pi$ selon la recommandation de l'I.E.C (voir fiche 2).

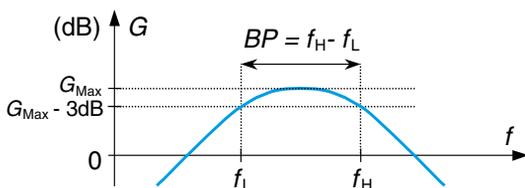
- **Gain G de la F.T. complexe \underline{T}** (lg ou \log_{10} désigne le logarithme décimal)

$$\boxed{G = 20 \lg |\underline{T}|} \quad \text{en décibels (dB) tel que } 1 \text{ B} = 10 \text{ dB, B étant le symbole du bel}$$

Remarque : La formule $G = 20 \lg |\underline{T}|$ est valable uniquement pour des grandeurs telles que $P_S/P_E = S^2/E^2$ où P_S et P_E sont respectivement les puissances des signaux $s(t)$ et $e(t)$. Le gain en puissance s'exprime par $G_P = 10 \lg T_P$ où $T_P = P_S/P_E$.

- **Fréquences de coupures à -3 dB** (Fig. 10.2)

Les fréquences de coupures dites à -3 dB sont celles pour lesquelles le gain G est inférieur à sa valeur maximale de pratiquement 3 dB. Plus exactement, les fréquences de coupures dites à -3 dB sont les fréquences pour lesquelles le module T est égal au module maximal divisé par $\sqrt{2}$, ce qui correspond à la puissance maximale du signal divisée par 2.



$$\boxed{20 \lg \frac{|\underline{T}|_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \approx G_{\text{Max}} - 3\text{dB}}$$

Figure 10.2 Fréquences de coupures basse f_L et haute f_H à -3 dB
Bande passante à -3 dB : $BP = f_H - f_L$

- **Bande passante** (voir Fig. 10.2)

On définit généralement la bande passante à -3 dB, comme le domaine des fréquences pour lesquelles le gain reste supérieur au gain maximal moins 3 dB.

- **Octave – Décade**

Une *octave* (terme musical) est l'intervalle entre deux fréquences f_2 et f_1 tel que $f_2 = 2f_1$, et une *décade* est l'intervalle entre deux fréquences f_2 et f_1 tel que $f_2 = 10f_1$ (Fig. 10.3).

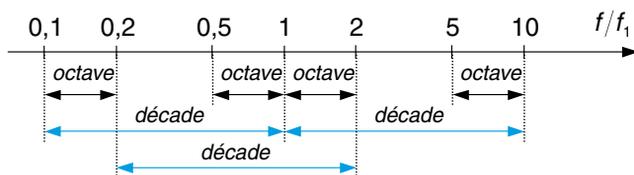


Figure 10.3 Octaves et décades (échelle \log_{10})

- **Tracé du comportement en fréquence**

On trace :

- le module T (échelle linéaire) de la F.T. complexe en fonction de la fréquence ou de la pulsation (échelle linéaire), et
- le déphasage φ (échelle linéaire) de la F.T. complexe en fonction de la fréquence ou de la pulsation (échelle linéaire).

- **Diagramme de Bode**

On trace :

- le gain G (échelle linéaire) de la F.T. complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique), et
- le déphasage φ (échelle linéaire) de la F.T. complexe en fonction du logarithme décimal de la fréquence ou de la pulsation (échelle logarithmique).

- **Pulsation réduite – Fréquence réduite**

$$\boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = 2\pi f}$$

- **F.T. d'ordre n**

Toute F.T. complexe d'ordre n (degré du dénominateur) peut s'écrire comme le produit de F.T. élémentaires du 1^{er} et/ou 2^e ordre. La F.T. peut se déduire de l'équation différentielle (voir fiche 1).

$$\boxed{T = \frac{b_0 + b_1 jx + b_2 (jx)^2 + \dots + b_m (jx)^m}{a_0 + a_1 jx + a_2 (jx)^2 + \dots + a_n (jx)^n}}$$

Il est utile de connaître quelques écritures habituelles de F.T. élémentaires du 1^{er} et du 2^e ordre, et les diagrammes de Bode correspondants, afin d'identifier rapidement le type : passe-bas (LP : low-pass), passe-haut (HP : high-pass), passe-bande (BP : band-pass) ou coupe-bande (BC : band-cut), l'ordre (qui caractérise la raideur de la coupure) et la ou les fréquences de coupure.

- **F.T. élémentaires du 1^{er} ordre**

F.T. passe-bas du 1^{er} ordre

$$T_{LP1} = \frac{1}{1 + jf/f_0}$$

Diagramme de Bode (Fig. 10.4) :

$$G_{LP1} = -20\lg\sqrt{1 + (f/f_0)^2}$$

$$\varphi_{LP1} = -\arctan(f/f_0)$$

Fréquence de coupure à -3 dB : f_0

F.T. passe-haut du 1^{er} ordre

$$T_{HP1} = \frac{jf/f_0}{1 + jf/f_0}$$

Diagramme de Bode (Fig. 10.5) :

$$G_{HP1} = 20\lg(f/f_0) - 20\lg\sqrt{1 + (f/f_0)^2}$$

$$\varphi_{HP1} = 90^\circ - \arctan(f/f_0)$$

Fréquence de coupure à -3 dB : f_0

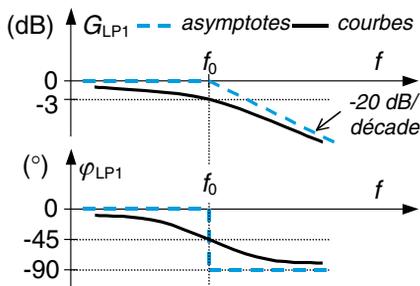


Figure 10.4 Passe-bas du 1^{er} ordre

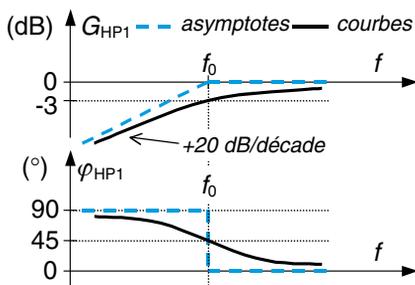


Figure 10.5 Passe-haut du 1^{er} ordre

Remarque : La F.T. du passe-haut peut s'écrire $T_{HP1} = jf/f_0 \times T_{LP1}$.
D'où :

$$G_{HP1} = 20\lg(f/f_0) + G_{LP1} \quad \text{et} \quad \varphi_{HP1} = 90^\circ + \varphi_{LP1}.$$

car $|jf/f_0| = f/f_0$ et $\arg(jf/f_0) = +90^\circ$

- **F.T. élémentaires du 2^e ordre**

f_0 s'appelle la fréquence propre, ω_0 la pulsation propre, m le coefficient d'amortissement, et $Q_0 = 1/(2m)$ le coefficient de surtension.

F.T. passe-bas du 2^e ordre :

$$T_{LP2} = \frac{1}{1 + 2mjf/f_0 + j^2(f/f_0)^2}$$

Diagramme de Bode (Fig. 10.6) :

Équation caractéristique :

$$1 + 2mx + x^2 = 0 \text{ avec } x = f/f_0$$

On distingue trois cas selon la valeur de l'amortissement m .

1) $m > 1$. L'équation caractéristique a deux racines réelles :

$$f_{1,2} = f_0(m \pm \sqrt{m^2 - 1}) \text{ et } f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

$$T_{LP2} = \frac{1}{(1 + jf/f_1) \times (1 + jf/f_2)}$$

La F.T. peut être décomposée en un produit de deux F.T. passe-bas du 1^{er} ordre.

2) $m = 1$. L'équation caractéristique a une racine double : $f_0 = f_1 = f_2$

$$T_{LP2} = \frac{1}{(1 + jf/f_0)^2}$$

3) $m < 1$. L'équation caractéristique n'a pas de racine réelle, la F.T. ne peut pas être décomposée en un produit de deux F.T. passe-bas du 1^{er} ordre. On distingue alors à nouveau trois cas :

3.1) $\sqrt{2}/2 < m < 1$. Le gain ne présente pas de maximum et la courbe reste en dessous des asymptotes.

3.2) $m = \sqrt{2}/2$. La courbe du gain est la plus plate possible.

3.3) $m < \sqrt{2}/2$. Pour $f = f_0\sqrt{1 - 2m^2}$ le

$$G_{Max} = 20 \lg \frac{1}{2m\sqrt{1 - m^2}}$$

gain présente un maximum :

F.T. passe-haut du 2^e ordre :

$$T_{HP2} = \frac{j^2(f/f_0)^2}{1 + 2mjf/f_0 + j^2(f/f_0)^2}$$

Diagramme de Bode (Fig. 10.7) : Il se déduit de celui du passe-bas du 2^e ordre :

- pour le gain, en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $f = f_0$, et
- pour la phase, en effectuant une translation de $+180^\circ$, car :

$$T_{HP2} = j^2(f/f_0)^2 \times T_{LP2}$$

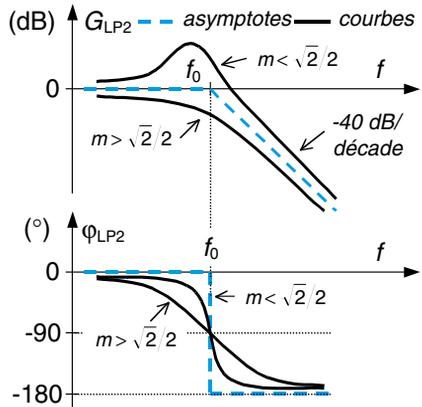


Figure 10.6 Passe-bas du 2^e ordre

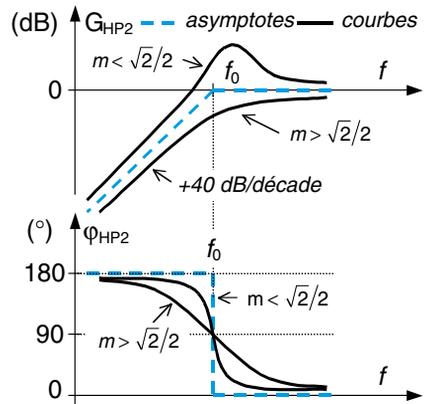


Figure 10.7 Passe-haut du 2^e ordre

F.T. passe-bande du 2^e ordre :

$$T_{BP2} = \frac{2mjf/f_0}{1 + 2mjf/f_0 + j^2(f/f_0)^2}$$

$$= \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

Diagramme de Bode (Fig. 10.8) : Il se déduit de celui du passe-bas du 2^e ordre :
 – pour le gain, en ajoutant $20\lg(2mf/f_0)$ à G_{LP2} , et
 – pour la phase, en effectuant une translation de $+90^\circ$, car :

$$T_{BP2} = 2mjf/f_0 \times T_{LP2}$$

Bande passante à -3 dB : $BP = 2mf_0 = f_0/Q_0$

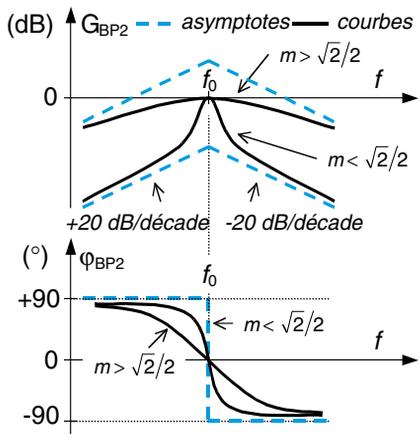


Figure 10.8 Passe-bande du 2^e ordre

II Méthodes

- Produit de deux F.T.**

$$\text{Si } \underline{T} = \underline{T}_2 \times \underline{T}_1 \text{ alors } \begin{cases} T = T_2 \times T_1 \\ \varphi = \varphi_2 + \varphi_1 \end{cases} \text{ et } G = G_2 + G_1$$

où $T = |\underline{T}|$, $\varphi = \text{Arg } \underline{T}$, $T_1 = |\underline{T}_1|$, $\varphi_1 = \text{Arg } \underline{T}_1$, $T_2 = |\underline{T}_2|$, $\varphi_2 = \text{Arg } \underline{T}_2$,
 $G = 20\lg T$, $G_1 = 20\lg T_1$ et $G_2 = 20\lg T_2$

- Diagramme de Bode du produit de deux F.T.**

Il se trace par l'addition « graphique » des gains d'une part : $G = G_2 + G_1$ et des déphasages d'autre part : $\varphi = \varphi_2 + \varphi_1$.

- Analyse rapide du comportement d'un circuit aux fréquences limites**

Aux fréquences limites, on remplace les condensateurs et les bobines soit par un circuit ouvert soit par un court-circuit conformément au tableau (Fig. 10.9). Attention, le raisonnement porte uniquement sur les modules des impédances complexes.

Impédance (module)	$f \longrightarrow 0$	$f \longrightarrow \infty$
Bobine : $Z_L = L\omega$	$Z_L \longrightarrow 0$ \iff court-circuit	$Z_L \longrightarrow \infty$ \iff circuit ouvert
Condensateur : $Z_C = \frac{1}{C\omega}$	$Z_C \longrightarrow \infty$ \iff circuit ouvert	$Z_C \longrightarrow 0$ \iff court-circuit

Figure 10.9 Impédances (modules) aux fréquences limites

III Mesures

Pour relever le comportement en fréquence d'un circuit :

- On attaque le circuit par un signal (une tension le plus souvent) sinusoïdal $e(t) = E\sqrt{2} \cos(2\pi ft + \alpha_E)$ à l'aide d'un générateur qui permet de régler la valeur efficace E ou la valeur maximale $E\sqrt{2}$ et la fréquence f .
- Pour chaque fréquence f souhaitée, d'une part on mesure la valeur efficace S ou la valeur maximale $S\sqrt{2}$ de $s(t) = S\sqrt{2} \cos(2\pi ft + \alpha_S)$ pour en déduire le module $T = S/E$, et d'autre part on mesure le déphasage $\varphi = \alpha_S - \alpha_E$.

Certains multimètres permettent d'effectuer une mesure en dB par rapport à une référence, généralement une tension de 0,775 V (l'unité est alors le dBu) ou de 1 V (l'unité est alors le dBV). On obtient ainsi directement le gain de la F.T. par une simple soustraction :

$$G = 20 \lg \frac{U_S}{U_E} = 20 \lg U_S - 20 \lg U_E = L_{U_S/U_{\text{Réf}}} - L_{U_E/U_{\text{Réf}}}$$

Où $L_{U_S/U_{\text{Réf}}}$ est le niveau (level) de la tension U_S en décibels par rapport à la tension de référence $U_{\text{Réf}}$, et $L_{U_E/U_{\text{Réf}}}$ est le niveau (level) de la tension U_E en décibels par rapport à la même tension de référence.

Mise en cascade de deux filtres passe-bas

Soit la mise en cascade de deux filtres passe-bas du 1^{er} ordre (Fig. 10.10).

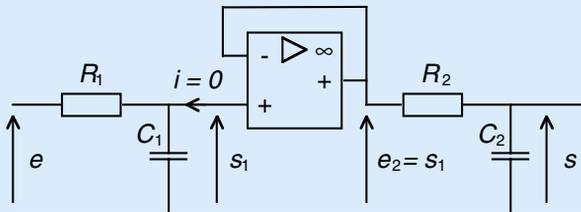


Figure 10.10 Mise en cascade de deux filtres passe-bas du 1^{er} ordre

1. Exprimer la F.T. complexe, son gain et son déphasage.
2. Tracer les asymptotes de son diagramme de Bode pour $R_1C_1 = 10R_2C_2$.

Solution

1. F.T. réalisée. Les deux étages sont indépendants. D'où :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}_2} \times \frac{\underline{S}_1}{\underline{E}} = \underline{T}_2 \times \underline{T}_1$$

$$\text{D'où : } \underline{T} = \underline{T}_2 \times \underline{T}_1 = \frac{1}{(1 + j\tau_2\omega) \times (1 + j\tau_1\omega)} = \frac{1}{1 + jf/f_2} \times \frac{1}{1 + jf/f_1}$$

$$\text{avec } f_1 = \frac{1}{2\pi\tau_1} \quad , \quad f_2 = \frac{1}{2\pi\tau_2} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \tau_1 = R_1C_1 = 1/\omega_1 \\ \tau_2 = R_2C_2 = 1/\omega_2 \end{cases}$$

$$G = G_2 + G_1 = -10 \log [1 + (\tau_2\omega)^2] - 10 \log [1 + (\tau_1\omega)^2]$$

$$\phi = \phi_2 + \phi_1 = -\arctan(\tau_2\omega) - \arctan(\tau_1\omega)$$

2. Asymptotes du diagramme de Bode. Les gains et les phases s'ajoutent. En conséquence, on effectue la somme graphique des asymptotes des deux 1^{er} ordre avec $R_1C_1 = 10R_2C_2$, soit $f_2 = 10f_1$ (Fig. 10.11). Sur cette figure, les asymptotes des deux 1^{er} ordre pris séparément (pointillés) sont volontairement décalées vers le haut pour mettre en évidence la construction.

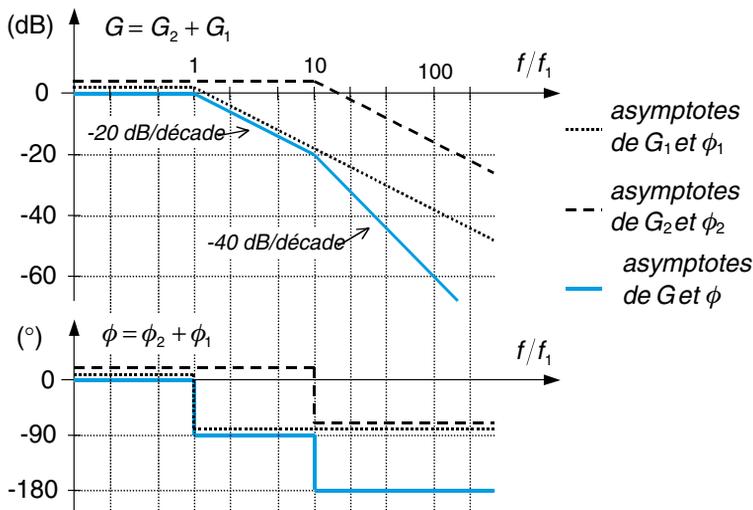


Figure 10.11 Deux passe-bas du 1^{er} ordre en cascade

Valeurs moyenne et efficace – Facteurs de crête, de forme, d'ondulation

Objectifs : Calculer et mesurer les valeurs moyenne et efficace d'une grandeur en régime périodique permanent.

I À savoir

- **Régime périodique**

Un circuit électrique est en régime périodique quand tensions et courants sont des fonctions périodiques du temps. Le régime périodique est un régime établi (permanent) obtenu quand tensions et courants sont devenus périodiques.

- **Signal périodique**

Un signal périodique (tension ou courant en électricité) se reproduit à l'identique au cours du temps. Son diagramme temporel est une suite de motifs identiques. La période T d'un signal périodique est la plus petite durée entre deux instants où le signal se reproduit à l'identique :

$$\forall t, \quad s(t + kT) = s(t) \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Fréquence f et pulsation ω :

$$f = \frac{1}{T} \quad (\text{Unités : } 1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}), \quad \omega = 2\pi f \quad (\text{Unités : } 1 \text{ rad/s} = 1 \text{ rad} \times 1 \text{ Hz})$$

- **Valeur moyenne**

La valeur moyenne S_{Moy} d'un signal périodique $s(t)$ de période T est :

$$S_{\text{Moy}} = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) dt$$

Remarques :

– La valeur moyenne d'une somme est égale à la somme des valeurs moyennes :

$$\langle s_1 + s_2 \rangle = \langle s_1 \rangle + \langle s_2 \rangle = S_{1\text{Moy}} + S_{2\text{Moy}} \quad (\text{linéarité de l'intégrale})$$

– La valeur moyenne d'un courant périodique est égale à la valeur d'un courant continu fictif qui transporterait la même quantité d'électricité (même charge déplacée) pendant une période.

$$\Delta q_{\text{Déplacée}} = \int_0^T i \, dt \implies I_{\text{Moy}} = \frac{\Delta q_{\text{Déplacée}}}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt$$

• Valeur efficace

La valeur efficace S_{Eff} d'un signal périodique $s(t)$ de période T est donnée par :

$$S_{\text{Eff}}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s^2(t) \, dt$$

Remarques :

– Attention, la valeur efficace d'une somme est, en général, différente de la somme des valeurs efficaces. On a :

$$\langle (s_1 + s_2)^2 \rangle = \langle s_1^2 \rangle + 2\langle s_1 s_2 \rangle + \langle s_2^2 \rangle = S_{1\text{Eff}}^2 + 2\langle s_1 s_2 \rangle + S_{2\text{Eff}}^2$$

– À la place du qualificatif « efficace », on utilise souvent l'abréviation anglo-saxonne « r.m.s. » qui signifie « root mean square » et qui se traduit littéralement par « racine de la moyenne du carré ».

– La valeur efficace d'un courant périodique est égale à la valeur d'un courant continu fictif qui produirait la même quantité de chaleur (même énergie apportée) dans une même résistance et pendant une période.

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{Apportée}} &= \int_0^T Ri^2 \, dt \implies I_{\text{Eff}}^2 = \frac{\Delta W_{\text{Apportée}}}{RT} = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 \, dt \\ &\implies P = \frac{\Delta W_{\text{Apportée}}}{T} = RI_{\text{Eff}}^2 \end{aligned}$$

• Signal alternatif

Un signal périodique est dit alternatif si sa valeur moyenne est nulle.

- **Décomposition d'un signal périodique**

Tout signal périodique $s(t)$ peut s'écrire comme la somme d'une composante continue égale à la valeur moyenne S_{Moy} , plus une composante alternative périodique (à valeur moyenne nulle) $s_{Alt}(t)$ parfois appelée ondulation.

$$s(t) = S_{Moy} + s_{Alt}(t)$$

Remarque : Dans ce cas particulier, on a :

$$\langle (S_{Moy} + s_{Alt})^2 \rangle = S_{Moy}^2 + 2S_{Moy} \langle s_{Alt} \rangle + \langle s_{Alt}^2 \rangle$$

$$\implies S_{Eff}^2 = S_{Moy}^2 + S_{Alt\ Eff}^2$$

Et si $S_{Alt\ Eff}^2 \ll S_{Moy}^2$ alors $S_{Eff} \approx |S_{Moy}|$ (cas d'un signal quasi-continu).

- **Inégalités entre valeurs moyenne, efficace et maximale**

On a : $|S_{Moy}| \leq S_{Eff} \leq |S_{Max}|$

II Compléments

- **Facteurs de crête, de forme, d'ondulation et d'ondulation crête à crête** (Fig. 11.1)

Ils caractérisent le signal.

Facteur de crête	$F_C = \frac{ s(t) _{Max}}{S_{Eff}}$	
Facteur de forme	$F = \frac{S_{Eff}}{ S_{Moy} }$	$F^2 = 1 + \beta^2$
Facteur ou taux d'ondulation	$\beta = \frac{S_{Alt\ Eff}}{ S_{Moy} }$	
Facteur d'ondulation crête à crête	$\beta_{CC} = \frac{\Delta S}{ S_{Moy} }$	Ondulation crête à crête : $\Delta S = S_{Max} - S_{Min} = S_{Alt\ Max} - S_{Alt\ Min}$

Figure 11.1 Facteurs de crête, de forme et d'ondulation

Remarque : Si le signal est continu, $F = 1$, $\beta = 0$ et $\beta_{CC} = 0$. En conséquence, plus F se rapproche de 1 (ou β de 0) et plus le signal se rapproche d'un signal continu.

• **Dipôles linéaires élémentaires** (Fig. 11.2)

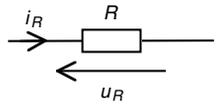
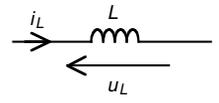
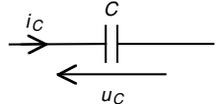
		Relations remarquables en régime périodique
Résistance		$\forall t, u_R(t + kT) = u_R(t)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $\forall t, i_R(t + kT) = i_R(t)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $U_{R\text{Moy}} = RI_{R\text{Moy}}, U_{\text{Eff}} = RI_{\text{Eff}}$ $P_{R\text{Moy}} = RI_{R\text{Eff}}^2 = U_{R\text{Eff}}^2/R, W_{R(t \rightarrow t+kT)} = P_{R\text{Moy}}kT$
Inductance		$\forall t, i_L(t + kT) = i_L(t)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $U_{L\text{Moy}} = 0$ $P_{L\text{Moy}} = 0, W_{L(t \rightarrow t+kT)} = 0$
Capacité		$\forall t, u_C(t + kT) = u_C(t)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ $I_{C\text{Moy}} = 0$ $P_{C\text{Moy}} = 0, W_{C(t \rightarrow t+kT)} = 0$

Figure 11.2 Dipôles linéaires élémentaires

III Méthodes

- L'intervalle de temps pris pour le calcul de la valeur moyenne ou efficace doit être un nombre entier de périodes : $[t_1, t_1 + kT]$ avec le plus souvent $k = 1$. Cependant, des raisons de symétrie peuvent amener à diviser cet intervalle par 2 ou davantage. Un choix judicieux de t_1 permet souvent de simplifier le calcul.
- Pour un calcul approché de la valeur moyenne ou pour des signaux simples (rectangulaires, triangles, etc.), on peut remplacer le calcul de l'intégrale par une somme algébrique d'aires comprises entre la courbe et l'axe des temps ; une aire étant comptée positivement si la courbe est au-dessus de l'axe et négativement si elle est en-dessous (Exemple : voir exercice ci-après).
- De même, pour calculer la valeur efficace dans des cas simples, on peut remplacer le calcul de l'intégrale du carré du signal par une somme algébrique d'aires.

IV Mesures

• **Valeur moyenne**

La valeur moyenne d'une tension (resp. d'un courant) se mesure avec un voltmètre (resp. ampèremètre) du type « D.C. : *Direct Current* » qui signifie « en courant continu ».

© Dunod – La photocopie non autorisée est un délit.

• Valeur efficace

La valeur efficace d'une tension (resp. d'un courant) se mesure avec un voltmètre (resp. ampèremètre) du type « A.C. : *Alternative Current* » qui signifie « en courant alternatif ».

- Certains appareils mesurent la valeur efficace uniquement pour une tension ou un courant sinusoïdaux.
- D'autres appareils mesurent la valeur efficace de la seule composante alternative de la tension ou du courant. On les dénomme souvent un peu abusivement voltmètres ou ampèremètres « r.m.s. : *root mean square* ».
- Enfin des appareils mesurent effectivement la valeur efficace de la tension ou du courant. On les dénomme souvent voltmètres ou ampèremètres « efficaces vrais » ou « t.r.m.s. : *true r.m.s.* » pour les distinguer des précédents.

Avant toute mesure, il faut donc bien lire les notices des appareils utilisés.

Dans le cas d'appareils qui mesurent la valeur efficace de la seule composante alternative, par exemple d'une tension, on effectue la mesure en deux temps :

- mesure de la valeur de la composante continue $U_{DC} = U_{Moy}$ avec un appareil du type « D.C. »,
- mesure de la valeur efficace de la composante alternative $U_{AC\text{ Eff}} = U_{Alt\text{ Eff}}$ avec un appareil du type « A.C. ».

On calcule ensuite la valeur efficace par la relation (voir le paragraphe « À savoir ») :

$$U_{\text{Eff}} = \sqrt{U_{DC}^2 + U_{AC\text{ Eff}}^2} \quad \text{car } u(t) = U_{DC} + u_{AC}(t)$$

Remarque : La plupart des appareils utilisés sont des multimètres capables de mesurer différentes grandeurs : tension DC/AC, intensité DC/AC, résistance, fréquence, etc. Les caractéristiques et limites de l'appareil doivent être connues : précision en fonction du calibre, impédance (selon la fonction : voltmètre, ampèremètre, etc.), bande passante (une bande passante limitée par rapport au spectre du signal fausse la mesure de la valeur efficace), facteur de crête, etc.

Grandeurs périodiques

Soient les chronogrammes de grandeurs périodiques (Fig. 11.3). Pour chacune de ces grandeurs :

1. Calculer sa valeur moyenne.
2. Calculer sa valeur efficace.
3. En déduire la valeur efficace de son ondulation (composante alternative).
4. Déterminer son ondulation crête à crête.
5. Calculer son facteur de forme, son taux d'ondulation et son facteur d'ondulation crête à crête.

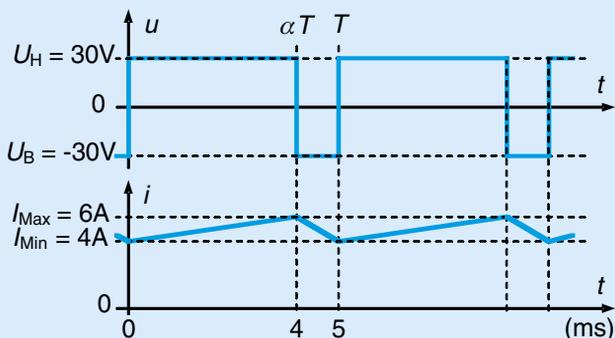


Figure 11.3 Grandeurs périodiques – Chronogrammes

Solution

1. Valeurs moyennes. A partir du graphique, on somme algébriquement les aires :

$$\begin{aligned}
 U_{\text{Moy}} = \langle u \rangle &= \frac{1}{T}(\alpha T U_H + (1 - \alpha) T U_B) = \alpha U_H + (1 - \alpha) U_B \\
 &= \frac{4}{5} \times 30 - \frac{1}{5} \times 30 = 18 \text{ V}
 \end{aligned}$$

$$I_{\text{Moy}} = \langle i \rangle = \frac{I_{\text{Max}} + I_{\text{Min}}}{2} = 5 \text{ A}$$

2. Valeurs efficaces. La grandeur u^2 étant constante, on a :

$$U_{\text{Eff}}^2 = \langle u^2 \rangle = U_H^2 \implies U_{\text{Eff}} = U_H = 30 \text{ V}$$

Equations du courant i :

$$i = 500t + 4 \text{ pour } 0 \leq t \leq 4 \text{ ms et } i = -2000t + 14 \text{ pour } 4 \text{ ms} \leq t \leq 5 \text{ ms}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
 I_{\text{Eff}}^2 = \langle i^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \\
 &= \frac{1}{5 \text{ ms}} \int_0^{4 \text{ ms}} (500t + 4)^2 dt + \frac{1}{5 \text{ ms}} \int_{4 \text{ ms}}^{5 \text{ ms}} (-2000t + 14)^2 dt
 \end{aligned}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$I_{\text{Eff}} \approx 5,03 \text{ A}$$

3. Valeurs efficaces des ondulations.

$$U_{\text{Alt Eff}} = \sqrt{U_{\text{Eff}}^2 - U_{\text{Moy}}^2} = 24 \text{ V} \quad \text{et} \quad I_{\text{Alt Eff}} = \sqrt{I_{\text{Eff}}^2 - I_{\text{Moy}}^2} \approx 0,58 \text{ A}$$

4. Ondulations crête à crête.

$$\Delta U = U_H - U_B = 60 \text{ V} \quad \text{et} \quad \Delta I = I_{\text{Max}} - I_{\text{Min}} = 2 \text{ A}$$

5. Facteurs de forme, taux d'ondulation et facteurs d'ondulation crête à crête.

$$F_U = \frac{U_{\text{Eff}}}{|U_{\text{Moy}}|} \approx 1,67 \quad \beta_U = \frac{U_{\text{Alt Eff}}}{|U_{\text{Moy}}|} \approx 1,33 \quad \beta_{\text{CC,U}} = \frac{\Delta U}{|U_{\text{Moy}}|} \approx 3,33$$

$$F_I = \frac{I_{\text{Eff}}}{|I_{\text{Moy}}|} \approx 1,007 \quad \beta_I = \frac{I_{\text{Alt Eff}}}{|I_{\text{Moy}}|} \approx 0,12 \quad \beta_{\text{CC,I}} = \frac{\Delta I}{|I_{\text{Moy}}|} \approx 0,4$$

Pont de Graetz monophasé Dimensionnement d'une inductance de lissage

Soit le schéma (Fig. 11.4). La tension d'entrée s'écrit : $u_E = U_{E\text{Max}} \cos \theta$ où $\theta = \omega_1 t$, $U_{E\text{Max}} = 24\sqrt{2} \text{ V}$, $\omega_1 = 2\pi f_1$ et $f_1 = 50 \text{ Hz}$. Les diodes sont supposées parfaites et $R = 10 \Omega$. La tension $u_S(\theta)$ est représentée (Fig.11.5).

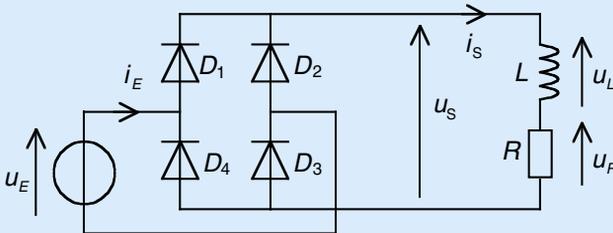
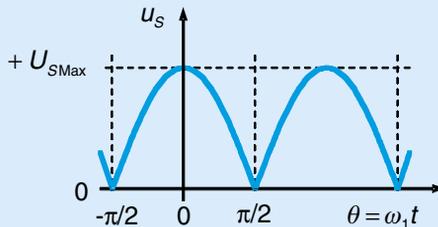


Figure 11.4 Redressement double alternance en pont



D_1, D_3	conductrices	bloquées
D_2, D_4	bloquées	conductrices

Figure 11.5 Redressement double alternance – Tension u_S

1. Exprimer et calculer la valeur moyenne de la tension u_S .
2. Exprimer et calculer la valeur efficace de la tension u_S .
3. Exprimer et calculer les facteurs de forme F , d'ondulation β , d'ondulation crête à crête β_{CC} et de crête F_C de la tension u_S .
4. Exprimer et calculer la valeur moyenne de la tension u_R .
5. Exprimer et calculer la valeur moyenne du courant i_S .

En première approximation on admet que la tension u_S s'écrit (début du développement en série de Fourier de u_S) :

$$u_S = U_{S0} + u_{S1} \text{ avec } U_{S0} = \frac{2U_{S\text{Max}}}{\pi} \text{ et } u_{S1} = \frac{4U_{S\text{Max}}}{3\pi} \cos(2\theta)$$

Cela permet d'écrire que le courant i_S est la somme $i_S = I_{S0} + i_{S1}$ conformément au principe de linéarité (Fig. 11.6).

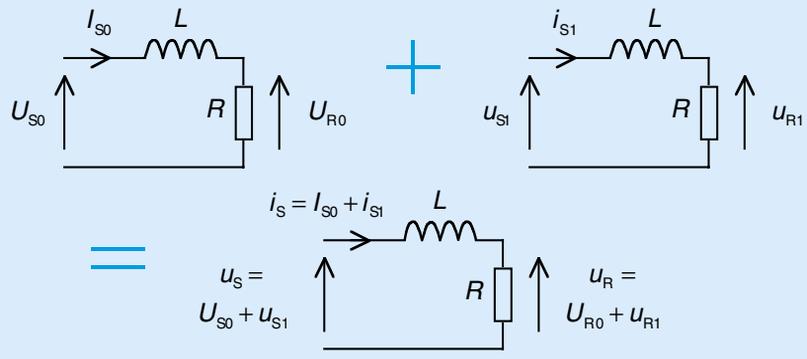


Figure 11.6 Principe de linéarité

Dans ces conditions :

6. Pour la composante continue : Simplifier le schéma équivalent. Que représente I_{S0} ? Montrer qu'on retrouve le calcul précédent.
7. Pour la composante alternative : Quelle est la pulsation de u_{S1} ? Exprimer I_{S1} en fonction de U_{S1} . En déduire l'expression du courant i_{S1} .
8. En déduire l'expression du courant i_S .
9. Exprimer le taux d'ondulation $\beta_I = I_{S\text{AltEff}}/I_{S\text{Moy}}$ où $I_{S\text{AltEff}}$ est la valeur efficace de la composante alternative de i_S . Que devient l'expression du taux d'ondulation si $R^2 \ll (2L\omega_1)^2$? En déduire une formule pour choisir l'inductance de lissage. Calculer L pour un taux d'ondulation d'environ 5 %.
10. En déduire les expressions des courants i_S et i_{S1} en fonction du taux d'ondulation β_I .

Solution

1. Valeur moyenne de la tension u_S . On travaille avec la variable $\theta = \omega_1 t$ sur une période $[-\pi/2; \pi/2]$:

$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_{S \text{ Max}} \cos \theta d\theta = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\pi} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

D'où :
$$U_{S \text{ Moy}} = \frac{2U_{S \text{ Max}}}{\pi} \implies U_{S \text{ Moy}} = \frac{2 \times 24 \times \sqrt{2}}{\pi} \approx 21,6 \text{ V}$$

2. Valeur efficace de la tension u_S .

$$\begin{aligned} U_{S \text{ Eff}}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_{S \text{ Max}}^2 \cos^2 \theta d\theta = \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{U_{S \text{ Max}}^2}{2\pi} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \end{aligned}$$

D'où :
$$U_{S \text{ Eff}} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{\sqrt{2}} \implies U_{S \text{ Eff}} = \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 24 \text{ V}$$

Remarque : Les fonctions $|\cos \theta|$ et $\cos \theta$ ont même valeur efficace.

3. Facteurs de forme F , d'ondulation β , d'ondulation crête à crête β_{CC} et de crête F_C de la tension u_S .

$$F = \frac{U_{S \text{ Eff}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11 \implies \beta = \sqrt{F^2 - 1} = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 48,3 \%$$

$$\beta_{CC} = \frac{U_{S \text{ Max}}}{|U_{S \text{ Moy}}|} = \frac{\pi}{2} \approx 1,57 \quad \text{et} \quad F_C = \frac{U_{S \text{ Max}}}{U_{S \text{ Eff}}} = \sqrt{2} \approx 1,41$$

4. Valeur moyenne de la tension u_R . La loi des mailles permet d'écrire :

$$u_S = u_L + u_R \implies U_{S \text{ Moy}} = U_{L \text{ Moy}} + U_{R \text{ Moy}} \quad (\text{linéarité de l'intégrale})$$

Or, en régime périodique :

$$i_L(t + kT) = i_L(t) \implies U_{L \text{ Moy}} = 0$$

D'où :
$$U_{R \text{ Moy}} = U_{S \text{ Moy}} = 2U_{S \text{ Max}}/\pi \approx 21,6 \text{ V}$$

5. Valeur moyenne du courant i_S . La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$i_S = \frac{u_R}{R} = \frac{u_S - u_L}{R} \implies I_{S \text{ Moy}} = \frac{U_{R \text{ Moy}}}{R} = \frac{U_{S \text{ Moy}}}{R}$$

D'où :
$$I_{S Moy} = \frac{2U_{S Max}}{\pi R} \approx 2,16 \text{ A}$$

6. Courant I_{S0} . L'inductance se comporte comme un court-circuit pour le continu, d'où :

$$I_{S0} = \frac{U_{S0}}{R} = \frac{2U_{S Max}}{\pi R} \approx 2,16 \text{ A} \quad (I_{S0} \text{ est la composante continue de } i_s)$$

7. I_{S1} en fonction de U_{S1} et expression du courant i_{S1} . La tension u_{S1} étant sinusoïdale de pulsation $2\omega_1$, on peut écrire en notation complexe :

$$\underline{I_{S1}} = \frac{\underline{U_{S1}}}{R + 2jL\omega_1} = \frac{\underline{U_{S1}}}{\sqrt{R^2 + (2L\omega_1)^2}} e^{j\phi} \text{ avec } \phi = -\arctan \frac{2L\omega_1}{R}$$

D'où :
$$i_{S1} = \frac{4U_{S Max}}{3\pi\sqrt{R^2 + (2L\omega_1)^2}} \cos(2\theta + \phi)$$

8. Expression du courant i_s . On a $i_s = I_{S0} + i_{S1}$, d'où :

$$i_s = \frac{2U_{S Max}}{\pi R} \left(1 + \frac{2R}{3\sqrt{R^2 + (2L\omega_1)^2}} \cos(2\theta + \phi) \right)$$

9. Taux d'ondulation et choix de L . Par définition, on a :

$$\beta_1 = \frac{I_{S Alt Eff}}{I_{S Moy}} = \frac{I_{S Alt Max}}{I_{S Moy}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}R}{3\sqrt{R^2 + (2L\omega_1)^2}}$$

Si $R^2 \ll (2L\omega_1)^2$ alors $\beta_1 \approx \frac{R}{3\sqrt{2} \times L\omega_1} \approx \frac{R}{26 \times Lf_1}$

D'où : $L \approx \frac{R}{26 \times \beta_1 f_1} \implies L \approx 150 \text{ mH}$ pour $\beta_1 = 5 \%$

10. Expressions des courants i_s et i_{S1} en fonction du taux d'ondulation.

$$i_s = \frac{2U_{S Max}}{\pi R} \left(1 + \beta_1 \sqrt{2} \cos(2\theta + \phi) \right) = I_{S0} + i_{S1}$$

Avec :
$$I_{S0} = \frac{2U_{S Max}}{\pi R} \text{ et } i_{S1} = \frac{2U_{S Max}\beta_1\sqrt{2}}{\pi R} \cos(2\theta + \phi)$$

Les exercices proposés sur les fiches suivantes peuvent également servir d'entraînement pour les points traités ici.

Séries de Fourier – Analyse spectrale

La théorie des séries de Fourier et l'analyse spectrale qui en résulte sont utilisables lorsque le circuit électrique, linéaire ou pas, fonctionne en régime périodique (voir fiche 11). Les développements en séries de Fourier renseignent sur les allures temporelles et les spectres des tensions, courants et puissances.

Deux cas particuliers sont fréquemment rencontrés :

- Le circuit électrique est linéaire. Le principe de linéarité permet d'étudier le circuit pour chacune des composantes sinusoïdales pour, au final, en déduire la grandeur recherchée (voir le paragraphe « Méthodes »).
- La charge est non-linéaire et alimentée à partir du réseau électrique. On peut alors souvent considérer la tension comme sinusoïdale (voir notamment fiches 14 et 19).

Objectifs : Utiliser le développement en série de Fourier d'un signal réel (tension ou courant en électricité), le régime étant périodique (permanent). Interpréter les représentations d'un signal réel sous différentes formes : temporelle, spectrale et mathématique. Le calcul des coefficients de Fourier et leurs relations sont traités dans la fiche suivante.

I À savoir

• Théorème fondamental

Un signal périodique s de période T , **fonction à valeurs réelles** du temps satisfaisant les conditions dites de Dirichlet, est développable en une série de Fourier trigonométrique ou complexe. En particulier, en tout point t où s est continu, $s(t)$ peut s'écrire :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

$$\text{avec } \begin{cases} a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R} \\ A_n \in \mathbb{R}^+, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ c_n \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Cela signifie qu'un signal périodique $s(t)$ développable en série de Fourier est la somme :

- d'une **composante « continue »** (valeur constante) égale à sa valeur moyenne : $S_0 = a_0$, et
- d'une infinité de **composantes sinusoïdales**, appelées « **harmoniques** », de fréquences $1/T, 2/T, \dots, n/T, \dots$: $s_n(t) = A_n \cos(n\omega t + \alpha_n)$ où A_n est l'amplitude et α_n la phase initiale.

La composante de rang n : $s_n(t)$ est appelée « **harmonique de rang n** ». La composante de même fréquence $f = 1/T$ que le signal est appelée « **fondamental** » de préférence à « harmonique 1 ». L'harmonique 2 a une fréquence deux fois plus grande, et l'harmonique n (de rang n) est une composante sinusoïdale de fréquence n fois plus élevée que celle du signal.

$$\omega = 2\pi f$$

Unités : $1 \text{ rad/s} = 1 \text{ rad} \times 1 \text{ Hz}$

$$f = \frac{1}{T}$$

Unités : $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$

Remarques :

- Les fréquences négatives : $-1/T, -2/T, \dots, -n/T, \dots$ apparaissent en plus dans l'écriture en exponentielle complexe.
- Les conditions de Dirichlet, non détaillées ici, portent sur la continuité et la dérivation du signal (fonction réelle) et de sa dérivée. En pratique, ces conditions sont satisfaites pour les signaux rencontrés en électricité.

• Changement de variable

Pour simplifier les expressions, on effectue souvent le changement de variable :

$$\theta = \omega t \implies \omega T = 2\pi \quad \text{et} \quad d\theta = \omega dt$$

• Représentations graphiques d'un signal périodique – spectres

On illustre le propos avec l'exemple d'une tension rectangulaire $u(t)$ de période $T = 1 \text{ ms}$, de rapport cyclique $\gamma = 1/5$, de niveaux 0 et 5 V (Fig. 12.1).

1) *Représentation temporelle*. Le **chronogramme**, ou diagramme temporel, renseigne sur la valeur instantanée du signal (exemple : voir Fig. 12.1).

Le chronogramme d'un signal périodique, de période T , est constitué d'une suite de motifs identiques de durée T .

2) *Représentations fréquentielles*. Le spectre d'amplitude et le spectre de phase renseignent sur la répartition du signal en fonction de la fréquence.

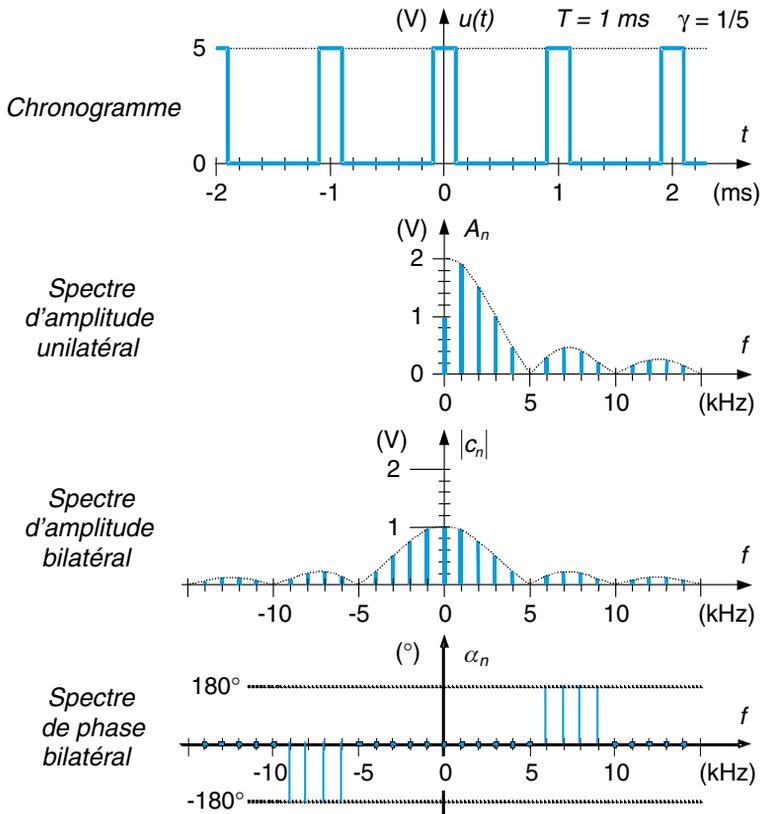


Figure 12.1 Tension rectangulaire de niveaux 0 et 5 V, de rapport cyclique $\gamma = 1/5$ et son spectre de raies

Le spectre d'amplitude et le spectre de phase d'un signal périodique, de période T , sont constitués de raies aux fréquences multiples de $1/T$.

Spectre d'amplitude unilatéral

Le spectre d'amplitude unilatéral d'un signal réel périodique est la représentation graphique des raies d'amplitudes A_0 de la composante continue (valeur moyenne), et A_n des composantes sinusoïdales aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{N}^*$ (exemple : voir Fig. 12.1).

$$A_0 = |a_0| = |c_0| \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2 \times |c_n| \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Remarque : Attention, à la place du spectre d'amplitude, on rencontre aussi le spectre des valeurs efficaces, toutes les raies étant divisées par $\sqrt{2}$ à l'exception de celle de la composante continue. On représente alors :

$$A_0 = |a_0| = |c_0| \quad A_{n \text{ Eff}} = A_n/\sqrt{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Spectre d'amplitude bilatéral

Le spectre d'amplitude bilatéral d'un signal réel périodique est la représentation graphique des raies d'amplitudes $|c_n|$ aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{Z}$ (exemple : voir Fig. 12.1).

$$|c_0| = A_0 = |a_0| \quad |c_n| = |c_{-n}| = \frac{A_n}{2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Attention, le spectre d'amplitude bilatéral d'un signal réel étant pair, on se contente souvent de représenter la partie relative aux fréquences positives. Il ne faut pas alors le confondre avec le spectre d'amplitude unilatéral.

Spectre de phase

La représentation fréquentielle du signal serait incomplète si les phases initiales de ses composantes n'étaient pas précisées : c'est le rôle de ce diagramme. Le spectre de phase d'un signal réel périodique est la représentation graphique des raies des phases initiales α_n des composantes sinusoïdales aux fréquences nf avec $n \in \mathbb{N}^*$ pour un spectre unilatéral ou $n \in \mathbb{Z}$ pour un spectre bilatéral (exemple : voir Fig. 12.1).

$$\alpha_n = -\alpha_{-n} = \arg(c_n) = -\arg(c_{-n}) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \cos \alpha_n = a_n/A_n \\ \sin \alpha_n = -b_n/A_n \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

• Valeur efficace

Pour un signal $s(t)$ développable en série de Fourier, la formule de Bessel-Parseval donne le carré de la valeur efficace du signal (voir aussi fiche 11) :

$$S_{\text{Eff}}^2 = \langle s^2(t) \rangle = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Ainsi, le carré de la valeur efficace du signal $s(t)$ est la somme du carré de sa valeur moyenne et des carrés des valeurs efficaces de tous ses harmoniques. Ce qui s'écrit :

$$\boxed{S_{\text{Eff}}^2 = A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2} \quad \text{où} \quad A_0 = |a_0| \quad \text{et} \quad A_n \text{ Eff} = \frac{A_n}{\sqrt{2}}$$

II Compléments

- **Facteurs de forme et d'ondulation** (voir aussi fiche 11)

On note : $A_0 = |a_0|$

Facteur de forme	Facteur ou taux d'ondulation	Relation
$F = \frac{S_{\text{Eff}}}{ S_{\text{Moy}} } = \frac{\sqrt{A_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_0}$	$\beta = \frac{S_{\text{Alt Eff}}}{ S_{\text{Moy}} } = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_0}$	$F^2 = 1 + \beta^2$

- **Taux de distorsion harmonique**

Noté *THD* (total harmonic distortion), il sert à chiffrer la déformation d'un signal qui devrait être sinusoïdal. Compris entre 0 et l'infini, c'est le rapport de la valeur efficace du signal privé de sa composante continue (valeur moyenne) et de son fondamental sur la valeur efficace du fondamental.

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_1 \text{ Eff}} = \frac{\sqrt{A_2^2 \text{ Eff} + A_3^2 \text{ Eff} + \dots + A_n^2 \text{ Eff} + \dots}}{A_1 \text{ Eff}}$$

Ainsi défini, si le signal est sinusoïdal, le *THD* est nul. On définit aussi le taux de distorsion de l'harmonique n par :

$$d_n = \frac{A_n \text{ Eff}}{A_1 \text{ Eff}} \longrightarrow THD = \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} d_n^2}$$

- **Remarques sur les représentations fréquentielles**

– Le signal temporel étant une fonction réelle, le signal fréquentiel correspondant possède une partie réelle et un module pairs, une partie imaginaire et une phase impaires. On a alors :

$$c_{-n} = \overline{c_n} \iff \begin{cases} |c_{-n}| = |c_n| \\ \arg(c_{-n}) = -\arg(c_n) \end{cases}$$

– On peut aussi représenter un signal par sa partie réelle et sa partie imaginaire en fonction de la fréquence, mais cette représentation est moins facile à interpréter.

- Un signal est complètement caractérisé par son spectre d'amplitude et son spectre de phase.
- Le spectre d'amplitude est indépendant de l'origine des temps choisie contrairement au spectre de phase.

III Méthodes

• Circuit électrique linéaire excité par une grandeur périodique

Dans le cas d'un circuit électrique linéaire, si une grandeur (tension ou courant) désignée comme signal de « sortie » noté $s = s(t)$, dépend d'une seule autre grandeur (tension ou courant) désignée comme signal d'« entrée » noté $e = e(t)$, alors $s = s(t)$ et $e = e(t)$ sont reliés par une équation différentielle à coefficients constants (voir fiche 1).

Une fois le régime périodique établi pour un signal d'entrée $e(t)$ périodique défini par morceaux, le signal de sortie $s(t)$ est composé d'une succession de régimes transitoires déterminés chacun par l'équation différentielle linéaire à coefficients constants pour un morceau donné de $e(t)$.

- Une première méthode consiste bien sûr à résoudre cette équation pour chacun des morceaux de $e(t)$ en reliant les solutions les unes aux autres compte tenu du caractère périodique des signaux.
- Une deuxième méthode consiste à utiliser d'une part le principe de linéarité (voir fiche 1) et d'autre part les possibilités offertes par le calcul sur les nombres complexes en régime sinusoïdal. Cette méthode présente l'avantage de fournir en plus les spectres des signaux, mais elle nécessite souvent la prise en compte de nombreux harmoniques et, en conséquence, le recours à un calculateur.

Résumé de la méthode (Fig. 12.2). Pour un nombre d'harmoniques M suffisant à une bonne approximation des signaux :

- 1) Déterminer le développement en série de Fourier du signal d'entrée, somme de sa composante continue et de ses composantes sinusoïdales.

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^M e_n(t) \quad \text{où} \quad e_n(t) = E_{n \text{ Max}} \cos(n\omega t + \alpha_n)$$

- 2) Étudier la réponse du circuit à chacune des composantes du signal d'entrée.

$$E_0 \xrightarrow{\text{circuit}} S_0 \quad \text{et} \quad e_n(t) \xrightarrow{\text{circuit}} s_n(t) = S_{n \text{ Max}} \cos(n\omega t + \beta_n)$$

Pratiquement, on détermine la transmittance complexe $\underline{T} = T e^{j\varphi}$ entre l'entrée et la sortie, puis, pour chacune des composantes, on calcule :

$$\underline{S}_n = \underline{T} \times \underline{E}_n \iff \begin{cases} S_n = T(n\omega) \times E_n \\ \beta_n = \varphi(n\omega) + \alpha_n \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} S_n = S_{n \text{ Max}}/\sqrt{2} \\ E_n = E_{n \text{ Max}}/\sqrt{2} \end{cases}$$

où $\underline{E}_n = [E_n; \alpha_n] = E_n e^{j\alpha_n}$ est le nombre complexe associé à $e_n(t)$,

$$\underline{S}_n = [S_n; \beta_n] = S_n e^{j\beta_n} \text{ est le nombre complexe associé à } s_n(t).$$

3) Ajouter les réponses trouvées au point précédent.

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^M S_{n \text{ Max}} \cos(n\omega t + \beta_n)$$

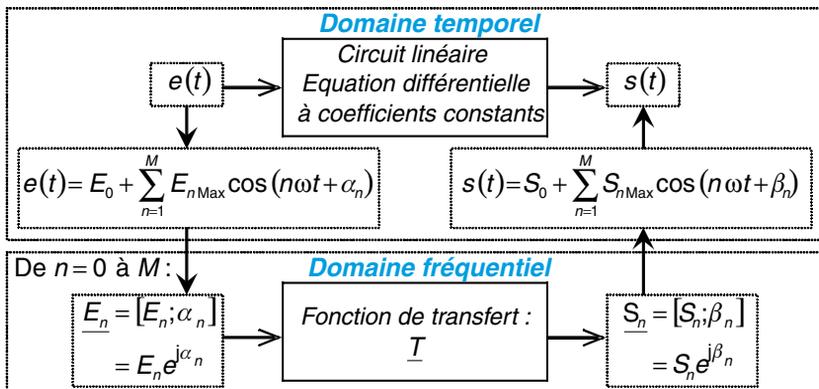


Figure 12.2 Circuit linéaire excité par un signal d'entrée périodique

Exemples

- Redressement monophasé double alternance en pont avec lissage du courant de sortie (voir fiche 11, exercice « Pont de Graetz monophasé »). On remarquera que le développement en série de Fourier a été limité au premier harmonique, ce qui est suffisant pour déterminer l'inductance de lissage.
- Filtre passe bas du 1^{er} ordre (voir exercice ci-dessous).
- Redresseur non-commandé (voir exercice ci-dessous).

IV Mesures

• Taux de distorsion harmonique

Le calcul du *THD* s'effectue simplement à partir des mesures de la valeur efficace de la composante alternative $S_{\text{Alt Eff}}$ du signal $s(t)$ et de la valeur efficace de son fondamental $A_{1 \text{ Eff}}$. En effet, à partir de la définition du *THD* (voir le paragraphe « Compléments ») on peut écrire :

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} A_n^2 \text{ Eff}}}{A_{1 \text{ Eff}}} = \frac{\sqrt{S_{\text{Eff}}^2 - A_0^2 - A_{1 \text{ Eff}}^2}}{A_{1 \text{ Eff}}} = \frac{\sqrt{S_{\text{Alt Eff}}^2 - A_{1 \text{ Eff}}^2}}{A_{1 \text{ Eff}}} = \sqrt{\frac{S_{\text{Alt Eff}}^2}{A_{1 \text{ Eff}}^2} - 1}$$

• Analyseur de spectre analogique.

Plusieurs principes sont envisageables pour sélectionner l'amplitude du signal en fonction de la fréquence.

- Une batterie de filtres passe-bande localisés dans la bande de fréquence à explorer (Fig. 12.3). Ce type d'analyseur est utilisé dans le domaine audio et quelques applications spécifiques.
- Un filtre passe-bande dont la fréquence centrale balaie la bande de fréquence à explorer (Fig. 12.4).
- Un déplacement progressif du spectre du signal devant un filtre passe-bande dont la fréquence centrale est fixe (Fig. 12.5). Plutôt que de balayer le spectre du signal par un filtre, on « passe » le spectre devant le filtre fixe. Ce type d'analyseur est utilisé pour les très hautes fréquences jusqu'à plusieurs dizaines de GHz.

Principaux réglages à opérer : fréquence centrale et étendue (span) du spectre à observer, résolution (largeur de la bande passante du filtre), atténuation d'entrée, etc.

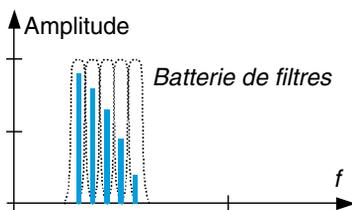


Figure 12.3 Batterie de filtres

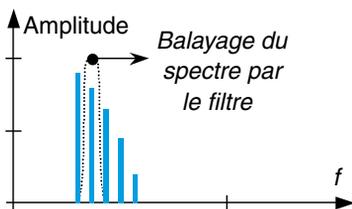


Figure 12.4 Balayage du spectre

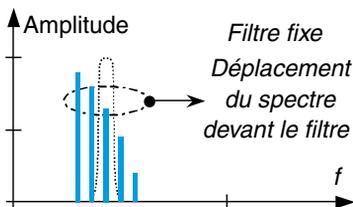


Figure 12.5 Déplacement du spectre

- **Unités**

Les analyseurs de spectres expriment les amplitudes (ou les valeurs efficaces) avec différentes unités en fonction du type de mesure, et offrent parfois le choix à l'utilisateur. Les unités les plus fréquemment rencontrées sont le volt, le dBV, le dBu et le dBm.

- Le niveau de la tension $u = u(t)$, exprimé en décibels par rapport à une tension de référence de 1 V (dBV), est défini par :

$$L_{u/1\text{V}} = 20 \lg \frac{|u_{(\text{V})}|}{1_{(\text{V})}} = 20 \lg |u_{(\text{V})}| \quad (\text{Unité : dBV})$$

- Le niveau de la tension $u = u(t)$, exprimé en décibels par rapport à une tension de référence de $\sqrt{0,6} \text{ V} \approx 0,775 \text{ V}$ (dBu), est défini par :

$$L_{u/\sqrt{0,6}\text{V}} = 20 \lg \frac{|u_{(\text{V})}|}{\sqrt{0,6}_{(\text{V})}} \approx 20 \lg \frac{|u_{(\text{V})}|}{0,775_{(\text{V})}} \quad (\text{Unité : dBu})$$

Remarque : En téléphonie, l'impédance de référence a été historiquement définie comme étant une résistance pure de 600 Ω en Europe (900 Ω aux USA), qui correspond grossièrement à l'impédance moyenne d'une ligne d'abonné dans la bande de fréquence allant de 300 Hz à 3 400 Hz. Pour une puissance de référence de 1 mW, on obtient alors une tension efficace de référence de $\sqrt{0,6} \text{ V} \approx 0,775 \text{ V}$; d'où la définition du dBu.

- Le niveau de la puissance $p = p(t)$, exprimé en décibels par rapport à une puissance de référence de 1 mW (dBm), est défini par :

$$L_{p/1\text{mW}} = 10 \lg \frac{|p_{(\text{W})}|}{10^{-3}_{(\text{W})}} = 10 \lg \frac{|p_{(\text{mW})}|}{1_{(\text{mW})}} = 10 \lg |p_{(\text{mW})}| \quad (\text{Unité : dBm})$$

Remarque : Attention, l'analyseur mesurant une tension, l'affichage en dBm sous-entend qu'il s'agit de la puissance en entrée de l'analyseur compte tenu de sa résistance d'entrée (50 Ω , 75 Ω , 600 Ω , etc.). Cela n'a de signification que pour un domaine particulier : hautes fréquences, téléphonie, etc. où l'impédance de référence est normalisée ; autrement il faut convertir (exemples Fig. 12.6).

u	$L_{u/1\mu V}$	$L_{u/1V}$	$L_{u/\sqrt{0,6}V}$	$L_{p/1\text{ mW}}$ sur $R = 50\ \Omega$	$L_{p/1\text{ mW}}$ sur $R = 600\ \Omega$
10 V	140 dB μ V	20 dBV	22,22 dBu	33,01 dBm	22,22 dBm
1 V	120 dB μ V	0 dBV	2,22 dBu	13,01 dBm	2,22 dBm
100 mV	100 dB μ V	-20 dBV	-17,78 dBu	-6,99 dBm	-17,78 dBm
10 mV	80 dB μ V	-40 dBV	-37,78 dBu	-26,99 dBm	-37,78 dBm
1 mV	60 dB μ V	-60 dBV	-57,78 dBu	-46,99 dBm	-57,78 dBm
1 μ V	0 dB μ V	-120 dBV	-117,78 dBu	-106,99 dBm	-117,78 dBm
7,071 V	136,99 dB μ V	16,99 dBV	19,21 dBu	30 dBm	19,21 dBm
2,236 V	126,99 dB μ V	6,99 dBV	9,21 dBu	20 dBm	9,21 dBm
0,707 V	116,99 dB μ V	-3,01 dBV	-0,79 dBu	10 dBm	-0,79 dBm
0,224 V	106,99 dB μ V	-13,01 dBV	-10,79 dBu	0 dBm	-10,79 dBm
7,746 V	137,78 dB μ V	17,78 dBV	20 dBu	30,79 dBm	20 dBm
2,449 V	127,78 dB μ V	7,78 dBV	10 dBu	20,79 dBm	10 dBm
0,775 V	117,79 dB μ V	-2,22 dBV	0 dBu	10,79 dBm	0 dBm
0,245 V	107,78 dB μ V	-12,22 dBV	-10 dBu	0,79 dBm	-10 dBm

Figure 12.6 Exemples de correspondances entre unités

- Relation entre dBm et dBV. Soit u la tension aux bornes d'une résistance R_0 , la puissance dissipée est $p = u^2/R_0$. D'où :

$$L_{p/1\text{ mW}} = L_{u/1V} - 10 \lg \frac{R_0}{1000} \implies L_{P_{\text{Moy}}/1\text{ mW}} = L_{U_{\text{Eff}}/1V} - 10 \lg \frac{R_0}{1000}$$

$$R_0 = 600\ \Omega \implies L_{p/1\text{ mW}} \approx L_{u/1V} + 2,22$$

$$R_0 = 50\ \Omega \implies L_{p/1\text{ mW}} \approx L_{u/1V} + 13,1$$

- Relation entre dBm et dBu. Soit u la tension aux bornes d'une résistance R_0 , la puissance dissipée est $p = u^2/R_0$. D'où :

$$L_{p/1\text{ mW}} = L_{u/\sqrt{0,6}V} - 10 \lg \frac{R_0}{600} \implies L_{P_{\text{Moy}}/1\text{ mW}} = L_{U_{\text{Eff}}/\sqrt{0,6}V} - 10 \lg \frac{R_0}{600}$$

$$R_0 = 600\ \Omega \implies L_{p/1\text{ mW}} = L_{u/\sqrt{0,6}V}$$

$$R_0 = 50\ \Omega \implies L_{p/1\text{ mW}} \approx L_{u/\sqrt{0,6}V} + 10,79$$

- Relation entre dBu et dBV.

$$L_{u/\sqrt{0,6}V} \approx L_{u/1V} + 2,22$$

- **Analyseur de spectre numérique**

Dans le domaine des basses et très basses fréquences, la plupart des analyseurs de spectre sont des oscilloscopes numériques ou systèmes d'acquisition munis d'un algorithme de calcul, la transformation de Fourier rapide, en anglais FFT (Fast Fourier Transform).

Mais attention, l'image du spectre présentée par l'analyseur FFT peut être faussée si la fréquence d'échantillonnage est incorrectement choisie. En effet, l'échantillonnage à la fréquence $f_E = 1/T_E$ d'un signal $s(t)$ « périodise » le spectre du signal échantillonné par l'analyseur. Ainsi, le spectre calculé par l'analyseur est le spectre du signal $s(t)$ (y compris les fréquences négatives) auquel s'ajoutent des répliques de ce dernier décalées de kf_E avec $k \in \mathbb{Z}$ (Cas 1 – Fig. 12.7). Bien sûr l'analyseur est conçu pour ne montrer que la partie correspondant au spectre du signal $s(t)$ d'origine (fenêtre de visualisation), à condition que la fréquence d'échantillonnage soit correctement choisie. Si la fréquence maximale f_{Max1} du signal est inférieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage $f_E/2$ alors le spectre visualisé est le bon (Cas 1 – Fig. 12.7), mais si f_{Max2} est supérieur à $f_E/2$ alors le spectre visualisé n'est plus le bon. Sur l'exemple présenté (Cas 2 – Fig. 12.7), les raies du signal (repère $0+$ pour $0f_E + f_{Min}$ à $0f_E + f_{Max}$) sont en dehors de la fenêtre de visualisation ; par contre, on y trouve la réplique (1-) sans information pertinente sur les fréquences. Pire, les spectres du signal et d'une réplique peuvent se mélanger (imaginer un cas intermédiaire entre les deux proposés) et brouiller totalement le spectre résultant.

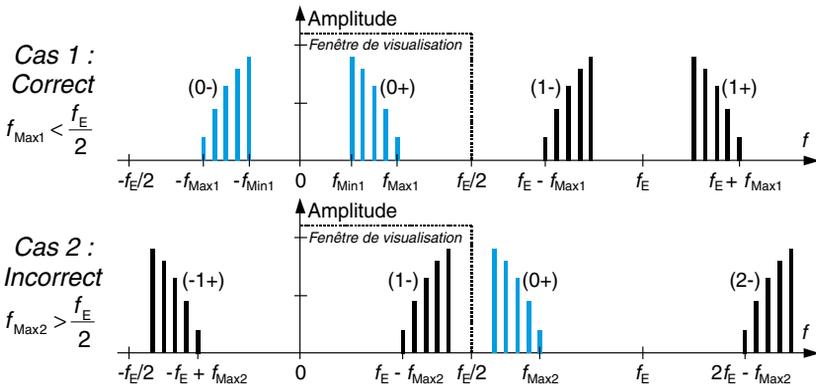


Figure 12.7 Choix de la fréquence d'échantillonnage

Pour éviter des mesures et interprétations incorrectes, il faut respecter le théorème de Shannon suivant.

Théorème de Shannon : Un signal $s(t)$ à spectre borné par f_{Max} (fréquence maximale) peut être reconstruit à partir de son signal échantillonné $s^*(t)$ avec un pas $T_E = 1/f_E$, si la fréquence d'échantillonnage est supérieure à deux fois la fréquence maximale du signal : $f_E > 2f_{\text{Max}}$

Remarque : Cette condition théorique suppose une durée infinie d'observation du signal. La durée d'observation pratique étant finie, on choisira un rapport f_E/f_{Max} sensiblement supérieur à 2 pour augmenter le nombre d'échantillons.

Paramètres essentiels :

- Nombre d'échantillons du signal (taille de l'échantillonnage) : N . Il peut être réglable afin de privilégier soit la résolution fréquentielle, soit le temps de calcul.
- Période d'échantillonnage (c'est la résolution temporelle) : $T_E = 1/f_E$. La période d'échantillonnage dépend automatiquement du calibre de la base de temps ; il faut donc surveiller l'affichage de la fréquence d'échantillonnage.
- Durée d'observation du signal échantillonné : $D = NT_E$
- Étendue du spectre calculé et affiché (Shannon) : $f_E/2$
- Résolution fréquentielle (c'est le plus petit écart de fréquence discernable) : $f_E/N = 1/D$. La résolution fréquentielle est proportionnelle à la fréquence d'échantillonnage et inversement proportionnelle aux nombres d'échantillons. Elle est égale à l'inverse de la durée d'observation.

Conclusion : Bien souvent, seul un nombre important d'échantillons permet de visualiser à la fois toute l'étendue et les détails du spectre ; mais le temps de calcul de la FFT augmente avec le nombre d'échantillons.

Remarques :

- Seule la partie du spectre relative aux fréquences positives est affichée (fenêtre de visualisation) car le spectre d'un signal réel possède une symétrie « hermitique », c'est-à-dire un module pair et une phase impaire (voir le paragraphe « Compléments »).
- Un analyseur de spectre numérique permet aussi de calculer la phase du spectre, ses parties réelle et imaginaire, le spectre de puissance du signal, etc.

Onduleur de secours d'un avion

Un onduleur de secours d'un avion permet de reconstituer un réseau alternatif 115 V/400 Hz monophasé à partir d'une batterie délivrant une tension continue U_B (principe d'un onduleur autonome en pont, Fig. 12.8).

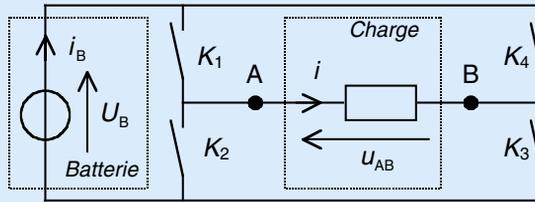


Figure 12.8 Principe d'un onduleur autonome en pont

1. Commande « pleine onde » (fonctionnement Fig. 12.9). Dans ce cas, la tension u_{AB} est rectangulaire. Son développement en série de Fourier s'écrit :

$$u_{AB} = \frac{4U_B}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)\omega t]$$

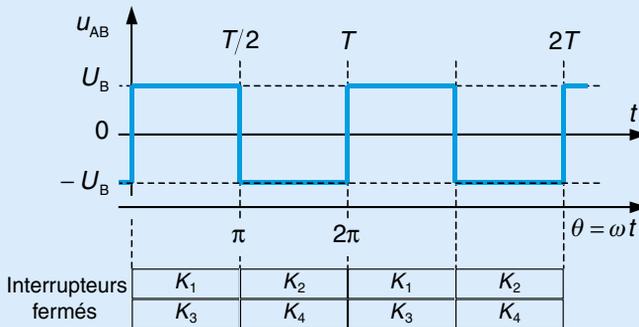


Figure 12.9 Commande « pleine onde »

- 1.1. Exprimer la valeur efficace U_{AB} de u_{AB} .
- 1.2. Donner l'expression de u_1 , fondamental de u_{AB} . En déduire l'expression de sa valeur efficace U_1 .
- 1.3. Quelle devrait être la valeur de U_B pour obtenir $U_1 = 115 \text{ V}$?
- 1.4. Exprimer et calculer le taux de distorsion harmonique (THD) de u_{AB} .

2. Commande « M.L.I. – Onde 3 niveaux » (fonctionnement Fig. 12.10). Dans ce cas, la tension u_{AB} est découpée. Son développement en série de Fourier ne comporte pas d'harmonique pair, et les harmoniques 3, 5, 7, 9 et 11 sont annulés en choisissant $\alpha_1 \approx 18^\circ$, $\alpha_2 \approx 27^\circ$, $\alpha_3 \approx 37^\circ$, $\alpha_4 \approx 53^\circ$ et $\alpha_5 \approx 57^\circ$; il s'écrit alors :

$$u_{AB} = \frac{4U_B}{\pi} \left(0,802 \times \sin(\omega t) - \frac{2,01}{13} \times \sin(13\omega t) - \frac{2,64}{15} \times \sin(15\omega t) + \dots \right)$$

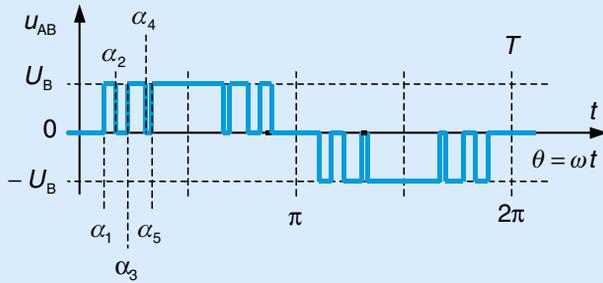


Figure 12.10 Commande « M.L.I. – Onde 3 niveaux »

- 2.1. Exprimer la valeur efficace U_{AB} de u_{AB} .
- 2.2. Donner l'expression de u_1 , fondamental de u_{AB} . En déduire l'expression de sa valeur efficace U_1 .
- 2.3. Calculer le taux de distorsion harmonique (THD) de u_{AB} . Conclure.

Solution

- 1.1. Valeur efficace. On voit sur le graphique que :

$$u_{AB} = \pm U_B \implies U_{AB} = U_B$$

- 1.2. Fondamental. Il s'écrit ($p = 0$) :

$$u_1 = \frac{4U_B}{\pi} \sin(\omega t) \implies U_1 = \frac{4U_B}{\pi\sqrt{2}} \approx 0,9 \times U_B$$

- 1.3. Valeur de U_B pour obtenir $U_1 = 115$ V.

$$U_B \approx U_1/0,9 \approx 127,8 \text{ V}$$

- 1.4. Taux de distorsion harmonique de u_{AB} .

$$THD = \frac{\sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} U_n^2}}{U_1} = \frac{\sqrt{U_{AB}^2 - \langle u_{AB} \rangle^2 - U_1^2}}{U_1} = \sqrt{\frac{U_{AB}^2}{U_1^2} - 1} \quad \text{car } \langle u_{AB} \rangle = 0$$

$$\text{D'où :} \quad THD = \sqrt{\frac{\pi^2}{8} - 1} \approx 0,483$$

2.1. Valeur efficace. À partir du graphique, on peut écrire :

$$U_{AB}^2 = U_B^2 \times \frac{90^\circ - \alpha_5 + \alpha_4 - \alpha_3 + \alpha_2 - \alpha_1}{90^\circ} \quad (\text{les } \alpha_i \text{ étant en degrés})$$

D'où :

$$U_{AB} \approx \sqrt{\frac{58}{90}} \times U_B \approx 0,803 \times U_B$$

2.2. Fondamental. Il s'écrit :

$$u_1 = \frac{4U_B}{\pi} \times 0,802 \times \sin(\omega t) \approx 1,02 \times U_B \times \sin(\omega t) \implies U_1 \approx 0,722 \times U_B$$

2.3. Taux de distorsion harmonique de u_{AB} . Conclusion.

$$THD = \sqrt{\frac{U_{AB}^2}{U_1^2} - 1} \approx \sqrt{\frac{0,803^2}{0,722^2} - 1} \approx 0,487$$

Les *THD* des commandes « onde pleine » et « M.L.I. – Onde 3 niveaux » sont quasiment égaux. Par contre, la commande « M.L.I. – Onde 3 niveaux » repousse les composantes qui distordent le fondamental sur des harmoniques de rangs plus élevés ce qui facilite (dimensionnement et coût) considérablement le filtrage de ceux-ci, l'objectif étant d'obtenir un courant quasi-sinusoïdal.

Filtre passe bas du 1^{er} ordre

Soit le filtre passif passe-bas du 1^{er} ordre (Fig. 12.11). On applique en entrée la tension rectangulaire $e(t)$ d'amplitude $E_{\text{Max}} = 5$ V, de fréquence $f_1 = 1$ kHz, de rapport cyclique $\gamma = 1/5$ (voir Fig. 12.1) ; son développement en série de Fourier s'écrit :

$$e(t) = \gamma E_{\text{Max}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n\gamma\pi} \cos(2\pi n f_1 t) \right)$$

1. Exprimer la tension $s(t)$ en sortie du circuit.
2. Tracer le spectre d'amplitude unilatéral de $s(t)$ sachant que la fréquence de coupure à -3 dB du filtre RC est $f_C = 2$ kHz.

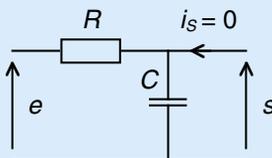


Figure 12.11 Filtre passe-bas du 1^{er} ordre

Solution

1. Tension en sortie du circuit. On est dans le cas d'un circuit électrique linéaire excité par une grandeur périodique (voir le paragraphe « Méthodes »). La fonction de transfert complexe du circuit est :

$$\underline{T} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + jf/f_C} = \frac{e^{j\phi}}{\sqrt{1 + (f/f_C)^2}} \quad \text{avec } f_C = \frac{1}{2\pi RC} \quad \text{et } \phi = -\arctan(f/f_C)$$

En régime continu, on a : $E_0 = \gamma E_{\text{Max}} \implies S_0 = E_0 = \gamma E_{\text{Max}}$

Pour l'harmonique de rang n , $e_n(t) = E_{n \text{ Max}} \cos(2\pi n f_1 t)$, d'où :

$$s_n(t) = \frac{E_{n \text{ Max}}}{\sqrt{1 + (n f_1 / f_C)^2}} \cos(2\pi n f_1 t + \phi_n) \quad \text{avec } \phi_n = -\arctan(n f_1 / f_C)$$

Et finalement :

$$s(t) = \gamma E_{\text{Max}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n\gamma\pi \sqrt{1 + (n f_1 / f_C)^2}} \cos(2\pi n f_1 t + \phi_n) \right)$$

Remarque : Le filtre passe-bas modifie l'amplitude et la phase de chaque composante sinusoïdale (fondamental et harmoniques). En conséquence, le signal $s(t)$ est déformé par rapport à $e(t)$. Il subit une distorsion d'amplitude et une distorsion de phase.

2. Spectres d'amplitude unilatéraux (Fig. 12.12). Tout calcul fait on obtient :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n de $e(t)$	1	1,87	1,51	1,01	0,47	0	0,31	0,43	0,38	0,21	0	0,17	0,25	0,23	0,13	0
A_n de $s(t)$	1	1,67	1,07	0,56	0,21	0	0,10	0,12	0,09	0,05	0	0,03	0,04	0,03	0,02	0

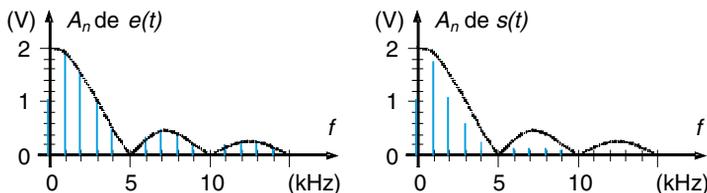


Figure 12.12 Spectres d'amplitude unilatéraux de $e(t)$ et $s(t)$

Redresseur non-commandé

Soit u la tension obtenue en sortie d'un redresseur non-commandé en conduction ininterrompue (Fig.12.13). On note p l'indice de pulsation qui dépend du type de pont et f_1 la fréquence du réseau. La tension u de fréquence pf_1 s'écrit :

$$u(\theta) = U_{\text{Max}} \cos \theta \quad \text{pour } -\pi/p \leq \theta \leq \pi/p \quad \text{avec } \theta = \omega_1 t = 2\pi f_1 t$$

Le développement en série de Fourier de la tension u s'écrit :

$$u(\theta) = U_{\text{Moy}} \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} K_n \cos(np\theta) \right) \quad \text{avec } K_n = (-1)^{n+1} \times \frac{2}{n^2 p^2 - 1}$$

La tension u est appliquée aux bornes d'un circuit composé d'une inductance L en série avec une résistance R et une fém E (Fig. 12.14).

1. Exprimer la tension moyenne U_{Moy} à partir du chronogramme de $u(t)$.
2. Pour un indice de pulsation de 2, 3 et 6, écrire le début du développement en série de Fourier. Conclure.
3. En se limitant au premier harmonique et en supposant $R \ll pL\omega_1$, exprimer le taux d'ondulation β_I du courant i .
4. Dans les conditions précédentes et pour un indice de pulsation de 2, 3 et 6, calculer L sachant que $R = 1,5 \, \Omega$, $I_{\text{Moy}} = 20 \, \text{A}$, $U_{\text{Moy}} = 200 \, \text{V}$, $f_1 = 50 \, \text{Hz}$, et que l'on veut une ondulation crête à crête du courant d'environ $\Delta I \approx 2 \, \text{A}$. Conclure.

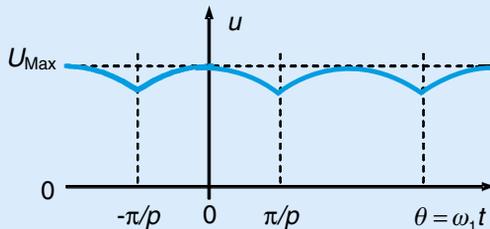


Figure 12.13 Tension en sortie d'un pont non-commandé en conduction ininterrompue

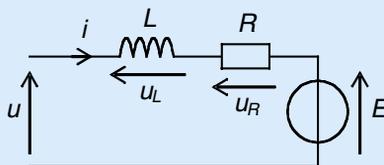


Figure 12.14 Charge R , L et E

Solution

1. Tension moyenne.

$$U_{\text{Moy}} = \langle u \rangle = \frac{p}{2\pi} \int_{-\pi/p}^{\pi/p} U_{\text{Max}} \cos \theta = \frac{pU_{\text{Max}}}{2\pi} [\sin \theta]_{-\pi/p}^{\pi/p} = \frac{p}{\pi} U_{\text{Max}} \sin \frac{\pi}{p}$$

2. Indice de pulsation de 2, 3 et 6. On remarque que plus l'indice de pulsation est élevé, moins il y a d'harmoniques, et plus le signal se rapproche du continu.

p	pf_1 (Hz)	Type	$u(\theta)/U_{\text{Moy}}$
2	100	P2, PD2	$\frac{u(\theta)}{U_{\text{Moy}}} = 1 + \frac{2}{3}\cos(2\theta) - \frac{2}{15}\cos(4\theta) + \frac{2}{35}\cos(6\theta) - \dots$
3	150	P3	$\frac{u(\theta)}{U_{\text{Moy}}} = 1 + \frac{2}{8}\cos(3\theta) - \frac{2}{35}\cos(6\theta) + \frac{2}{80}\cos(9\theta) - \dots$
6	300	P6, PD3, S3	$\frac{u(\theta)}{U_{\text{Moy}}} = 1 + \frac{2}{35}\cos(6\theta) - \frac{2}{143}\cos(12\theta) + \frac{2}{323}\cos(18\theta) - \dots$

3. Taux d'ondulation. En se limitant au premier harmonique ($n = 1$), la tension u s'écrit :

$$u(\theta) \approx U_{\text{Moy}}(1 + K_1 \cos(p\theta)) \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{2}{p^2 - 1}$$

Le principe de linéarité permet de traiter séparément le régime continu d'une part et le régime alternatif (sinusoïdal) d'autre part, le courant résultant i étant la somme $i = I_{\text{Moy}} + i_1$ (Fig. 12.15).

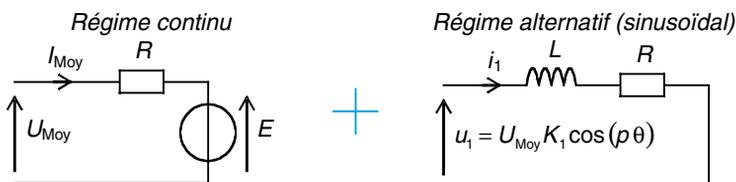


Figure 12.15 Principe de linéarité

– Régime continu : $I_{\text{Moy}} = (U_{\text{Moy}} - E)/R$

– Régime sinusoïdal : $I_1 = U_1/Z$ avec $Z = \sqrt{R^2 + (pL\omega_1)^2}$ et $U_1 = K_1 U_{\text{Moy}}/\sqrt{2}$

D'où le taux d'ondulation :

$$\beta_I \approx \frac{I_1}{I_{\text{Moy}}} = \frac{K_1}{\sqrt{2}} \times \frac{U_{\text{Moy}}}{ZI_{\text{Moy}}} = \frac{\sqrt{2}}{p^2 - 1} \times \frac{U_{\text{Moy}}}{ZI_{\text{Moy}}}$$

Si $R^2 \ll (pL\omega_1)^2$ alors $Z \approx pL\omega_1$ et par suite :

$$\beta_I \approx \frac{\sqrt{2}}{(p^2 - 1)p} \times \frac{U_{\text{Moy}}}{L\omega_1 I_{\text{Moy}}}$$

4. Inductance. Elle se déduit de l'expression de β_I :

$$L \approx \frac{\sqrt{2}}{(p^2 - 1)p} \times \frac{U_{\text{Moy}}}{\beta_I \omega_1 I_{\text{Moy}}} = \frac{1}{\pi \sqrt{2}(p^2 - 1)p} \times \frac{U_{\text{Moy}}}{\beta_I f_1 I_{\text{Moy}}}$$

Application numérique. L'ondulation crête à crête du courant $\Delta I \approx 2 \text{ A}$ correspond au taux d'ondulation :

$$\beta_I \approx \frac{I_1}{I_{\text{Moy}}} = \frac{I_{1 \text{ Max}}}{\sqrt{2} \times I_{\text{Moy}}} = \frac{\Delta I}{2\sqrt{2} \times I_{\text{Moy}}} \approx 3,5 \%$$

D'où :

p	2	3	6
L (mH)	212	53	6,1

On remarque que plus l'indice de pulsation est élevé et plus l'inductance nécessaire au lissage est petite.

Calcul des coefficients de Fourier

Objectifs : Calculer les coefficients du développement en série de Fourier trigonométrique ou complexe d'un signal réel (tension ou courant en électricité), le régime étant périodique (permanent), et passer d'une écriture à une autre.

I À savoir

- **Coefficients du développement en série de Fourier, dits « coefficients de Fourier »**

Ils sont donnés par les formules (indépendantes de t_1 et θ_1) :

$$\begin{aligned}
 a_0 = c_0 &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} s(\theta) d\theta & b_0 &= 0 \\
 a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} s(\theta) \cos(n\theta) d\theta & (n \in \mathbb{N}^*) \\
 b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} s(\theta) \sin(n\theta) d\theta & (n \in \mathbb{N}^*) \\
 c_n &= \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} s(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_1+2\pi} s(\theta) e^{-jn\theta} d\theta & (n \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Avec : $\boxed{\theta = \omega t} \implies \boxed{\omega T = 2\pi}$ et $d\theta = \omega dt$

- **Limites des coefficients de Fourier**

Les coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque le rang n tend vers l'infini. En conséquence, on peut approcher un signal (en dehors des points de discontinuité) par une somme finie de termes du développement en série de Fourier.

Remarque : Les coefficients de Fourier de certains signaux ne tendent pas vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Par exemple, les coefficients d'un « peigne de Dirac » sont tous égaux à une même constante. De tels signaux ne sont pas des fonctions au sens usuel mais des distributions qui sortent du cadre de cet ouvrage.

On obtient un « peigne de Dirac » à partir de la tension rectangulaire $u(t)$ (voir Fig. 13.4 dans l'exercice ci-après) en faisant tendre le rapport cyclique vers zéro et l'amplitude vers l'infini tout en gardant l'aire de l'impulsion constante.

II Méthodes

• Passage d'une écriture du développement en série de Fourier à une autre

Il s'effectue à partir des relations qui existent entre les différents coefficients de Fourier (Fig. 13.1). Ces relations ne sont pas à retenir mais à établir au cas par cas, si elles ne sont pas données, car des variantes de ces écritures sont aussi utilisées. Pour établir ces relations, il suffit d'écrire l'égalité des écritures pour l'harmonique de rang n , et se souvenir des formules d'Euler et de Moivre.

$$\boxed{e^{jx} = \cos x + j \sin x} \quad , \quad \boxed{\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}} \quad , \quad \boxed{\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}}$$

$(a_n, b_n) \longrightarrow (A_n, \alpha_n)$	$(a_n, b_n) \longrightarrow (c_n, c_{-n})$	$(c_n, c_{-n}) \longrightarrow (A_n, \alpha_n)$
$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $\cos \alpha_n = a_n / A_n$ $\sin \alpha_n = -b_n / A_n$	$c_n = \frac{a_n - j b_n}{2}$ $c_{-n} = \overline{c_n}$	$A_n = 2 c_n = 2\sqrt{c_n c_{-n}}$ $\alpha_n = \arg(c_n) = -\arg(c_{-n})$
$(A_n, \alpha_n) \longrightarrow (a_n, b_n)$	$(c_n, c_{-n}) \longrightarrow (a_n, b_n)$	$(A_n, \alpha_n) \longrightarrow (c_n, c_{-n})$
$a_n = A_n \cos \alpha_n$ $b_n = -A_n \sin \alpha_n$	$a_n = c_n + c_{-n}$ $b_n = j(c_n - c_{-n})$	$2c_n = A_n e^{j\alpha_n}$ $2c_{-n} = A_n e^{-j\alpha_n}$

Figure 13.1 Relations entre les coefficients de Fourier

Exemple : Voir exercice ci-après.

- **Choix de l'intervalle**

Le calcul des coefficients est indépendant de l'intervalle $[t_1, t_1 + T]$ ou $[\theta_1, \theta_1 + 2\pi]$ choisi. En conséquence, un choix judicieux de t_1 ou θ_1 permet souvent de simplifier les calculs.

- **Signal périodique pair** (Exemple Fig. 13.2)

Si s , développable en série de Fourier, est pair alors s est développable en série de cosinus.

$$\forall t, s(t) = s(-t) \implies b_n = 0 \implies s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$$

en tout point t où s est continu. Les coefficients peuvent alors être calculés sur une demi-période (attention aux bornes d'intégration : $t_1 = 0$) :

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) dt \quad \text{et} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

- **Signal périodique impair** (Exemple Fig. 13.2)

Si s , développable en série de Fourier, est impair alors s est développable en série de sinus.

$$\forall t, s(t) = -s(-t) \implies a_0 = 0 \quad \text{et} \quad a_n = 0 \implies s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

en tout point t où s est continu. Les coefficients peuvent alors être calculés sur une demi-période (attention aux bornes d'intégration : $t_1 = 0$) :

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

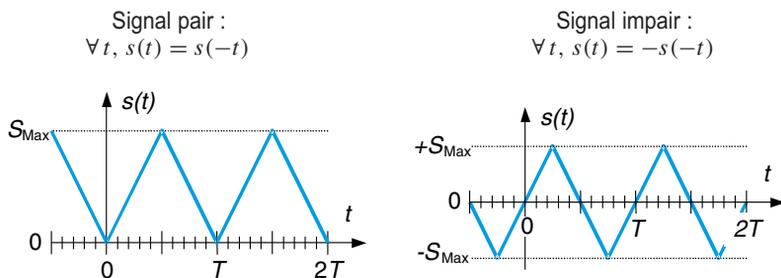


Figure 13.2 Exemple d'un signal périodique pair, et d'un impair

- **Symétrie de « glissement »**

Si s possède une symétrie de « glissement » alors le terme constant et les termes de rang pair sont nuls.

$$\forall t, s(t + T/2) = -s(t) \implies$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{2p} = 0 \\ b_{2p} = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{2p+1} = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} s(t) \cos[(2p+1)\omega t] dt \\ b_{2p+1} = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0+T/2} s(t) \sin[(2p+1)\omega t] dt \end{cases} \quad (p \in \mathbb{N})$$

Graphiquement, en faisant « glisser » (Exemple Fig. 13.3) d'une demi-période la partie du signal comprise entre t_0 et $t_0 + T/2$, on observe une symétrie par rapport à l'axe des temps.

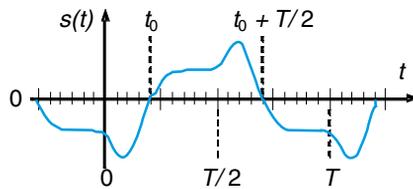


Figure 13.3 Exemple d'une symétrie de « glissement »

- **Signal décalé temporellement**

Si le signal $s(t)$ est développable en série de Fourier, alors le développement en série de Fourier du signal décalé $s(t - \tau)$ s'obtient en décalant chacun des termes de $s(t)$.

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \implies$$

$$\begin{aligned} s(t - \tau) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega(t - \tau) + \alpha_n) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \alpha_n - 2\pi n\tau/T) \end{aligned}$$

$$\text{Ou bien :} \quad s(t - \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega(t-\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} e^{-j2\pi n\tau/T}$$

En conséquence, le spectre d'amplitude est indépendant de l'origine des temps choisie contrairement au spectre de phase qui en dépend. Cette remarque peut être mise à profit pour :

1) Dédurre le spectre de phase du signal décalé $s(t - \tau)$ à partir de celui de $s(t)$ en ajoutant $-2\pi n\tau/T$ à α_n pour chaque terme.

2) Simplifier le calcul des coefficients en suivant la procédure suivante :

- Décaler arbitrairement le signal $s(t)$ de τ pour faire apparaître une symétrie afin de simplifier les calculs.
- Déterminer le développement en série de Fourier du signal décalé $s(t - \tau)$.
- En déduire le développement en série de Fourier du signal $s(t)$ à partir de celui de $s(t - \tau)$ sachant que $s(t)$ et $s(t - \tau)$ ont même spectre d'amplitude et que le spectre de phase de $s(t)$ s'obtient en ajoutant $+2\pi n\tau/T$ à chaque terme de phase de $s(t - \tau)$.

Remarque : Si on ne s'intéresse qu'au spectre d'amplitude, il suffit de décaler arbitrairement le signal $s(t)$ de τ pour faire apparaître une symétrie, puis de déterminer le développement en série de Fourier du signal décalé $s(t - \tau)$.

• Dérivation

Si le signal s et sa dérivée s' sont développables en série de Fourier, alors le développement en série de Fourier de s' s'obtient en dérivant terme à terme celui de s .

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \implies s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} jn\omega \times c_n e^{jn\omega t}$$

• Intégration

Si le signal s est développable en série de Fourier et que sa valeur moyenne est nulle ($S_{\text{Moy}} = 0 \implies a_0 = c_0 = 0$), alors le développement en série de Fourier de $\int s(t) dt$ s'obtient en intégrant terme à terme celui de s et en ajoutant la valeur moyenne de $\int s(t) dt$.

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t} \left. \begin{array}{l} \\ \text{avec } c_0 = 0 \end{array} \right\} \implies \int s(t) dt = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \frac{c_n}{jn\omega} e^{jn\omega t} + \left\langle \int s(t) dt \right\rangle$$

Relations entre coefficients

Établir les relations permettant de passer de l'écriture trigonométrique avec un seul cosinus à l'écriture complexe.

Solution

On établit immédiatement que $c_0 = a_0$ et on écrit l'égalité pour le rang n :

$$A_n \cos(n\omega t + \alpha_n) = c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

En remplaçant le cosinus par des exponentielles complexes, on obtient :

$$\frac{A_n}{2} \left(e^{j(n\omega t + \alpha_n)} + e^{-j(n\omega t + \alpha_n)} \right) = c_n e^{jn\omega t} + c_{-n} e^{-jn\omega t}$$

$$\iff \left(c_n - \frac{A_n}{2} e^{j\alpha_n} \right) e^{jn\omega t} + \left(c_{-n} - \frac{A_n}{2} e^{-j\alpha_n} \right) e^{-jn\omega t} = 0$$

D'où l'on déduit :

$$c_n = \frac{A_n}{2} e^{j\alpha_n} \quad \text{et} \quad c_{-n} = \frac{A_n}{2} e^{-j\alpha_n} \quad (\implies c_{-n} = \overline{c_n})$$

Puis : $c_n \times c_{-n} = \frac{A_n^2}{4}$, $\arg(c_n) = \alpha_n$ et $\arg(c_{-n}) = -\alpha_n$

Signal rectangulaire

Soit la tension rectangulaire $u(t)$ de période $T = 1$ ms, de rapport cyclique $\gamma = 1/5$, de niveaux 0 et $U_{\text{Max}} = 5$ V (Fig. 13.4).

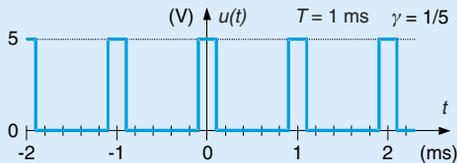


Figure 13.4 Tension rectangulaire de niveaux 0 et 5 V et $\gamma = 1/5$

1. Déterminer la forme trigonométrique du développement en série de Fourier de la tension rectangulaire $u(t)$.
2. Déterminer la forme complexe du développement en série de Fourier de $u(t)$.
3. Vérifier les spectres de $u(t)$ donnés en exemple fig. 12.1, fiche 12 précédente.
4. En déduire la forme trigonométrique du développement en série de Fourier de $u(t - \gamma T/2)$ ainsi que ses spectres.

Solution

1. Forme trigonométrique. Étant paire, la tension $u(t)$ est développable en série de cosinus ($b_n = 0$).

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) dt = \frac{2U_{\text{Max}}}{T} \int_0^{\gamma T/2} dt = \frac{2U_{\text{Max}}}{T} [t]_0^{\gamma T/2} = \gamma U_{\text{Max}}$$

$$\Rightarrow U_{\text{Moy}} = a_0 = 1 \text{ V}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{4U_{\text{Max}}}{T} \int_0^{\gamma T/2} \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{4U_{\text{Max}}}{T} \left[\frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{\gamma T/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4U_{\text{Max}} \sin(n\omega\gamma T/2)}{n\omega T} = \frac{2U_{\text{Max}}}{n\pi} \sin(n\gamma\pi)$$

$$\text{D'où : } \frac{u(t)}{U_{\text{Max}}} = \gamma + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n\pi} \cos(n\omega t)$$

$$\text{Soit : } \frac{u(t)}{U_{\text{Max}}} = \gamma + 2 \times \left[\frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi} \cos(\omega t) + \frac{\sin(2\gamma\pi)}{2\pi} \cos(2\omega t) + \dots \right]$$

2. Forme complexe.

$$c_0 = a_0 = \gamma U_{\text{Max}} \Rightarrow U_{\text{Moy}} = c_0 = 1 \text{ V}$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} u(t) e^{-jn\omega t} dt = \frac{U_{\text{Max}}}{T} \int_{-\gamma T/2}^{\gamma T/2} e^{-jn\omega t} dt = \frac{U_{\text{Max}}}{-jn\omega T} [e^{-jn\omega t}]_{-\gamma T/2}^{\gamma T/2}$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{-U_{\text{Max}}}{jn\omega T} \left(e^{-jn\omega\gamma T/2} - e^{jn\omega\gamma T/2} \right) = \frac{-U_{\text{Max}}}{jn2\pi} \left(e^{-jn\gamma\pi} - e^{jn\gamma\pi} \right)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{U_{\text{Max}}}{n\pi} \sin(n\gamma\pi) \quad (c_n = a_n/2 \text{ car } b_n = 0)$$

$$\text{D'où : } \frac{u(t)}{U_{\text{Max}}} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n} e^{jn\omega t}$$

3. Spectres. Le spectre d'amplitude unilatéral est la représentation graphique des raies $A_0 = |a_0| = |c_0|$ et $A_n = |a_n| = 2 \times |c_n|$ car $b_n = 0$. Le spectre d'amplitude bilatéral est la représentation graphique des raies $|c_0|$ et $|c_n|$. Le spectre de phase est la représentation graphique des raies des phases initiales α_n définies par :

$$\begin{cases} \cos \alpha_n = a_n/|a_n| \\ \sin \alpha_n = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \alpha_n = -\alpha_{-n} = \arg(c_n)$$

Par suite, pour $n > 0$, $\alpha_n = 0^\circ$ si $\cos \alpha_n = +1$, c'est-à-dire si :

$$\sin(n\pi/5) > 0 \iff 0 + 2k\pi < n\pi/5 < \pi + 2k\pi \iff 0 + 10k < n < 5 + 10k$$

Et $\alpha_n = 180^\circ$ si $\cos \alpha_n = -1$, c'est-à-dire si : $5 + 10k < n < 10 + 10k$

Pour $n = 5 + 10k$, $\sin(n\pi/5) = 0$ et α_n ne peut être défini ; on fixe $\alpha_n = 0^\circ$.

Tout calcul fait on obtient (A_n et $|c_n|$ en volts, α_n en degrés) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A_n	1	1,87	1,51	1,01	0,47	0	0,31	0,43	0,38	0,21	0	0,17	0,25	0,23	0,13	0
$ c_n $	1	0,94	0,76	0,50	0,23	0	0,16	0,22	0,19	0,10	0	0,08	0,13	0,12	0,07	0
α_n	0	0	0	0	0	0	180	180	180	180	0	0	0	0	0	0
$\alpha_n - n \times 36$	0	-36	-72	-108	-144	0	-36	-72	-108	-144	0	-36	-72	-108	-144	0

4. Tension décalée $u(t - \gamma T/2)$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{u(t - \gamma T/2)}{U_{\text{Max}}} &= \gamma + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n\pi} \cos(n\omega(t - \gamma T/2)) \\ &= \gamma + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\gamma\pi)}{n\pi} \cos(n\omega t - n\gamma\pi) \end{aligned} \quad \text{avec } n\gamma\pi = n\pi/5$$

Les spectres d'amplitude sont inchangés par décalage. Le spectre de phase du signal décalé $u(t - \gamma T/2)$ est obtenu à partir de celui de $u(t)$ en ajoutant $-n\pi/5$ rad, soit $-n \times 36^\circ$, à α_n pour chaque terme (voir le tableau de la question précédente et Fig. 13.5).

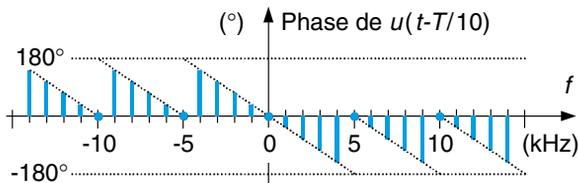


Figure 13.5 Spectre de phase de la tension décalée $u(t - \gamma T/2)$ avec $\gamma = 1/5$

Signal triangulaire

Soit le signal triangulaire pair (voir Fig. 13.2) de période T_1 . Son développement en série de Fourier est :

$$\frac{s(t)}{S_{\text{Max}}} = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right)^2 \cos(n\omega_1 t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega_1 t]}{(2p+1)^2}$$

1. Tracer le signal $s'(t)$, dérivée de $s(t)$.
2. Dédire le développement en série de Fourier de $s'(t)$ de celui de $s(t)$.

Solution

1. Chronogrammes (Fig. 13.6).

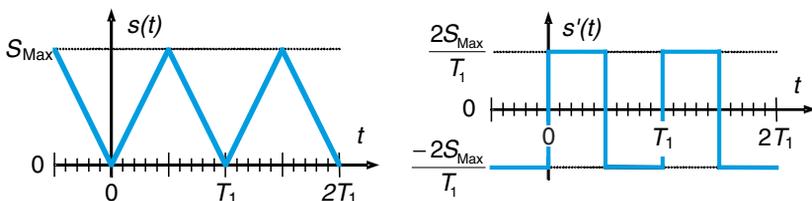


Figure 13.6 Signaux $s(t)$ et $s'(t)$

2. Développement en série de Fourier.

$$\begin{aligned} \frac{s'(t)}{S_{\text{Max}}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{s(t)}{S_{\text{Max}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right)^2 \cos(n\omega_1 t) \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\omega_1 \left(\frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} \right)^2 \sin(n\omega_1 t) = \frac{8}{\pi T_1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n\pi/2)}{n} \sin(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

Ou bien :

$$\begin{aligned} \frac{s'(t)}{S_{\text{Max}}} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{s(t)}{S_{\text{Max}}} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos[(2p+1)\omega_1 t]}{(2p+1)^2} \right) \\ &= \frac{4\omega_1}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega_1 t]}{2p+1} = \frac{8}{\pi T_1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sin[(2p+1)\omega_1 t]}{2p+1} \end{aligned}$$

Objectifs : Calculer et mesurer les différentes puissances d'un circuit électrique en régime périodique permanent.

I À savoir

- **Puissances et facteur de puissance dans le cas général où la tension et le courant sont périodiques** (Fig. 14.1)

La tension $u = u(t)$ et le courant $i = i(t)$ sont périodiques et développables en série de Fourier. Notations :

$$u(t) = U_0 \sum_{n=1}^{\infty} U_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \alpha_{U_n}) \quad \text{où } U_0 = \langle u(t) \rangle \quad \text{et } U_n = U_{n\text{Eff}}$$

$$i(t) = i_0 \sum_{n=1}^{\infty} I_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \alpha_{I_n}) \quad \text{où } I_0 = \langle i(t) \rangle \quad \text{et } I_n = I_{n\text{Eff}}$$

	Unité	Définition et relations
Puissance instantanée	watt (W)	$p(t) = u(t) \times i(t)$
Puissance active ou moyenne	watt (W)	$P = P_{\text{Moy}} = \langle p(t) \rangle = U_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n$
Puissance apparente	volt-ampère (VA)	$S = UI = \sqrt{\left(U_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \right) \times \left(I_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right)}$
Puissance non-active	volt-ampère (VA)	$N = \sqrt{S^2 - P^2}$
Facteur de puissance		$f_P = \frac{P}{S}$

Figure 14.1 Puissances – Facteur de puissance (convention récepteur)
Tension $u = u(t)$ et courant $i = i(t)$ périodiques

$\varphi_n = \alpha_{U_n} - \alpha_{I_n}$ est le déphasage entre $u_n(t) = U_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \alpha_{U_n})$ et $i_n(t) = I_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \alpha_{I_n})$; u_n est en avance de phase par rapport à i_n si φ_n est positif.

$$U = U_{\text{Eff}} = \sqrt{\langle u^2(t) \rangle} = \sqrt{U_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} U_n^2} \quad \text{et} \quad I = I_{\text{Eff}} = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{I_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} I_n^2}$$

- **Puissances et facteur de puissance dans le cas où la tension et le courant sont périodiques alternatifs**

Les définitions et relations du cas général ci-dessus restent valables. La particularité de l'alternatif se traduit par : $U_0 = 0$ et $I_0 = 0$.

- **Puissances et facteur de puissance dans le cas où la tension est sinusoïdale et le courant périodique alternatif** (Fig. 14.2)

La tension $u = u(t)$ est sinusoïdale et le courant $i = i(t)$ périodique alternatif ($I_0 = 0$) et développable en série de Fourier. Notations particulières :

$$u(t) = U \sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha_U) \quad \text{où} \quad U = U_{\text{Eff}}$$

$$i(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} I_n \sqrt{2} \cos(n\omega t + \alpha_{I_n}) \quad \text{où} \quad I_n = I_{n\text{Eff}}$$

$$\varphi_1 = \alpha_U - \alpha_{I_1} \text{ est le déphasage entre } u(t) \text{ et le fondamental } i_1(t)$$

	Unité	Définition et relations
Puissance active ou moyenne	watt (W)	$P = P_{\text{Moy}} = \langle p(t) \rangle = UI_1 \cos \varphi_1$
Puissance apparente	volt-ampère (VA)	$S = UI = U \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} I_n^2}$
Puissance réactive	volt-ampère-réactif (var)	$Q = UI_1 \sin \varphi_1 = P \tan \varphi_1$
Puissance déformante	volt-ampère-déformant (vad)	$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = U \sqrt{\sum_{n=2}^{+\infty} I_n^2}$
Facteur de puissance		$f_p = \frac{P}{S} = \frac{I_1 \cos \varphi_1}{I}$
Facteur de déphasage		$\frac{P}{UI_1} = \cos \varphi_1$

Figure 14.2 Puissances – Facteur de puissance (convention récepteur)
Tension $u = u(t)$ sinusoïdale et courant $i = i(t)$ périodique alternatif

Remarques (tension sinusoïdale et courant alternatif) :

- La puissance active est transportée uniquement par le fondamental du courant.
- La définition de la puissance réactive conduit à la relation :

$$U^2 I_1^2 = P^2 + Q^2$$

- La définition de la puissance déformante correspond simplement à la clôture de :

$$S^2 = P^2 + Q^2 + D^2$$

- Dans le cas où c 'est le courant qui est sinusoïdal et la tension périodique alternative, il suffit d'invertir les rôles de u et de i dans les formules.
- L'unité de D n'est pas consensuelle. Selon les auteurs, on rencontre VA, vad ou pas d'unité. Le choix ici adopté consiste à insister sur le caractère particulier de cette « puissance ».

II Compléments

• Puissance active

Seule la puissance active, moyenne de la puissance instantanée, correspond à une véritable puissance, transformée en puissance mécanique, thermique, chimique, etc.

• Puissance apparente

C'est l'élément essentiel du dimensionnement de la ligne et du générateur car un circuit nécessite un courant efficace (sous une tension donnée) pour son alimentation, alors que seule la puissance active est transformée sous une autre forme d'énergie. Plus la puissance apparente est grande par rapport à la puissance active, plus les pertes en ligne seront importantes et plus le générateur devra être surdimensionné.

• Puissance non-active

- En régime sinusoïdal (tensions et courants sont tous sinusoïdaux), la puissance réactive caractérise les échanges d'énergie entre le générateur et le récepteur dus à la présence d'éléments réactifs (bobines et condensateurs) stockant et restituant de l'énergie sous forme électromagnétique ou électrostatique.
- En régime périodique non-sinusoïdal, l'interprétation de la puissance réactive et la frontière entre puissances réactive et déformante ne font pas consensus dans la communauté scientifique. On a choisi d'introduire ici, dans le seul cas particulier d'une tension sinusoïdale et d'un courant périodique alternatif (charge non-linéaire sur un réseau délivrant une tension alternative sinusoïdale), la définition la plus rencontrée (Q et D) afin que le lecteur en soit averti ; malgré l'impossi-

bilité de donner des significations physiques claires à Q et D (voir l'exercice ci-après, « Gradateur sur charge résistive »). Il ne faut cependant pas ignorer qu'il existe aujourd'hui plusieurs définitions de la puissance réactive pour le régime périodique.

III Mesures

Les appareils doivent être capables de mesurer les valeurs efficaces de grandeurs périodiques contenant des harmoniques. En conséquence, leur bande passante doit être suffisante. Par exemple, la mesure du taux de distorsion harmonique (*THD*) nécessite la prise en compte des harmoniques jusqu'au rang 40 pour être conforme aux normes.

• Analyseur de réseau électrique

Ils permettent les mesures des puissances active, réactive, et apparente, du facteur de puissance, des tension et courant efficaces, des harmoniques, du *THD*, etc. Il faut cependant bien connaître les limites et les principes de calcul décrits dans la notice technique d'un tel appareil pour éviter les erreurs d'interprétation. Enfin, il ne faut pas oublier qu'il existe plusieurs définitions de la puissance réactive en régime périodique (voir le paragraphe « Compléments »).

• Appareils élémentaires

- La puissance active se mesure à l'aide d'un wattmètre qui indique la valeur moyenne de la puissance instantanée $p = ui$ (Fig. 14.3 ; voir aussi fiche 6, paragraphe « Mesures ») ;
- La puissance apparente se calcule à partir des valeurs efficaces de la tension et du courant mesurées par un voltmètre et un ampèremètre (voir fiche 2, paragraphe « Mesures ») : $S = UI$.
- La puissance non-active se calcule alors par : $N = \sqrt{S^2 - P^2}$.
- La mesure de la puissance réactive définie par $Q = UI_1 \sin \varphi_1$ (cas où la tension est sinusoïdale et le courant périodique alternatif) s'effectue avec un wattmètre monté en varmètre, c'est-à-dire dont le circuit tension est branché sur une tension en quadrature avec u car $Q = UI_1 \sin \varphi_1 = UI_1 \cos(\varphi_1 - \pi/2)$.
- Enfin, la puissance déformante se déduit des mesures précédentes par :

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}.$$

Exemple

Soit à mesurer les puissances actives et réactives d'une charge alimentée par une tension simple, les autres phases étant accessibles et le système de tensions étant triphasé équilibré et direct.

– Le schéma (Fig. 14.3) permet la mesure de la puissance active P :

$$V_1 I_1 \cos \varphi_1 = P$$

– Le schéma (Fig. 14.4) permet la mesure la puissance réactive Q :

$$\begin{aligned} U_{23} I_1 \cos \left(\vec{I}_1, \vec{U}_{23} \right) &= \sqrt{3} V_1 I_1 \cos \left(\left(\vec{I}_1, \vec{V}_1 \right) + \left(\vec{V}_1, \vec{U}_{23} \right) \right) \\ &= \sqrt{3} V_1 I_1 \cos (\varphi_1 - \pi/2) \\ &= \sqrt{3} V_1 I_1 \sin \varphi_1 = Q \sqrt{3} \end{aligned}$$

La puissance réactive Q est donc égale à la puissance lue divisée par $\sqrt{3}$.

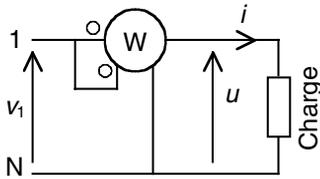


Figure 14.3 Mesure de la puissance active

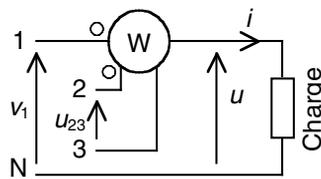


Figure 14.4 Mesure de la puissance réactive

Redresseur à pont tous thyristors

Soit le schéma de principe (Fig. 14.5) d'un redresseur à pont tous thyristors. Le pont est alimenté par le réseau qui fournit une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 400$ V et de fréquence $f = 50$ Hz. Les thyristors sont considérés comme parfaits : T_1 et T_3 d'une part, T_2 et T_4 d'autre part, sont commandés de manière complémentaire avec un angle d'amorçage noté α . L'inductance est de valeur suffisante pour qu'on puisse admettre que le courant i_S est parfaitement continu : $i_S = I_S$. On obtient alors les allures (Fig. 14.6) de u_S et i , et le développement en série de Fourier du courant d'entrée de l'installation i :

$$i(\theta) = \frac{4I_S}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1} \sin[(2p+1)(\theta - \alpha)]$$

1. Exprimer la valeur moyenne de la tension à la sortie du pont u_S .
2. En déduire la valeur moyenne de la tension aux bornes du moteur u_M .
3. Exprimer la puissance moyenne absorbée par le moteur.
4. Exprimer la puissance active absorbée par l'installation.

5. Sans utiliser le développement en série de Fourier donné ci-dessus, dessiner l'allure du fondamental du courant i . Vérifier alors l'expression du premier terme du développement en série de Fourier donné ci-dessus.
6. Exprimer la puissance apparente absorbée par l'installation.
7. Exprimer le facteur de puissance de l'installation.
8. Exprimer les puissances réactive, déformante et non-active absorbées par l'installation.
9. Application numérique. Calculer les expressions précédentes pour $\alpha = \pi/3$ rad, puis $\alpha = 2\pi/3$ rad, et $I_S = 50$ A. Commenter les résultats.

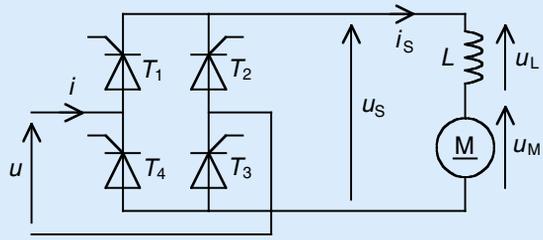


Figure 14.5 Redresseur à pont tout thyristors – Schéma

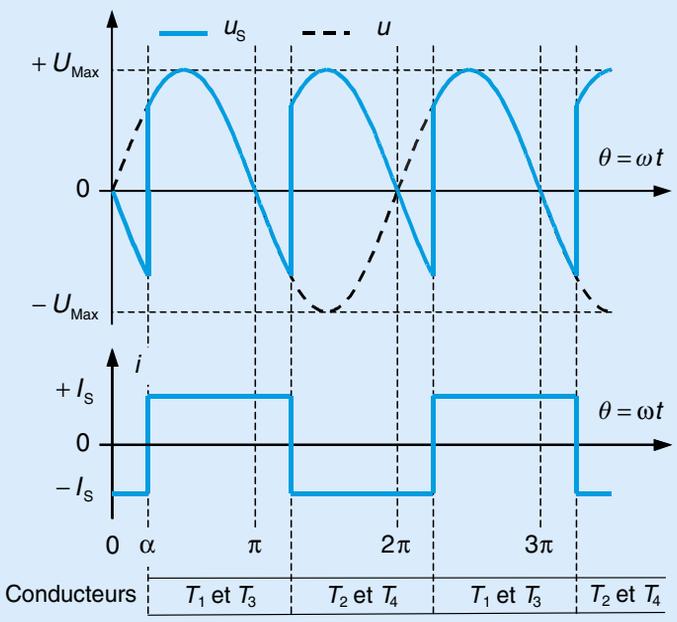


Figure 14.6 Redresseur à pont tout thyristors – Chronogrammes

Solution

1. Valeur moyenne de u_S . Par définition :

$$U_{S\text{Moy}} = \langle u_S \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} U\sqrt{2} \sin \theta d\theta = \frac{U\sqrt{2}}{\pi} [-\cos \theta]_{\alpha}^{\alpha+\pi}$$

D'où :
$$U_{S\text{Moy}} = \frac{2U\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha$$

2. Valeur moyenne de u_M . Loi des mailles :

$$u_S = u_L + u_M \implies U_{S\text{Moy}} = U_{L\text{Moy}} + U_{M\text{Moy}}$$

D'où :
$$U_{M\text{Moy}} = U_{S\text{Moy}} \quad \text{car } U_{L\text{Moy}} = 0$$

3. Puissance moyenne absorbée par le moteur. En considérant le courant $i_S = I_S$ constant, on a :

$$P_{M\text{Moy}} = \langle u_M i_S \rangle = \langle u_M \rangle I_S = \langle u_S \rangle I_S = U_{S\text{Moy}} I_S$$

D'où :
$$P_{M\text{Moy}} = \frac{2U\sqrt{2} \times I_S}{\pi} \cos \alpha$$

4. Puissance active absorbée par l'installation. Plusieurs raisonnements sont possibles.

– On remarque que la puissance absorbée par l'installation est égale à la puissance moyenne absorbée par le moteur car tous les autres éléments sont supposés parfaits. D'où : $P = P_{M\text{Moy}}$

– On applique la définition : $P = P_{\text{Moy}} = \langle p(t) \rangle = \langle u(t) \times i(t) \rangle$. Comme $i = +I_S$ pour $\alpha < \theta < \alpha + \pi$, P s'écrit :

$$P = \frac{I_S}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} U\sqrt{2} \sin \theta d\theta = U_{S\text{Moy}} I_S \quad \text{D'où : } P = P_{M\text{Moy}}$$

5. Par définition, le fondamental i_1 du courant i s'écrit : $i_1(\theta) = I_{1\text{Max}} \sin(\theta - \varphi_1)$. C'est une grandeur sinusoïdale de fréquence 50 Hz (celle du réseau). Les symétries de $i(\theta)$ conduisent à la représentation (Fig. 14.7) de son fondamental. On en déduit que $\varphi_1 = \alpha$

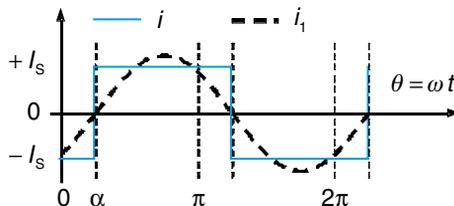


Figure 14.7 Allure du fondamental i_1

On applique alors la formule obtenue lorsque la tension est sinusoïdale et le courant périodique alternatif (voir Fig. 14.2) :

$$P = UI_1 \cos \varphi_1 = UI_1 \cos \alpha = \frac{2U\sqrt{2} \times I_S}{\pi} \cos \alpha$$

$$\implies I_1 = \frac{2\sqrt{2} \times I_S}{\pi} \quad \text{et} \quad I_{1 \text{ Max}} = \frac{4I_S}{\pi}$$

Le fondamental du courant s'écrit :

$$i_1(\theta) = \frac{4I_S}{\pi} \sin(\theta - \alpha) \quad \text{ce qui vérifie bien l'expression donnée.}$$

6. Puissance apparente absorbée par l'installation. Par définition :

$$S = UI = UI_S \quad \text{car} \quad I = \sqrt{\langle i^2 \rangle} = I_S$$

7. Facteur de puissance de l'installation. Par définition :

$$f_P = \frac{P}{S} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha$$

8. Puissance réactive, déformante et non-active. Par application des définitions :

$$Q = UI_1 \sin \varphi_1 \implies Q = \frac{2U\sqrt{2} \times I_S}{\pi} \sin \alpha$$

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} = UI_S \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2}} \approx 0,435 \times UI_S$$

$$N = \sqrt{S^2 - P^2} = UI_S \sqrt{1 - \frac{8}{\pi^2} \cos^2 \alpha}$$

9. Application numérique : $\alpha = \pi/3$ rad, puis $\alpha = 2\pi/3$ rad, et $I_S = 50$ A.

α (°)	U_{Moy} (V)	P (W)	S (VA)	f_P	I_1 (A)	Q (var)	D (vad)	N (VA)
60	180	9000	20 000	0,45	45	15 590	8700	17 860
120	-180	-9000	20 000	-0,45	45	15 590	8700	17 860

Un facteur de puissance négatif correspond à une puissance active négative reçue par le pont. Pour $\alpha > 90^\circ$, le redresseur fonctionne en onduleur assisté, la MCC est génératrice et fournit de l'énergie électrique au réseau. La forme du courant i_1 ne dépend pas de l'angle α ; ceci explique que I_1 , D et S soient constants (voir fiche 13, « Méthodes », paragraphe « Signal décalé temporellement »).

Gradateur sur charge résistive

Soit le schéma de principe (Fig. 14.8) d'un gradateur à commande de découpage des phases. Il est alimenté par le réseau qui fournit une tension sinusoïdale $u = U_{\text{Max}} \sin(\omega t)$ avec $U_{\text{Eff}} = 230 \text{ V}$. L'interrupteur électronique, supposé parfait, est fermé à un instant fixé par l'angle d'amorçage α et ouvert lorsque le courant i s'annule. Pour une charge résistive $R = 26,5 \Omega$, on obtient les chronogrammes (Fig. 14.9), et le développement en série de Fourier du courant d'entrée de l'installation i :

$$i(\theta) = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta + \sum_{p=1}^{+\infty} i_{2p+1}(\theta)$$

Avec : $a_1 = \frac{U_{\text{Max}}}{2\pi R}(-1 + \cos(2\alpha))$ et $b_1 = \frac{U_{\text{Max}}}{2\pi R}(2(\pi - \alpha) + \sin(2\alpha))$

1. Exprimer la valeur efficace de la tension u_S aux bornes de la charge. En déduire la valeur efficace du courant i dans la charge.
2. Exprimer la puissance active absorbée par l'installation.
3. Exprimer la puissance apparente de la source.
4. Exprimer le facteur de puissance de l'installation.
5. Calculer $U_S = U_{S\text{Eff}}$, $I = I_{\text{Eff}}$, P , S et f_P pour $\alpha = 0^\circ$, puis $\alpha = 90^\circ$. Commenter.
6. Ecrire l'expression du fondamental i_1 du courant i absorbé par l'installation. Puis exprimer la valeur efficace I_1 du fondamental.
7. Exprimer les puissances réactive, déformante et non-active absorbées par l'installation. Les calculer pour $\alpha = 0^\circ$, puis $\alpha = 90^\circ$. Commenter.

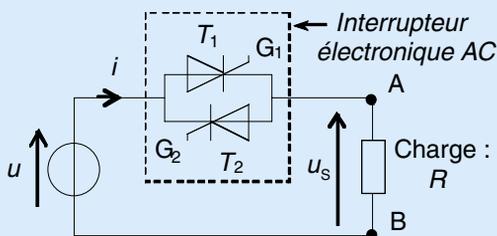


Figure 14.8 Interrupteur électronique AC

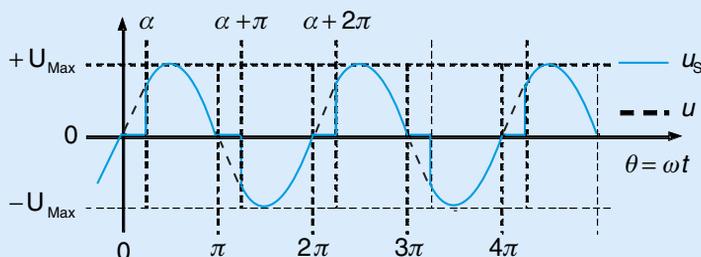


Figure 14.9 Commande de découpage des phases – Charge résistive

Solution

1. Valeur efficace de la tension aux bornes de la charge. Par définition :

$$\begin{aligned} U_{S\text{Eff}}^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi} U_{\text{Max}}^2 \sin^2 \theta d\theta = \frac{U_{\text{Max}}^2}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi} (1 - \cos(2\theta)) d\theta \\ &= \frac{U_{\text{Max}}^2}{2\pi} \left[\theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_{\alpha}^{\pi} \end{aligned}$$

D'où :
$$U_S = U_{S\text{Eff}} = \frac{U_{\text{Max}}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}} = U \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}$$

Valeur efficace du courant dans la charge. La loi d'Ohm permet d'écrire :

$$I = \frac{U_S}{R} = \frac{U}{R} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}$$

2. Puissance active absorbée par l'installation. Elle est égale à la puissance moyenne absorbée par la résistance car l'interrupteur électronique est supposé parfait. D'où :

$$P = \frac{U_S^2}{R} = RI^2 = \frac{U^2}{R} \left(1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi} \right)$$

3. Puissance apparente de la source. Par définition :

$$S = UI = \frac{U^2}{R} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}$$

4. Facteur de puissance de l'installation. Par définition :

$$f_P = \frac{P}{S} = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\sin(2\alpha)}{2\pi}}$$

5. Application numérique. Pour $\alpha = 0^\circ$, l'interrupteur électronique est constamment fermé ; la puissance active est maximale et le facteur de puissance vaut 1. Pour $\alpha = 90^\circ$, l'interrupteur électronique est fermé la moitié du temps de chaque période ; la puissance active est divisée par 2 tandis que la valeur efficace du courant est divisée par $\sqrt{2}$; le facteur de puissance vaut $1/\sqrt{2}$; cela résulte du fait que le courant n'est pas sinusoïdal.

α (°)	U_S (V)	I (A)	P (W)	S (VA)	f_P
0	230	8,68	2000	2000	1
90	163	6,14	1000	1414	0,707

6. Fondamental du courant absorbé par l'installation. Il s'écrit :

$$i_1(\theta) = a_1 \cos \theta + b_1 \sin \theta \quad \text{avec } a_1 \text{ et } b_1 \text{ définis ci-dessus.}$$

Valeur efficace du fondamental. On a :

$$I_{1 \text{ Max}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \implies I_1 = I_{1 \text{ Eff}} = \sqrt{(a_1^2 + b_1^2)}/2$$

7. Puissances réactive, déformante et non-active absorbées par l'installation. La tension étant sinusoïdale et le courant périodique alternatif, on a :

$$U^2 I_1^2 = P^2 + Q^2 \implies Q = \sqrt{U^2 I_1^2 - P^2}$$

Tout calcul fait on obtient :

$$Q = \frac{U^2}{R} \times \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2\pi} = \frac{U^2}{R} \times \frac{\sin^2(\alpha)}{\pi}$$

Par suite :

$$D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2} \quad \text{et} \quad N = \sqrt{S^2 - P^2}$$

Application numérique.

α (°)	I_1 (A)	Q (var)	D (vad)	N (VA)
0	8,68	0	0	0
90	5,16	637	771	1000

Remarque : Ici, il n'est pas facile de donner une interprétation physique à Q dite puissance réactive ; aucune énergie n'est stockée dans une inductance ou une capacité puisqu'il n'y en a pas dans le schéma étudié. Q ne correspond donc pas à un échange d'énergie, mais représente le saut de la puissance instantanée à la fermeture de l'interrupteur électronique ($\theta = \alpha$). En effet :

$$p(\theta) = \frac{u^2(\theta)}{R} = \frac{2U^2}{R} \sin^2 \theta$$

(lorsque l'interrupteur électronique est fermé)

$$\implies p(\alpha^+) = 2\pi Q \quad \text{et} \quad p(\alpha^-) = 0$$

Systemes triphasés en régime sinusoïdal

Objectifs : Savoir ce qu'est un système triphasé équilibré ou déséquilibré, direct ou inverse en régime sinusoïdal permanent triphasé. Représenter un système triphasé temporellement, sous forme vectorielle et en notation complexe.

I À savoir

- **Système triphasé équilibré – Système triphasé déséquilibré**

Trois grandeurs (tensions ou courants) sinusoïdales de même fréquence forment un système triphasé équilibré si elles ont même valeur efficace et sont déphasées entre elles de $2\pi/3$ rad soit 120° . Autrement, elles forment un système triphasé déséquilibré.

- **Système direct – Système inverse**

Le système triphasé (g_1, g_2, g_3) est dit direct si g_3 est en retard de phase de $2\pi/3$ rad sur g_2 qui est en retard de phase de $2\pi/3$ rad sur g_1 . Autrement, le système est dit inverse.

- **Représentation temporelle d'un système triphasé équilibré direct** (Fig. 15.1)

$$g_1(t) = G_{\text{Max}} \cos(\omega t), g_2(t) = G_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), g_3(t) = G_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

- **Représentation vectorielle d'un système triphasé équilibré direct** (Fig. 15.2)

Le module est égal à la valeur efficace G (voir fiche 3).

$$\vec{G}_1 = [G; 0], \vec{G}_2 = \left[G; -\frac{2\pi}{3}\right], \vec{G}_3 = \left[G; -\frac{4\pi}{3}\right] \text{ avec } G = \frac{G_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}$$

- **Représentation complexe d'un système triphasé équilibré direct**

Le module est égal à la valeur efficace G (voir fiche 4).

$$\underline{G}_1 = [G; 0] = G, \underline{G}_2 = \left[G; -\frac{2\pi}{3}\right] = Ge^{-j\frac{2\pi}{3}}, \underline{G}_3 = \left[G; -\frac{4\pi}{3}\right] = Ge^{-j\frac{4\pi}{3}}$$

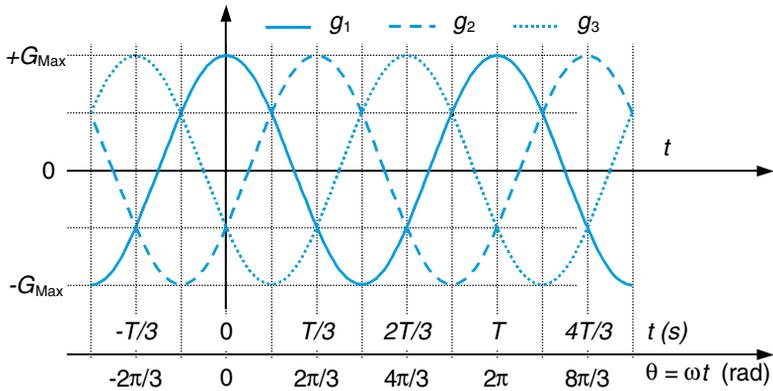


Figure 15.1 Représentation temporelle d'un système triphasé équilibré direct

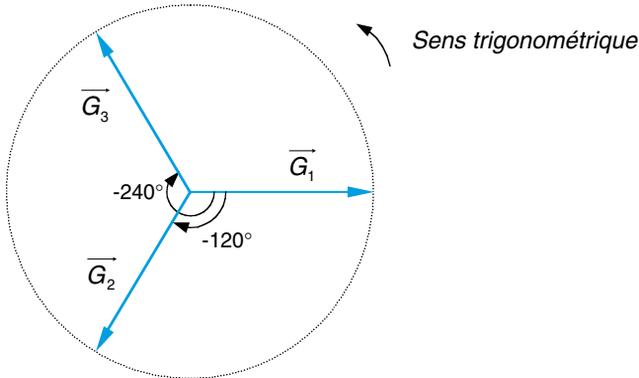


Figure 15.2 Représentation vectorielle d'un système triphasé équilibré direct

• **Propriété**

La somme des trois composantes d'un système triphasé équilibré (g_1, g_2, g_3) est nulle à tout instant.

$$\forall t, g_1 + g_2 + g_3 = 0 \iff \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_3 = \vec{0} \iff \underline{G}_1 + \underline{G}_2 + \underline{G}_3 = 0$$

II Compléments

Pour simplifier écritures et calculs, on note \underline{a} l'opérateur de rotation de $+120^\circ$. On a les propriétés suivantes :

$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = e^{-j\frac{4\pi}{3}}$	$\underline{a}^2 = \overline{\underline{a}} = \frac{1}{\underline{a}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	$\underline{a}^3 = 1$
$1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$	$\underline{a} - \underline{a}^2 = +j\sqrt{3}$	
$1 - \underline{a} = \sqrt{3} e^{-j\frac{\pi}{6}}$	$1 - \underline{a}^2 = \sqrt{3} e^{j\frac{\pi}{6}}$	

D'où : $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = \left[1; \frac{2\pi}{3} \right]$

$$\underline{a}G_1 = \left[1; \frac{2\pi}{3} \right] \times [G; 0] = \left[G; \frac{2\pi}{3} \right] = \left[G; \frac{-4\pi}{3} \right] = \underline{G}_3$$

$$\underline{a}^2G_1 = \left[1; \frac{4\pi}{3} \right] \times [G; 0] = \left[G; \frac{4\pi}{3} \right] = \left[G; \frac{-2\pi}{3} \right] = \underline{G}_2$$

Ainsi, en notation complexe, un système triphasé équilibré $(\underline{G}_1, \underline{G}_2, \underline{G}_3)$ s'écrit $(\underline{G}_1, \underline{a}^2\underline{G}_1, \underline{a}\underline{G}_1)$ s'il est direct, et $(\underline{G}_1, \underline{a}\underline{G}_1, \underline{a}^2\underline{G}_1)$ s'il est inverse.

III Mesures

Un circuit élémentaire de repérage des phases a été présenté en exercices, [fiche 3](#) par la représentation de Fresnel, et [fiche 4](#) par les nombres complexes.

Principe de détection d'inversion de phases

Soit le système triphasé équilibré direct $(\underline{G}_1, \underline{G}_2, \underline{G}_3)$ tel que :

$$\underline{G}_1 = G, \quad \underline{G}_2 = Ge^{-j\frac{2\pi}{3}} \quad \text{et} \quad \underline{G}_3 = Ge^{-j\frac{4\pi}{3}} = Ge^{j\frac{2\pi}{3}} \quad \text{avec} \quad G = \frac{G_{\text{Max}}}{\sqrt{2}}$$

Le principe de la détection d'inversion de phases est donné (Fig. 15.3). L'étude vise à établir les expressions prises par la sortie \underline{S} pour les 6 branchements possibles de \underline{G}_p , \underline{G}_q et \underline{G}_r sur les 3 phases \underline{G}_1 , \underline{G}_2 et \underline{G}_3 .

1. Exprimer la sortie \underline{S} en fonction de \underline{G}_p , \underline{G}_q et \underline{G}_r .

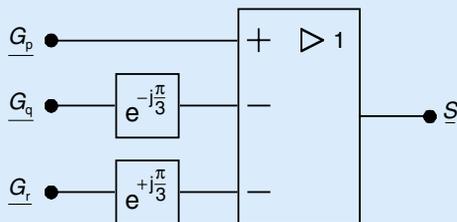


Figure 15.3 Principe de la détection d'inversion de phases

2. Exprimer la sortie \underline{S} pour $p = 1, q = 2$ et $r = 3$.
3. Exprimer la sortie \underline{S} pour $p = 1, q = 3$ et $r = 2$.
4. Récapituler dans un tableau les 6 cas possibles en fonction p, q et r . Conclure.

Solution

1. Sortie \underline{S} en fonction de $\underline{G}_p, \underline{G}_q$ et \underline{G}_r .

$$\underline{S} = \underline{G}_p - \underline{G}_q e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{G}_r e^{+j\frac{\pi}{3}}$$

2. Sortie \underline{S} pour $p = 1, q = 2$ et $r = 3$.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{G}_1 - \underline{G}_2 e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{G}_3 e^{+j\frac{\pi}{3}} = G \left(1 - e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{+j\frac{2\pi}{3}} e^{+j\frac{\pi}{3}} \right) \\ &= G(1 - e^{-j\pi} - e^{+j\pi}) = 3G \end{aligned}$$

3. Sortie \underline{S} pour $p = 1, q = 3$ et $r = 2$.

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{G}_1 - \underline{G}_3 e^{-j\frac{\pi}{3}} - \underline{G}_2 e^{+j\frac{\pi}{3}} = G \left(1 - e^{+j\frac{2\pi}{3}} e^{-j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{2\pi}{3}} e^{+j\frac{\pi}{3}} \right) \\ &= G(1 - e^{j\frac{\pi}{3}} - e^{-j\frac{\pi}{3}}) = 0 \end{aligned}$$

4. Le tableau (Fig. 15.4) récapitule les 6 cas possibles, les cas non encore traités pouvant se déduire des deux traités précédemment. En conclusion, si $S = 3G$ alors le système est direct, et si $S = 0$ alors le système est inverse.

p	q	r	Sortie \underline{S}	Système
1	2	3	$\underline{S} = 3G$	Direct
3	1	2	$\underline{S} = 3G e^{j\frac{2\pi}{3}}$	Direct
2	3	1	$\underline{S} = 3G e^{-j\frac{2\pi}{3}}$	Direct
1	3	2	$\underline{S} = 0$	Inverse
2	1	3	$\underline{S} = 0$	Inverse
3	2	1	$\underline{S} = 0$	Inverse

Figure 15.4 Les 6 cas possibles.

Installations triphasées en régime sinusoïdal

Objectifs : Connaître les propriétés des installations triphasées et les possibles couplages, étoile ou triangle, d'un récepteur linéaire. Étudier le cas d'un récepteur triphasé linéaire déséquilibré en courant. On suppose ici que le régime est sinusoïdal permanent triphasé et, en conséquence, que les charges sont linéaires.

I À savoir

- Réseau triphasé (Fig. 16.1)

Un réseau triphasé comporte trois fils de phases et, éventuellement, un fil de neutre.

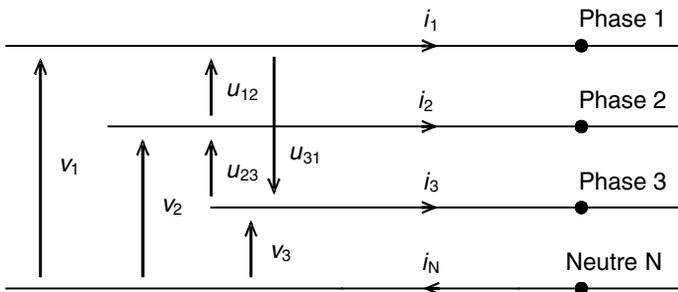


Figure 16.1 Réseau triphasé

- Tensions simples ou étoilées – Tensions composées

Les tensions simples (ou étoilées) v_1, v_2, v_3 sont respectivement prises entre les phases 1, 2, 3 et le neutre N, tandis que les tensions composées $u_{12} = v_1 - v_2, u_{23} = v_2 - v_3, u_{31} = v_3 - v_1$ sont prises entre deux phases (voir Fig. 16.1).

En l'absence de défaut, on peut généralement considérer que (v_1, v_2, v_3) et (u_{12}, u_{23}, u_{31}) sont des systèmes de tensions triphasés équilibrés directs. En choisissant v_1 comme origine des phases, on obtient alors les expressions rassemblées (Fig. 16.2) sachant que les valeurs maximales et efficaces des tensions simples et composées sont reliées par :

$$\boxed{U_{\text{Max}} = V_{\text{Max}} \sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{U = V \sqrt{3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_{\text{Max}} = V \sqrt{2} \\ U_{\text{Max}} = U \sqrt{2} \end{cases}$$

Pour l'écriture des expressions des tensions composées : voir les exercices des [fiches 3 et 4](#).

	Expressions temporelles	Expressions complexes	Système direct
Tensions simples	$\begin{cases} v_1 = V_{\text{Max}} \cos(\omega t) \\ v_2 = V_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_3 = V_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{V}_1 = V \\ \underline{V}_2 = V e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \underline{a}^2 V \\ \underline{V}_3 = V e^{-j\frac{4\pi}{3}} = \underline{a} V \end{cases}$	$(\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3) = (V, \underline{a}^2 V, \underline{a} V)$
Tensions composées	$\begin{cases} u_{12} = U_{\text{Max}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \\ u_{23} = U_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ u_{31} = U_{\text{Max}} \cos\left(\omega t - \frac{7\pi}{6}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} \underline{U}_{12} = U e^{j\frac{\pi}{6}} \\ \underline{U}_{23} = U e^{-j\frac{\pi}{2}} = \underline{a}^2 \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{31} = U e^{-j\frac{7\pi}{6}} = \underline{a} \underline{U}_{12} \end{cases}$	$(\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}) = (\underline{U}_{12}, \underline{a}^2 \underline{U}_{12}, \underline{a} \underline{U}_{12})$

Figure 16.2 Systèmes de tensions triphasés équilibrés directs

- **Représentation vectorielle des tensions simples et composées pour des systèmes triphasés équilibrés directs** (Fig. 16.3)

Les tensions composées u_{12} , u_{23} et u_{31} sont respectivement **en avance** de 30° sur les tensions simples v_1 , v_2 et v_3 .

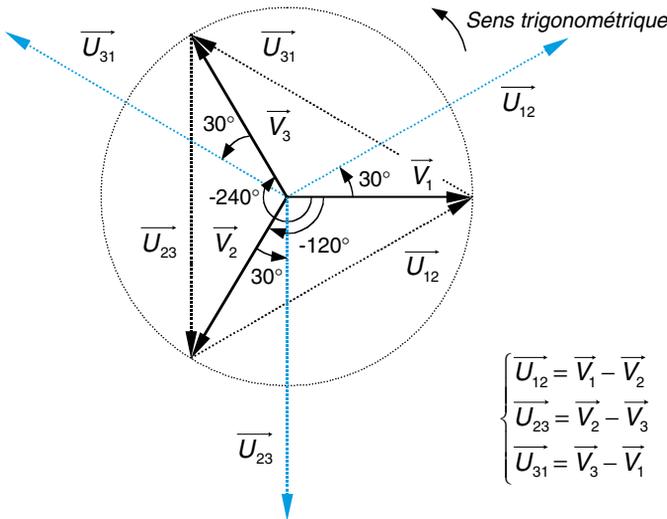


Figure 16.3 Tensions simples et composées – Systèmes triphasés équilibrés directs

Dans la suite du chapitre, les systèmes des tensions (v_1, v_2, v_3) et (u_{12}, u_{23}, u_{31}) sont supposés équilibrés et directs.

- **Système triphasé de courants**

Les courants de ligne i_1, i_2 et i_3 (voir Fig. 16.1) constituent le système triphasé (i_1, i_2, i_3) qui peut être équilibré ou pas en fonction de l'installation.

- **Installation triphasée équilibrée / déséquilibrée**

Alimentée par un système de tensions triphasé équilibré direct, une installation triphasée (ensemble de récepteurs triphasés et monophasés) est dite équilibrée si les courants de ligne constituent un système triphasé équilibré direct ; sinon, elle est dite déséquilibrée.

- **Courant dans le neutre**

Si les courants de ligne constituent un système triphasé équilibré alors le courant dans le neutre est nul ($i_N = 0$). En conséquence, la présence d'un courant dans le neutre indique un déséquilibre de l'installation. Mais attention, en présence de plusieurs récepteurs couplés en étoile pour certains et en triangle pour les autres sur une même ligne triphasée, l'absence de courant dans le neutre ne garantit pas que l'installation soit équilibrée car le neutre n'est pas utilisé dans le cas d'un couplage en triangle d'un récepteur triphasé (voir paragraphe « Méthodes »).

II Méthodes

En régime sinusoïdal permanent triphasé, un récepteur triphasé peut être vu comme l'association de trois dipôles monophasés.

- **Couplage étoile d'un récepteur triphasé sur le réseau** (Fig. 16.4)

Chaque dipôle est relié entre une phase et le neutre. Soumis à une tension simple, il est traversé par un courant de ligne. La loi des nœuds permet d'écrire :

$$i_N = i_1 + i_2 + i_3$$

- **Récepteur triphasé représenté par trois impédances en étoile**

Chaque dipôle D_k est constitué d'une impédance \underline{Z}_k . On a :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \text{avec} \quad \underline{I}_1 = \frac{V_1}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{I}_2 = \frac{V_2}{\underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \underline{I}_3 = \frac{V_3}{\underline{Z}_3}$$

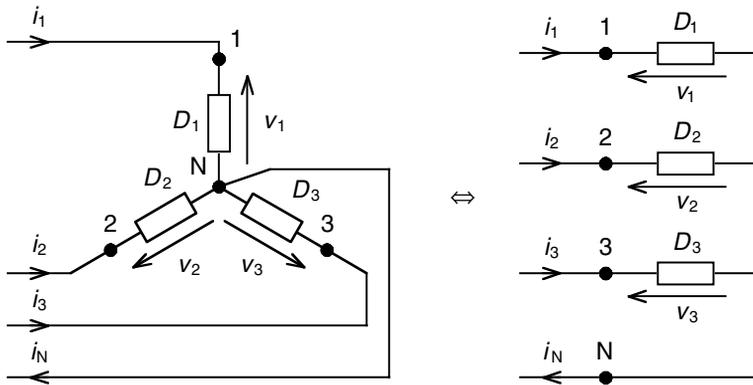


Figure 16.4 Couplage étoile d'un récepteur triphasé

Dans le cas où $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, on a :

$$\underline{I}_1 = \frac{V_1}{\underline{Z}_1} \quad , \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{a}^2 V_1}{\underline{Z}_2} = \underline{a}^2 \underline{I}_1 \quad \text{et} \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{a} V_1}{\underline{Z}_3} = \underline{a} \underline{I}_1$$

En conséquence, le système triphasé de courants (i_1, i_2, i_3) est équilibré direct, et on dit qu'un tel récepteur est équilibré. Le courant dans le neutre est bien sûr nul :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0$$

- Récepteur triphasé représenté par trois modèles de Thévenin en étoile

Chaque dipôle D_k est constitué d'une impédance \underline{Z}_k et d'une source de tension \underline{E}_k en série. On a :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \text{avec} \quad \underline{I}_1 = \frac{V_1 - \underline{E}_1}{\underline{Z}_1} \quad , \quad \underline{I}_2 = \frac{V_2 - \underline{E}_2}{\underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \underline{I}_3 = \frac{V_3 - \underline{E}_3}{\underline{Z}_3}$$

Dans le cas où $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, $\underline{E}_2 = \underline{a}^2 \underline{E}_1$, $\underline{E}_3 = \underline{a} \underline{E}_1$, on a :

$$\underline{I}_1 = \frac{V_1 - \underline{E}_1}{\underline{Z}_1} \quad , \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{a}^2(V_1 - \underline{E}_1)}{\underline{Z}_2} = \underline{a}^2 \underline{I}_1 \quad \text{et} \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{a}(V_1 - \underline{E}_1)}{\underline{Z}_3} = \underline{a} \underline{I}_1$$

En conséquence, le système triphasé de courants (i_1, i_2, i_3) est équilibré direct, et on dit aussi qu'un tel récepteur est équilibré. Le courant dans le neutre est bien sûr nul :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \underline{I}_1(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}) = 0$$

- **Couplage triangle d'un récepteur triphasé sur le réseau** (Fig. 16.5)

Chaque dipôle est relié entre deux phases du réseau. Les tensions appliquées aux bornes des dipôles sont les tensions composées du réseau, et les courants de ligne sont différents des courants de branche (ou de phase) dans les récepteurs. La loi des nœuds permet d'écrire :

$$\begin{cases} i_1 = j_1 - j_3 \\ i_2 = j_2 - j_1 \\ i_3 = j_3 - j_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (\text{car il n'y a pas de fil de neutre}).$$

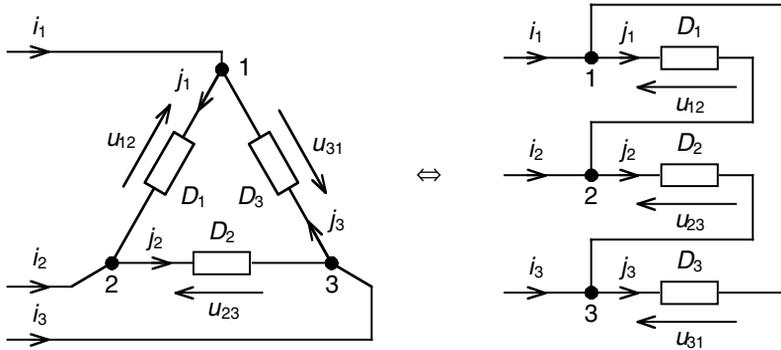


Figure 16.5 Couplage triangle d'un récepteur triphasé

- **Récepteur triphasé représenté par trois impédances en triangle**

Chaque dipôle D_k est constitué d'une impédance \underline{Z}_k . On a :

$$\underline{J}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{J}_2 = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} \quad \text{et} \quad \underline{J}_3 = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_3}$$

Dans le cas où $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, on a :

$$\underline{J}_1 = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1}, \quad \underline{J}_2 = \frac{\underline{a}^2 \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} = \underline{a}^2 \underline{J}_1 \quad \text{et} \quad \underline{J}_3 = \frac{\underline{a} \underline{U}_{12}}{\underline{Z}_3} = \underline{a} \underline{J}_1$$

Le système triphasé de courants (j_1, j_2, j_3) est donc équilibré direct. D'où :

$$\underline{I}_1 = \underline{J}_1 - \underline{J}_3 = (1 - \underline{a}) \underline{J}_1 \quad \text{qui s'écrit aussi} \quad \underline{I}_1 = \underline{J}_1 \sqrt{3} e^{-j\pi/6}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{J}_2 - \underline{J}_1 = (\underline{a}^2 - 1) \underline{J}_1 = \underline{a}^2 (1 - \underline{a}) \underline{J}_1 = \underline{a}^2 \underline{I}_1$$

$$\underline{I}_3 = \underline{J}_3 - \underline{J}_2 = (\underline{a} - \underline{a}^2) \underline{J}_1 = \underline{a} (1 - \underline{a}) \underline{J}_1 = \underline{a} \underline{I}_1$$

$$\text{avec (tout calcul fait)} \quad \underline{I}_1 = (1 - \underline{a}) \underline{U}_{12} / \underline{Z}_1 = 3 \underline{V}_1 / \underline{Z}_1$$

En conséquence, le système triphasé de courants (i_1, i_2, i_3) est équilibré direct, et on dit qu'un tel récepteur est équilibré. Les courants de ligne i_1, i_2 et i_3 sont respectivement **en retard** de 30° sur les courants de phase j_1, j_2 et j_3 , et les valeurs maximales et efficaces sont reliées par :

$$\boxed{I_{\text{Max}} = J_{\text{Max}}\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \boxed{I = J\sqrt{3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I_{\text{Max}} = I\sqrt{2} \\ J_{\text{Max}} = J\sqrt{2} \end{cases}$$

- **Récepteur triphasé représenté par trois modèles de Thévenin en triangle**

Chaque dipôle D_k est constitué d'une impédance \underline{Z}_k et d'une source de tension \underline{E}_k en série. On montre similairement que, dans le cas où $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3$, $\underline{E}_2 = \underline{a}^2 \underline{E}_1$ et $\underline{E}_3 = \underline{a} \underline{E}_1$, le récepteur est équilibré.

- **Diagrammes de Fresnel pour une charge triphasée équilibrée** (Fig. 16.6)

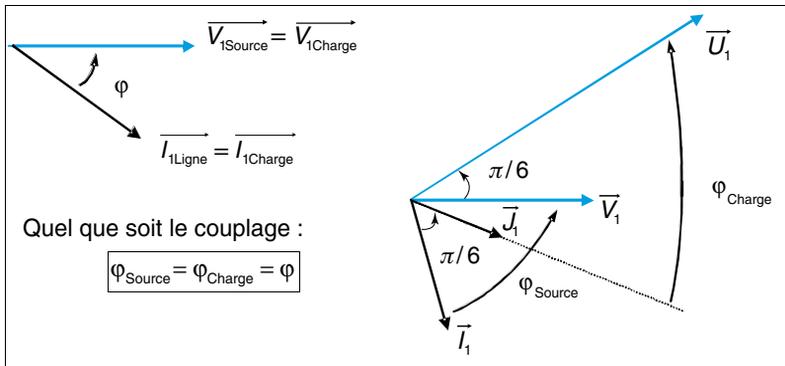


Figure 16.6 Diagrammes de Fresnel – Charge triphasée équilibrée

- **Schéma monophasé équivalent**

Dans le cas d'une installation triphasée linéaire équilibrée en tensions et en courants, on peut se ramener à un schéma équivalent monophasé (Fig. 16.7) entre phase et neutre. Ceci est valable quel que soit le (les) couplage(s) de la (les) charge(s) constituant l'installation.

Remarques :

- Avec le schéma monophasé équivalent, les schémas sont plus simples. Les grandeurs \underline{V} et \underline{I} sont toujours accessibles et mesurables (voir [fiche 17](#), « neutre artificiel »). Attention à ne pas oublier les multiplications par 3 pour les puissances.

- La détermination des éléments du schéma équivalent s'effectue généralement par des essais triphasés (à vide, en court-circuit, rotor bloqué, etc.). Il faut donc faire attention au passage de l'essai en triphasé au modèle monophasé.
- Pour une installation équilibrée (tensions et courants), le schéma triphasé en étoile, d'impédance \underline{Z} entre phase et neutre, est équivalent au schéma triphasé en triangle d'impédance $3 \times \underline{Z}$ entre phases. En effet, pour un récepteur couplé en triangle (voir ci-dessus), \underline{I}_1 peut aussi s'écrire :

$$\underline{I}_1 = (1 - a)\underline{U}_{12}/\underline{Z}_1 = 3\underline{V}_1/\underline{Z}_1 = \underline{V}_1/(\underline{Z}_1/3)$$

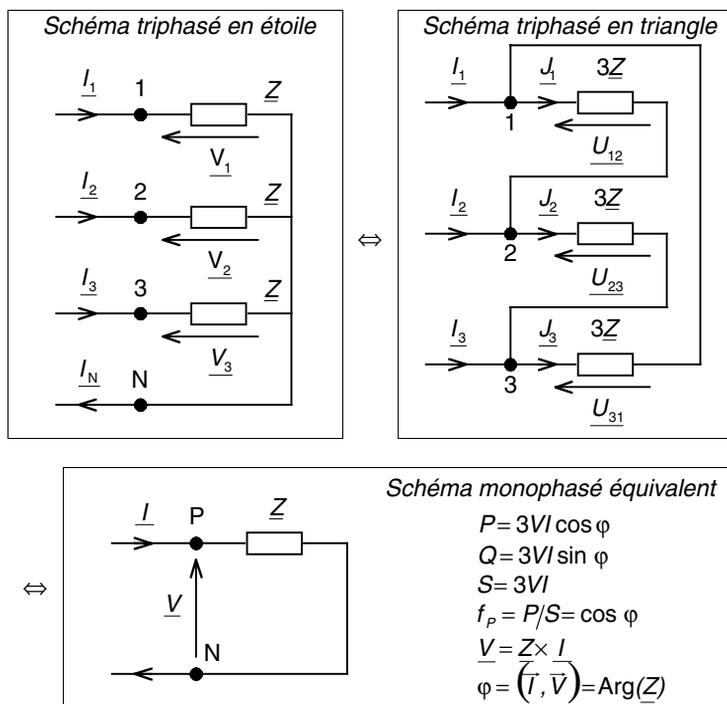


Figure 16.7 Schémas équivalents pour une installation triphasée linéaire équilibrée en tensions et en courants

Récepteur triphasé

On alimente par le réseau triphasé équilibré 230/400 V, 50 Hz, neutre sorti, un récepteur triphasé constitué de trois dipôles couplés en étoile (voir Fig. 16.4).

1. Les trois dipôles sont des résistances égales à $R = 150 \Omega$.

1.1. Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1, I_2, I_3 et celle du courant dans le neutre I_N .

1.2. En supposant le neutre coupé, recalculer les valeurs efficaces des courants I_1, I_2, I_3 et I_N .

2. Les dipôles D_1 et D_2 sont des résistances égales à $R = 150 \Omega$ et le dipôle D_3 est un condensateur C tel que $Z_C = R$ à 50 Hz.

2.1. Calculer les valeurs efficaces des courants de ligne I_1, I_2, I_3 et celle du courant dans le neutre I_N .

2.2. En supposant le neutre coupé, recalculer les valeurs efficaces des courants I_1, I_2, I_3 et I_N , ainsi que les tensions aux bornes des dipôles. Conclure.

Solution

1. Les trois dipôles sont des résistances égales à $R = 150 \Omega$.

1.1. Le système triphasé de tensions (v_1, v_2, v_3) étant équilibré direct, le système triphasé de courants (i_1, i_2, i_3) est aussi équilibré direct car les trois résistances sont égales (voir paragraphe « Méthodes »). En conséquence, les courants de ligne ont même valeur efficace et le courant dans le neutre est nul.

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{V}{R} \approx 1,53 \text{ A} \quad \text{et} \quad I_N = 0 \text{ A}$$

1.2. Puisque $I_N = 0 \text{ A}$, que le neutre soit coupé ou non ne change en rien les valeurs efficaces des courants de ligne.

2. Les dipôles D_1 et D_2 sont des résistances égales à $R = 150 \Omega$ et le dipôle D_3 est un condensateur C tel que $Z_C = R$ à 50 Hz (Fig. 16.8).

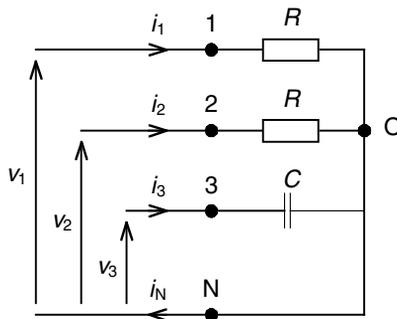


Figure 16.8 Schéma avec neutre relié

2.1. Les courants de ligne ont la même valeur efficace puisque les éléments ont la même impédance $Z_C = R = 150 \Omega$ et sont soumis à la même tension efficace $V = 230 \text{ V}$. D'où :

$$I_1 = I_2 = I_3 = I = \frac{V}{R} \approx 1,53 \text{ A}$$

En prenant la tension $v_1(t)$ pour origine des phases et en appliquant la loi d'Ohm aux bornes de chaque élément, on a :

$$\underline{I}_1 = \frac{V_1}{R} = \frac{V}{R} = I, \underline{I}_2 = \frac{V_2}{R} = \frac{\underline{a}^2 V_1}{R} = \underline{a}^2 I \text{ et } \underline{I}_3 = \frac{V_3}{Z_C} = \frac{\underline{a} V_1}{Z_C e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \underline{ja} \frac{V}{R} = \underline{ja} I$$

En appliquant la loi des nœuds en N, on peut écrire :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = (1 + \underline{a}^2 + \underline{ja}) I$$

La Fig. 16.9 montre la représentation de Fresnel. Une mesure sur ce diagramme ou l'utilisation de la calculette donnent : $I_N \approx 2,17 \text{ A}$ et $\text{Arg}(\underline{I}_N) \approx -105^\circ$.

Calcul littéral. Comme $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, \underline{I}_N peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= -\underline{a}(1 - \underline{j}) I = -e^{j\frac{2\pi}{3}} \times \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}} \right) \times I \\ &= \sqrt{2} \times e^{-j\pi} \times e^{j\frac{2\pi}{3}} \times e^{-j\frac{\pi}{4}} \times I \end{aligned}$$

Soit finalement :

$$\underline{I}_N = \sqrt{2} \times e^{-j\frac{7\pi}{12}} \times I \implies \begin{cases} I_N = \sqrt{2} \times I = \sqrt{2} \times V/R \approx 2,17 \text{ A} \\ \text{Arg}(\underline{I}_N) = -7\pi/12 \text{ rad} = -105^\circ \end{cases}$$

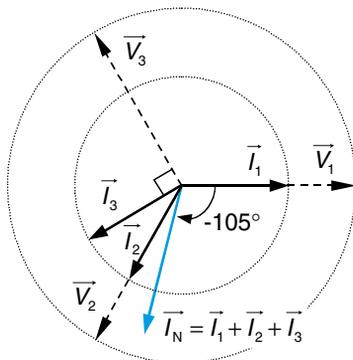


Figure 16.9 Diagramme de Fresnel

2.2. Si le neutre est coupé, la loi des nœuds s'écrit :

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

avec $\underline{I}_1 = \frac{V_1 - V_{ON}}{R}$, $\underline{I}_2 = \frac{V_2 - V_{ON}}{R}$ et $\underline{I}_3 = \frac{V_3 - V_{ON}}{\underline{Z}_C}$ où $\underline{Z}_C = -jR$

D'où :

$$\underline{V}_1 + \underline{V}_2 - 2\underline{V}_{ON} + j(\underline{V}_3 - \underline{V}_{ON}) = 0$$

Comme $\underline{V}_2 = \underline{a}^2 \underline{V}_1$ et $\underline{V}_3 = \underline{a} \underline{V}_1$, on obtient :

$$\underline{V}_1(1 + \underline{a}^2 + j\underline{a}) = \underline{V}_{ON}(2 + j)$$

Et finalement :

$$\underline{V}_{ON} = \underline{V}_1 \frac{1 + \underline{a}^2 + j\underline{a}}{2 + j}$$

L'utilisation de la calculette donne : $V_{ON} \approx 145,5 \text{ V}$ et $\text{Arg}(V_{ON}) \approx -131,6^\circ$

Calcul littéral. V_{ON} peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{V}_{ON} &= -a \underline{V}_1 \frac{1-j}{2+j} = \sqrt{\frac{2}{5}} e^{j(-\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} - \arctan \frac{1}{2})} \times \underline{V}_1 \\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_{ON} = 230 \times \sqrt{2/5} \approx 145,5 \text{ V} \\ \text{Arg}(\underline{V}_{ON}) \approx -2,3 \text{ rad} \approx -131,6^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

La tension entre O et N n'est donc pas nulle ! On en déduit alors les courants de ligne :

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \frac{V_1 - V_{ON}}{R} = (2,18 + 0,73j) \text{ A} = [2,29 \text{ A} ; 0,32 \text{ rad}] \\ \underline{I}_2 = \frac{V_2 - V_{ON}}{R} = (-0,12 - 0,60j) \text{ A} = [0,61 \text{ A} ; -1,77 \text{ rad}] \\ \underline{I}_3 = \frac{V_3 - V_{ON}}{-jR} = (-2,05 - 0,12j) \text{ A} = [2,06 \text{ A} ; -3,08 \text{ rad}] \end{cases}$$

Tensions aux bornes des dipôles :

$$\begin{cases} R \times \underline{I}_1 = \underline{V}_1 - \underline{V}_{ON} = (326,5 + 108,8j) \text{ V} = [344,2 \text{ V} ; 0,32 \text{ rad}] \\ R \times \underline{I}_2 = \underline{V}_2 - \underline{V}_{ON} = (-18,5 - 90,3j) \text{ V} = [92,2 \text{ V} ; -1,77 \text{ rad}] \\ \underline{Z}_C \times \underline{I}_3 = \underline{V}_3 - \underline{V}_{ON} = (-18,5 + 308j) \text{ V} = [308,6 \text{ V} ; 1,63 \text{ rad}] \end{cases}$$

En conclusion, les dipôles dans chaque phase ne fonctionnent plus sous leur tension nominale.

Système déséquilibré par un incident

On alimente par le réseau triphasé équilibré 230/400 V, 50 Hz, avec neutre, trois dipôles identiques couplés en étoile (voir Fig. 16.4), chaque dipôle étant constitué d'une résistance $R = 33 \Omega$ en série avec une inductance $L = 200$ mH.

1. Exprimer et calculer le courant complexe \underline{I}_1 de ligne.
2. Exprimer et calculer le courant complexe \underline{I}_N dans le neutre si, à la suite d'un incident, l'inductance d'un des dipôles est court-circuitée.

Solution

On prend la tension simple \underline{V}_1 comme référence des phases.

1. Courant complexe \underline{I}_1

$$\underline{Z} = R + jL\omega = Ze^{j\varphi} = [Z; \varphi] \implies \begin{cases} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \approx 71\Omega \\ \varphi = \arctan(L\omega/R) \approx 1,09 \text{ rad} \approx 62,3^\circ \end{cases}$$

Soit :

$$\underline{Z} \approx (33 + 62,83j) \Omega \approx [71\Omega; 1,09 \text{ rad}]$$

D'où :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{Z}} \implies \underline{I}_1 = \frac{V}{Ze^{j\varphi}} = \left[\frac{V}{Z}; -\varphi \right] \approx [3,24 \text{ A}; -1,09 \text{ rad}]$$

2. Si une inductance est court-circuitée, le récepteur est déséquilibré et le courant dans le neutre n'est plus nul. On suppose l'inductance du dipôle branché entre la phase 1 et le neutre court-circuitée.

Loi d'Ohm :

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{V}_1}{\underline{R}} = \frac{V}{R}, \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{V}_2}{\underline{Z}} = \underline{a}^2 \frac{V}{Ze^{j\varphi}} \quad \text{et} \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{V}_3}{\underline{Z}} = \underline{a} \frac{V}{Ze^{j\varphi}}$$

Loi des nœuds :

$$\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = \frac{V}{R} + \frac{V}{Ze^{j\varphi}} (\underline{a}^2 + \underline{a}) = \frac{V}{R} - \frac{V}{Z} e^{-j\varphi}$$

Tout calcul fait, on obtient :

$$\underline{I}_N \approx (5,46 + 2,87j) \text{ A} \approx [6,17 \text{ A}; 0,48 \text{ rad}]$$

Puissances en régime sinusoïdal triphase

Objectifs : Calculer et mesurer la puissance absorbée par un circuit électrique linéaire en régime sinusoïdal permanent triphasé.

On se reportera à la [fiche 6](#) pour la définition des puissances et le théorème de Boucherot, et aux [fiches 15 et 16](#) pour les principes des systèmes triphasés et les schémas des couplages étoile et triangle d'un récepteur.

I À savoir

Le théorème de Boucherot est applicable. En conséquence, les puissances actives d'une part, et réactives d'autre part, consommées par les dipôles s'ajoutent ou, dit autrement, les puissances apparentes complexes consommées par les dipôles s'ajoutent.

II Méthodes

- Si le récepteur triphasé n'est pas équilibré ou n'est pas alimenté sous un système de tensions équilibré, seules les formules générales sont applicables (Cas général Fig. 17.1). On note respectivement :

$\varphi_1 = \alpha_{v1} - \alpha_{i1}$, $\varphi_2 = \alpha_{v2} - \alpha_{i2}$, $\varphi_3 = \alpha_{v3} - \alpha_{i3}$ les déphasages entre les tensions simples v_1, v_2, v_3 et les courants de ligne i_1, i_2, i_3 ;

$\Psi_1 = \alpha_{u12} - \alpha_{j1}$, $\Psi_2 = \alpha_{u23} - \alpha_{j2}$, $\Psi_3 = \alpha_{u31} - \alpha_{j3}$ les déphasages entre les tensions composées u_{12}, u_{23}, u_{31} et les courants de phase j_1, j_2, j_3 .

- Si le récepteur triphasé est équilibré et alimenté sous un système de tensions équilibré (\implies système de courants équilibré) alors les formules se simplifient (Cas équilibré Fig. 17.1). On a :

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

$$I = I_1 = I_2 = I_3$$

$$\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$$

$$U = V\sqrt{3}$$

$$U = U_{12} = U_{23} = U_{31}$$

$$J = J_1 = J_2 = J_3$$

$$\Psi = \Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 \quad (\text{et } \varphi = \Psi)$$

$$J = I\sqrt{3}$$

Cas	Récepteur couplé en étoile	Récepteur couplé en triangle
Puissance apparente complexe \underline{S} en volt-ampères (VA)	général	$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = P + jQ \text{ avec}$ $\begin{cases} \underline{S}_1 = \underline{V}_1 \times \overline{\underline{I}}_1 \\ \underline{S}_2 = \underline{V}_2 \times \overline{\underline{I}}_2 \\ \underline{S}_3 = \underline{V}_3 \times \overline{\underline{I}}_3 \end{cases}$
	équilibré	$\underline{S} = 3VIe^{j\varphi}$ $\underline{S} = 3Uj e^{j\Psi}$
Puissance active ou moyenne P en watts (W)	général	$P = P_{\text{Moy}} = P_1 + P_2 + P_3 = \text{Re}(\underline{S}) \text{ avec}$ $\begin{cases} P_1 = V_1 I_1 \cos\varphi_1 \\ P_2 = V_2 I_2 \cos\varphi_2 \\ P_3 = V_3 I_3 \cos\varphi_3 \end{cases}$
	équilibré	$P = 3VI \cos\varphi$ $= \sqrt{3}UI \cos\varphi$ $P = 3UJ \cos\Psi$ $= \sqrt{3}UI \cos\Psi$
Puissance réactive Q en volt-ampère-réactifs (var)	général	$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = \text{Im}(\underline{S}) \text{ avec}$ $\begin{cases} Q_1 = V_1 I_1 \sin\varphi_1 \\ Q_2 = V_2 I_2 \sin\varphi_2 \\ Q_3 = V_3 I_3 \sin\varphi_3 \end{cases}$
	équilibré	$Q = 3V I \sin\varphi$ $= \sqrt{3}UI \sin\varphi$ $Q = 3UJ \sin\Psi$ $= \sqrt{3}UI \sin\Psi$
Puissance apparente S en volt-ampères (VA)	général	$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \underline{S} $ <p>(Attention ! $S \neq S_1 + S_2 + S_3$)</p>
	équilibré	$S = 3VI$ $= \sqrt{3}UI$ $S = 3UJ$ $= \sqrt{3}UI$
Facteur de puissance	général	$f_p = \frac{P}{S}$
	équilibré	$f_p = \cos\varphi$ $f_p = \cos\Psi$

Figure 17.1 Puissances en régime sinusoïdal triphasé (convention récepteur)

III Compléments

Si le système est équilibré en tension et en courant, la puissance instantanée pour un couplage étoile $p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3$ est égale à $p = 3VI \cos\varphi$ qui est la puissance

active. De même, $p = u_{12}j_1 + u_{23}j_2 + u_{31}j_3$ est égale à $p = 3UJ \cos \Psi$ pour un couplage triangle. Autrement dit, la puissance fluctuante (voir [fiche 6](#)) est nulle ce qui constitue un avantage important pour les machines triphasées : ces dernières fourniront ou absorberont un couple constant (pas de couple fluctuant alternativement freinant puis entraînant), d'où pas de vibrations ou résonances mécaniques.

IV Mesures

- **Création d'un neutre artificiel**

Si on dispose d'une ligne à trois fils (sans neutre), on peut toujours créer un point neutre artificiel en connectant en étoile trois résistances égales de grande valeur – typiquement 100 kΩ – (Fig. 17.2). Ainsi, le point neutre d'une installation triphasée est toujours accessible à la mesure. Certains wattmètres intègrent ce montage.

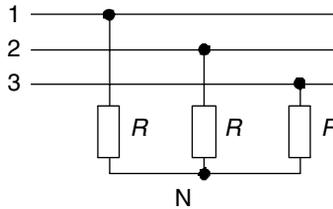


Figure 17.2 Création d'un neutre artificiel

- **Utilisation d'appareils triphasés**

Puissancemètre numérique triphasé

Ce type d'appareil intègre un grand nombre de fonctions : puissances active, réactive, et apparente, facteur de puissance, tension et courant efficaces, fréquence, etc. (voir [fiche 6](#)). Selon l'appareil, la mesure peut se faire sur un système équilibré ou pas.

- **Utilisation de wattmètres monophasés**

On montre que la puissance apparente complexe évaluée sur la ligne d'alimentation s'écrit :

$$\underline{S}_{\text{Ligne}} = \underline{S}_{\text{Charge}} = \underline{V}_1 \times \underline{I}_1 + \underline{V}_2 \times \underline{I}_2 + \underline{V}_3 \times \underline{I}_3$$

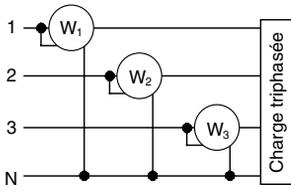
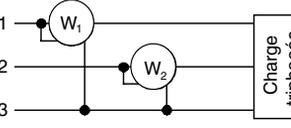
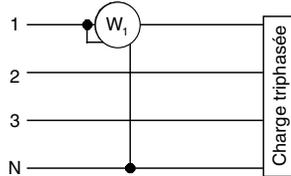
D'où : $P_{\text{Ligne}} = P_{\text{Charge}} = V_1 I_1 \cos \varphi_1 + V_2 I_2 \cos \varphi_2 + V_3 I_3 \cos \varphi_3$

$$Q_{\text{Ligne}} = Q_{\text{Charge}} = V_1 I_1 \sin \varphi_1 + V_2 I_2 \sin \varphi_2 + V_3 I_3 \sin \varphi_3$$

En conséquence, on mesure les puissances absorbées par l'installation sur la ligne d'alimentation.

Mesure de la puissance active (Fig. 17.3)

P_1 , P_2 et P_3 sont respectivement les valeurs indiquées par les wattmètres W_1 , W_2 et W_3 . On suppose le système des tensions (v_1, v_2, v_3) équilibré direct.

	Schéma	Puissance active	Conditions de validité
Montage à trois wattmètres		$P = P_1 + P_2 + P_3$	Charge équilibrée (*) ou pas. Ligne à 4 fils.
Montage à deux wattmètres		$P = P_1 + P_2$	Charge équilibrée (*) ou pas. Ligne à 3 fils ou courant nul dans le neutre.
Montage à un wattmètre		$P = 3P_1$	Charge équilibrée (*) seulement. Ligne à 3 ou 4 fils.

(*) Charge équilibrée signifie que le système de courants est équilibré, le système de tensions étant supposé équilibré.

Figure 17.3 Mesure de la puissance active

Mesure de la puissance réactive (Fig. 17.4)

P_1 , P_2 et P_3 sont respectivement les valeurs indiquées par les wattmètres W_1 , W_2 et W_3 . On suppose le système des tensions (v_1, v_2, v_3) équilibré direct.

Mesure du facteur de puissance

Si on ne dispose pas d'une pince multi-métrique, on détermine le facteur de puissance à partir des mesures des puissances par : $f_P = P/S = P/\sqrt{P^2 + Q^2}$.

	Schéma	Puissance réactive	Conditions de validité
Montage à trois wattmètres		$Q = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{\sqrt{3}}$	Charge équilibrée (*) ou pas.
Montage à deux wattmètres		$Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2)$	Charge équilibrée (*) seulement.
Montage à un wattmètre (monté en varmètre)		$Q = \sqrt{3}P_1$	Charge équilibrée (*) seulement.

(*) Charge équilibrée signifie que le système de courants est équilibré, le système de tensions étant supposé équilibré.

Figure 17.4 Mesure de la puissance réactive

Système déséquilibré par un incident

On alimente par le réseau triphasé équilibré 230/400 V, 50 Hz, avec neutre, trois dipôles inductifs identiques de résistance $R = 33 \Omega$ et d'inductance $L = 200 \text{ mH}$, couplés en étoile (voir [fiche 16](#), deuxième exercice).

1. Calculer les puissances active et réactive consommées par le récepteur.
2. On réalise un montage à 2 wattmètres. Calculer les indications des deux appareils.
3. Calculer les puissances active et réactive consommées par le récepteur si, à la suite d'un incident, l'inductance d'un des dipôles est court-circuitée.
4. A-t-on le droit d'utiliser la méthode des 2 wattmètres pour mesurer ces puissances ?
5. On veut relever le facteur de puissance du récepteur (équilibré) à $\cos \varphi' = 0,93$ en connectant trois condensateurs identiques entre phases. Calculer leur capacité.

Solution

1. On applique le théorème de Boucherot :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 3RI^2 \text{ et } Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = 3L\omega I^2$$

Si $I \approx 3,24$ A (voir [fiche 16](#), solution du deuxième exercice), on a :

$$P \approx 1040 \text{ W et } Q \approx 1980 \text{ var.}$$

Remarque : Si on donnait la résistance r entre deux phases (et celle-ci est toujours mesurable en pratique), la puissance active serait donnée par :

$P = \frac{3}{2}rI^2$. Cette formule est valable quel que soit le couplage du récepteur triphasé équilibré.

2. Les puissances actives mesurées avec la méthode des deux wattmètres sont :

$$P_1 = U_{13}I_1 \cos(\vec{I}_1, \vec{U}_{13}) \text{ et } P_2 = U_{23}I_2 \cos(\vec{I}_2, \vec{U}_{23}) \text{ (voir Fig. 17.3)}$$

avec : $U_{13} = U_{23}$, $I_1 = I_2$, $(\vec{I}_1, \vec{U}_{13}) = (\vec{I}_1, \vec{V}_1) + (\vec{V}_1, \vec{U}_{13}) = \varphi - \pi/6 \approx 32,3^\circ$ et

$$(\vec{I}_2, \vec{U}_{23}) = (\vec{I}_2, \vec{V}_2) + (\vec{V}_2, \vec{U}_{23}) = \varphi + \pi/6 \approx 92,3^\circ$$

D'où : $P_1 \approx 1091$ W et $P_2 \approx -51$ W.

La puissance active P_2 est négative car le facteur de puissance de la charge inductive est inférieur à 0,5.

Autre solution utilisant les relations de la méthode des deux wattmètres. On a :

$$\begin{cases} P = P_1 + P_2 \\ Q = \sqrt{3}(P_1 - P_2) \end{cases} \implies \begin{cases} P_1 = \frac{1}{2}(P + Q/\sqrt{3}) \approx 1091 \text{ W} \\ P_2 = \frac{1}{2}(P - Q/\sqrt{3}) \approx -51 \text{ W} \end{cases}$$

3. Si une inductance est court-circuitée, le récepteur est déséquilibré. On suppose l'inductance du dipôle branché entre la phase 1 et le neutre court-circuitée. On applique le théorème de Boucherot :

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = R(I_1^2 + 2I^2) \text{ et } Q = Q_2 + Q_3 = 2L\omega I^2$$

avec $I_1 = \frac{V}{R}$ courant dans la phase 1, et $I = \frac{V}{Z}$ courant dans les phases 2 et 3.

Si $I_1 \approx 6,97$ A et $I \approx 3,24$ A (voir [fiche 16](#), solution du deuxième exercice), on a :

$$P \approx 2296 \text{ W et } Q \approx 1319 \text{ var.}$$

4. On ne peut utiliser la méthode des 2 wattmètres, ni pour mesurer la puissance active car le courant dans le neutre n'est pas nul, ni pour mesurer la puissance réactive car la charge n'est pas équilibrée.

5. Le facteur de puissance du récepteur est $f_p = P/S = P/\sqrt{P^2 + Q^2} \approx 0,46$. On applique le théorème de Boucherot :

$$\begin{cases} P' = P + P_C \\ Q' = Q + Q_C \end{cases} \quad \text{avec } P_C = 0, \quad Q = P \tan \varphi \quad \text{et} \quad Q_C = -3C\omega U^2$$

D'où : $C = \frac{P(\tan \varphi - \tan \varphi')}{3\omega U^2} \approx 10^{-5} \text{F}$ soit $C \approx 10 \mu\text{F}$

Installation déséquilibrée élémentaire

Une installation de chauffage est constituée selon le schéma (Fig. 17.5) où $R = 143 \Omega$. On n'a représenté qu'un tiers du montage de mesure.

1. Calculer la valeur efficace des courants, les puissances dissipées dans les résistances et la puissance totale dissipée dans la charge.
2. Construire le diagramme de Fresnel.
3. Calculer les puissances actives et réactives mesurées sur la ligne par les appareils. Conclure.

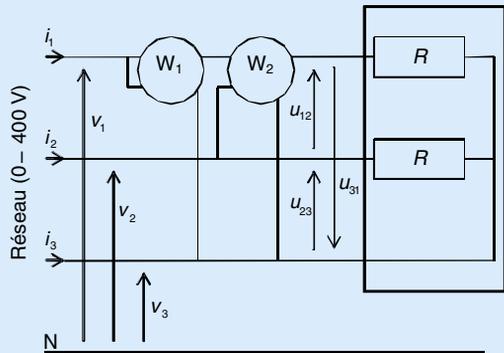


Figure 17.5 Installation

Solution

1. $I_1 = I_2 = I = \frac{U}{R} \approx 2,78 \text{ A}$ et $P_{R1} = P_{R2} = RI^2 \approx 1110 \text{ W}$

Puissance totale dissipée dans la charge : $P = 2P_{R1} \approx 2220 \text{ W}$

$$I_3 = \frac{1}{R}(-U_{13} - U_{23})$$

avec $\underline{U}_{13} = \left[U ; -\frac{\pi}{6} \right] = \frac{U}{2}(\sqrt{3} - j)$ et $\underline{U}_{23} = \left[U ; -\frac{\pi}{2} \right] = -jU$

D'où : $\underline{I}_3 = \frac{U}{2R}(-\sqrt{3} + 3j) = \left[\frac{U\sqrt{3}}{R} ; \frac{2\pi}{3} \right]$ soit $I_3 \approx 4,82$ A

2. Diagramme de Fresnel (Fig. 17.6).

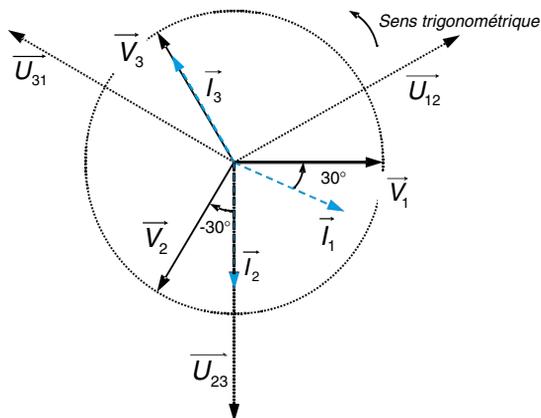


Figure 17.6 Diagramme de Fresnel

3. Puissances actives.

$$P_1 = VI \cos \varphi_1 \text{ avec } \varphi_1 = \pi/6 \text{ rad soit } P_1 \approx 555 \text{ W}$$

$$P_2 = VI \cos \varphi_2 \text{ avec } \varphi_2 = -\pi/6 \text{ rad soit } P_2 \approx 555 \text{ W}$$

$$P_3 = VI_3 \cos \varphi_3 \text{ avec } \varphi_3 = 0 \text{ soit } P_3 \approx 1110 \text{ W}$$

Au total, $P_1 + P_2 + P_3 = 2220 \text{ W} = P$

Puissances réactives. Le wattmètre W_2 mesure le produit scalaire :

$$\vec{U}_{12} \cdot \vec{I}_1 = U_{12} I_1 \cos(-\varphi_1 + \pi/2) = \sqrt{3} \times VI_1 \sin(\varphi_1) = \sqrt{3} \times Q_1$$

$$\text{On a : } Q_1 = VI \sin \varphi_1 = 332 \text{ var}$$

$$Q_2 = VI \sin \varphi_2 = -332 \text{ var}$$

$$Q_3 = VI_3 \sin \varphi_3 = 0 \text{ var}$$

Au total, $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0 \text{ var}$

Objectifs : Connaître les procédés de création d'un champ magnétique tournant en régime sinusoïdal triphasé équilibré. Comprendre le principe de fonctionnement des machines alternatives triphasées synchrones et asynchrones.

I À savoir

• Création d'un champ tournant

Il existe deux procédés :

- la mise en rotation d'une « roue polaire », c'est-à-dire d'un aimant permanent ou d'un bobinage alimenté en courant continu, et
- l'alimentation d'un bobinage triphasé fixe par un système triphasé sinusoïdal équilibré (voir théorème de Ferraris ci-dessous).

• Théorème de Ferraris

Soient trois bobinages, dont les axes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 sont décalés entre eux de $2\pi/3$ rad (Fig. 18.1), alimentés par un système triphasé équilibré de courants :

$$\begin{cases} i_1(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t) \\ i_2(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ i_3(t) = I_{\text{Max}} \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{cases}$$

Chaque bobinage crée dans la direction de son axe un champ magnétique :

$$\begin{cases} \overrightarrow{H_1(t)} = H_{\text{Max}} \cos(\omega t) \times \overrightarrow{u_{x1}} \\ \overrightarrow{H_2(t)} = H_{\text{Max}} \cos(\omega t - 2\pi/3) \times \overrightarrow{u_{x2}} \\ \overrightarrow{H_3(t)} = H_{\text{Max}} \cos(\omega t - 4\pi/3) \times \overrightarrow{u_{x3}} \end{cases}$$

où $\overrightarrow{u_{x1}}$, $\overrightarrow{u_{x2}}$ et $\overrightarrow{u_{x3}}$ désignent respectivement les vecteurs unitaires sur les axes Ox_1 , Ox_2 et Ox_3 .

On montre alors que le champ résultant $\vec{H}(t) = \vec{H}_1(t) + \vec{H}_2(t) + \vec{H}_3(t)$, de module constant $3H_{\text{Max}}/2$, tourne à la vitesse angulaire dite *vitesse de synchronisme* $\Omega_S = \omega$ dans le sens inverse.

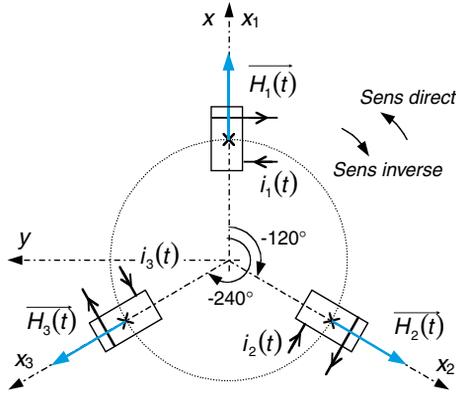


Figure 18.1 Bobinage triphasé

Généralisation : Dans le cas d'un bobinage triphasé *multipolaire* (p paires de pôles) alimenté par un système triphasé sinusoïdal équilibré, le champ tourne à la vitesse de synchronisme $\Omega_S = \omega/p$.

Remarques :

- En permutant deux phases, par exemple les phases 2 et 3, on inverse le sens de rotation du champ.
- En pratique, le bobinage, réparti autour du stator, permet d'obtenir une répartition sinusoïdale du champ dans l'entrefer. Ce champ est radial et prépondérant sur le champ dans les parties ferromagnétiques ($\mu_{\text{Air}} \ll \mu_{\text{Fer}}$).

• **Fém induite**

Un champ $2p$ -polaire tournant à la vitesse Ω devant un bobinage fixe monophasé y induit une force électromotrice $e(t)$ (loi de Lenz-Faraday) alternative sinusoïdale de pulsation $\omega = p\Omega$ (ou de fréquence $f = \omega/2\pi$). La valeur efficace de cette tension est : $E = KNf\Phi_{\text{Max}}$ où N est le nombre de conducteurs actifs du bobinage, f la fréquence (en Hz), Φ_{Max} le flux maximal sous un pôle (en Wb), et K un coefficient voisin de 2 qui dépend de la machine. Pour un ensemble de 3 bobines identiques (on passe de l'une à l'autre par rotation successive de $2\pi/3p$), c'est un système de trois tensions alternatives sinusoïdales triphasées équilibrées qui est induit.

- **Transfert d'énergie dans l'entrefer de la machine**

On considère un champ tournant H_R , $2p$ -polaire, à répartition sinusoïdale tournant à la vitesse Ω , et un bobinage triphasé, tel que défini ci-dessus, alimenté par un système triphasé équilibré de courants (i_1, i_2, i_3) de pulsation ω .

Cet enroulement crée un champ tournant H_B à la vitesse ω/p ; il est le siège d'un système triphasé équilibré de fém (e_1, e_2, e_3) induites par le champ tournant H_R , et donc d'une puissance électromagnétique instantanée $p(t) = e_1 i_1 + e_2 i_2 + e_3 i_3$.

La valeur moyenne de cette puissance (et donc du couple électromagnétique correspondant) est non-nulle à condition que $\Omega = \omega/p$; pour qu'il y ait transfert de puissance électromagnétique entre le champ tournant et le bobinage, il faut que les deux champs tournants H_R et H_B soient synchrones.

II Compléments : principes des machines alternatives

Les machines synchrones ou asynchrones assurent une transformation réversible entre énergie mécanique et énergie électrique.

- **Machine synchrone triphasée**

L'inducteur, situé généralement au rotor, est un aimant (petites machines), ou un bobinage alimenté en courant continu : il crée un champ tournant $2p$ polaire.

- Fonctionnement en générateur : la roue polaire, entraînée à la vitesse Ω (turbine, moteur thermique), induit des fém dans le bobinage triphasé statorique. Celui-ci étant fermé sur une impédance triphasée, des courants induits de pulsation $\omega = p\Omega$ circulent et créent (Ferraris) un champ tournant statorique à la pulsation $\Omega_S = \omega/p = \Omega$: les deux champs sont bien synchrones. La puissance mécanique d'entraînement est transférée au stator sous forme électrique ; le couple électromagnétique est résistant et s'oppose à l'emballement du dispositif d'entraînement.
- Fonctionnement en moteur : le stator, alimenté par un système triphasé équilibré de tensions à la pulsation ω , crée un champ tournant à la vitesse $\Omega_S = \omega/p$. **Si** le rotor tourne à la vitesse $\Omega = \Omega_S$, alors il y a échange d'énergie. La puissance électrique reçue du réseau d'alimentation est transférée au système mécanique entraîné par le rotor. Le moteur est dit synchrone car sa vitesse est constante et ne dépend pas du couple résistant opposé par le système entraîné. Le couple électromagnétique est moteur. Le transfert de puissance ne pouvant se faire qu'à la vitesse de synchronisme, ce moteur ne peut démarrer spontanément. Il faut donc, par exemple, lui adjoindre un variateur de fréquence qui permettra aussi de faire varier sa vitesse.

• Machine asynchrone triphasée

Le stator (inducteur), constitué d'un bobinage triphasé est alimenté par un système triphasé équilibré de tensions à la pulsation ω et crée (Ferraris) un champ tournant au synchronisme $\Omega_S = \omega/p$. Le rotor, bobinage triphasé en court-circuit (rotor bobiné), est donc le siège de courants induits qui s'opposent à la cause qui leur donne naissance : la variation de flux du champ statorique au travers des bobinages rotoriques. Un couple est ainsi engendré et le rotor tourne dans le sens du champ tournant (pour minimiser la variation de flux) à une vitesse Ω (par rapport au stator) inférieure à Ω_S . Le glissement, défini ci-dessous, ne peut pas être nul pour qu'il y ait échange d'énergie entre le stator et le rotor.

$$g = \frac{\Omega_S - \Omega}{\Omega_S}$$

Le rotor voit défilé le champ statorique à la vitesse relative (par rapport à lui-même) $\Omega_{Re1} = \Omega_S - \Omega = g\Omega_S$. Des courants de pulsation $\omega_{Re1} = p\Omega_{Re1} = gp\Omega_S = g\omega$, y sont induits. Un champ tournant à la vitesse $\Omega_{Re1} = \omega_{Re1}/p$ par rapport au rotor est créé (Ferraris). Par rapport au stator, ce champ glisse donc à la vitesse (composition des vitesses) :

$$\Omega_{Re1} + \Omega = (\Omega_S - \Omega) + \Omega = \Omega_S$$

Les champs statorique et rotorique sont bien synchrones : il peut donc bien y avoir transfert d'énergie dans l'entrefer. Le couple électromagnétique est moteur.

Le moteur à cage se comporte comme le moteur à rotor bobiné. Il est le plus répandu car il est robuste, peu coûteux et démarre spontanément. Sa vitesse se règle avec un variateur de fréquence.

En génératrice, cette machine est de plus en plus utilisée (éoliennes) mais elle a besoin d'énergie réactive pour fonctionner.

Principales vitesses de synchronisme

Calculer les 5 premières vitesses de synchronisme en tr/s et en tr/min pour une fréquence de 50 Hz.

Solution

$$\Omega_S = \frac{\omega}{p} \text{ en rad/s} \implies n_S = \frac{f}{p} \text{ en tr/s}$$

p	1	2	3	4	5
n_S (en tr/s)	50	25	16,7	12,5	10
n_S (en tr/min)	3 000	1 500	1 000	750	600

Machines synchrones et asynchrone

1. Soit une machine synchrone utilisée en alternateur. On veut $f = 50$ Hz. Calculer la vitesse de rotation de la turbine pour $p = 1$ ou $p = 2$ (turbo alternateur de centrale thermique conventionnel ou nucléaire) ou $p = 28$ (groupe hydraulique).
2. Pour un moteur asynchrone, on a mesuré $n = 720$ tr/min au fonctionnement nominal à $f = 50$ Hz.
 - 2.1. Calculer le nombre de paires de pôles et le glissement.
 - 2.2. Dans le cas d'un pilotage scalaire ($U/f = \text{cste}$), le glissement ne dépend que du couple résistant. Calculer la vitesse de rotation pour $f = 20$ Hz, 40 Hz, 60 Hz au couple nominal.

Solution

1. On applique $n_S = f/p$ en tr/s

p	1	2	28
n_S (en tr/s)	50	25	1,78
n_S (en tr/min)	3 000	1 500	107

- 2.1. D'après l'exercice 1, la vitesse de synchronisme immédiatement supérieure à $n = 720$ tr/min pour $f = 50$ Hz est $n_S = 750$ tr/min, ce qui correspond à $p = 4$. Le glissement est égal à $g = \frac{n_S - n}{n_S} = 0,04$ soit 4 %.

- 2.2. On a $n = n_S(1 - g)$ avec $g = 0,04$ au couple nominal.

f (en Hz)	20	40	60
n_S (en tr/min)	300	600	900
n (en tr/min)	288	576	864

Régime non-sinusoidal triphasé – Puissances

Objectifs : Calculer et mesurer les différentes puissances d'un circuit électrique en régime périodique triphasé et connaître les problèmes liés à la présence de charges non-linéaires (voir [fiche 1](#)). On se reportera aux [fiches 6, 14 et 17](#) pour la définition des puissances, les mesures et le théorème de Boucherot, et à la [fiche 12](#) pour le développement en série de Fourier d'un signal périodique.

I À savoir

- **Puissances dans le cas général où les tensions et les courants sont périodiques, les systèmes de tensions et de courants étant équilibrés ou pas** (Fig. 19.1)

Notations :

v_1, v_2 et v_3 sont les tensions simples

i_1, i_2 et i_3 sont les courants de lignes

	Unité	Définition
Puissance instantanée	watt (W)	$p = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3$
Puissance active ou moyenne	watt (W)	$P = P_{\text{Moy}} = \langle p \rangle$

Figure 19.1 Puissances (convention récepteur) – Cas général

- **Puissances et facteur de puissance dans le cas fréquent où les tensions sont sinusoïdales et les courants périodiques alternatifs, les systèmes de tensions et de courants étant équilibrés** (Fig. 19.2)

Notations :

V est la valeur efficace des tensions simples v_1, v_2, v_3

$$v_q = V\sqrt{2} \cos[(\omega t - 2(q-1)\pi/3) + \alpha_{V1}] \quad \text{pour } q = 1, 2, 3$$

I est la valeur efficace des courants de lignes i_1, i_2, i_3

$$i_q = \sum_{n=1}^{\infty} I_{Hn} \sqrt{2} \cos[n(\omega t - 2(q-1)\pi/3) + \alpha_{I1Hn}] \quad \text{pour } q = 1, 2, 3$$

$$I = \sqrt{i_q^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{+\infty} I_{Hn}^2} \quad (\text{courant périodique alternatif})$$

I_{H1} est la valeur efficace du fondamental (harmonique 1) de i_1, i_2, i_3

$\varphi_{H1} = \alpha_{V1} - \alpha_{I1H1}$ est le déphasage entre v_1 (resp. v_2, v_3) et le fondamental de i_1 (resp. i_2, i_3)

	Unité	Définition et relations
Puissance active ou moyenne	watt (W)	$P = 3VI_{H1} \cos(\varphi_{H1})$
Puissance apparente	volt-ampère (VA)	$S = 3VI$
Facteur de puissance		$f_p = \frac{P}{S}$
Puissance réactive	volt-ampère-réactif (var)	$Q = 3VI_{H1} \sin(\varphi_{H1})$
Puissance déformante	volt-ampère -déformant (vad)	$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$
Facteur de déphasage		$\cos(\varphi_{H1}) = \frac{P}{3VI_{H1}}$

Figure 19.2 Cas où les tensions sont sinusoïdales et les courants alternatifs

Remarque : La puissance active est transportée uniquement par le fondamental du courant.

II Compléments

• Origines des problèmes

Les harmoniques des courants sont générés par la multiplication des appareils de faibles puissances tels que les ordinateurs, l'éclairage (lampes à décharges, tubes fluorescents), les gradateurs de lumière, les téléviseurs, etc., mais aussi les variateurs de vitesse des machines à courant continu ou alternatif, les alimentations à découpage, les fours à arc, etc...

- **Conséquences des harmoniques des courants**

- Ils provoquent un échauffement des transformateurs, des machines tournantes, des batteries de condensateurs. Le phénomène peut être aggravé, voire destructeur, si certains harmoniques coïncident avec des fréquences de résonance du circuit.
- Ils perturbent le fonctionnement des circuits de contrôle-commande (courants faibles). La cohabitation des câbles « courants forts » et « courants faibles » doit être particulièrement étudiée.
- Ils engendrent des vibrations dans les matériaux (machines tournantes, transformateurs), les usant plus rapidement.
- Ils créent un échauffement supplémentaire des câbles. Le conducteur neutre peut également être le siège d'un courant élevé (voir l'exercice ci-dessous) et peut se révéler sous-dimensionné, surtout si des charges absorbent des courants contenant l'**harmonique 3**.

- **Solutions**

Les solutions dépendent évidemment de la nature des problèmes, mais globalement les courants harmoniques peuvent être atténués par filtrage, sachant que celui-ci est d'autant plus délicat que le rang des harmoniques est faible. Or beaucoup de charges génèrent l'harmonique 3, qui est source de nombreux problèmes. Comme solutions, on peut citer :

- Commande des convertisseurs favorisant les harmoniques de rang élevé (comme par exemple la commande MLI des onduleurs) pour un filtrage plus aisé.
- Couplage adéquat des transformateurs permettant de supprimer les harmoniques 3 car pas de neutre côté réseau : triangle / étoile ou triangle / zig-zag.
- Filtrage passif des harmoniques.
- Augmentation du diamètre du fil de neutre : sa section doit être adaptée. Par exemple, si $TDHI_3 > 33 \%$ (rangs 3 et multiples de 3) alors sa section doit être supérieure à 1,45 fois la section d'un fil de phase ; cas fréquent d'une charge redresseur-condensateur (alimentation à découpage, variateur de vitesse, etc.).
- Utilisation d'un fil de neutre pour chaque phase.
- Filtrage actif : On intercale sur le réseau au plus près de l'équipement pollueur un équipement « compensateur d'harmoniques ».
- Conception de l'équipement : L'équipement est conçu pour ne plus polluer le réseau. Par exemple, un redresseur à absorption sinusoïdale (le courant réseau est sinusoïdal et en phase avec la tension).
- D'une manière générale, à partir de 10 kVA, on préfère utiliser un réseau triphasé à un réseau monophasé car, en régime équilibré, les harmoniques 3 des courants triphasés sont en phase : il n'y a donc pas de courant contenant l'harmonique 3 qui circule entre deux phases. Mais attention à la section du neutre car les harmoniques 3 des courants s'ajoutent dans le neutre.

III Mesures

Les méthodes de mesures vues dans la [fiche 17](#) restent applicables à condition que les appareils puissent mesurer les valeurs efficaces des grandeurs non sinusoïdales, donc contenant des harmoniques. Leur bande passante doit être suffisamment élevée.

- **Cas où la charge est équilibrée, le système de tensions sinusoïdales étant équilibré direct et les courants périodiques alternatifs** (Fig. 19.3)

On calcule la puissance apparente S à partir de la mesure du courant en ligne I faite avec un ampèremètre TRMS et la mesure de la tension simple V faite avec un voltmètre. La puissance active P se calcule à partir de la mesure faite avec un wattmètre W_1 . La puissance réactive Q se calcule à partir de la mesure faite avec un wattmètre W_2 monté en varmètre. On en déduit alors la puissance déformante D (voir [fiche 14](#)).

$$S = 3VI$$

$$P = 3W_1$$

$$Q = W_2\sqrt{3}$$

$$D = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

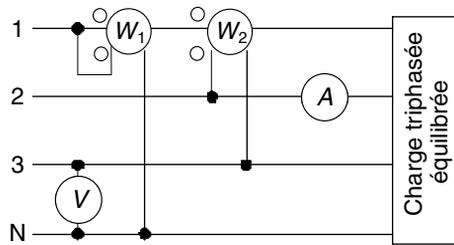


Figure 19.3 Montage de mesure – Charge équilibrée

Charge triphasée non linéaire

Une charge triphasée équilibrée non linéaire, type salle informatique, est alimentée par un système de tensions équilibré (Fig. 19.4). On donne une approximation du chronogramme du courant $i_1(t)$ sur la phase 1 de valeur maximale $I = 24,5$ A, et celui de la tension simple $v_1(t)$ de valeur efficace $V_1 = 230$ V (Fig. 19.5). La série de Fourier du courant $i_1(t)$ est :

$$i_1(t) = \frac{4I}{\pi} \left(\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \cos(3\omega t) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos(5\omega t) + \dots \right)$$

1. Calculer la valeur efficace I_1 du courant dans la phase 1.
2. Déterminer le chronogramme du courant i_N dans le neutre. Déterminer sa fréquence et sa valeur efficace I_N . En déduire le rapport des valeurs efficaces I_N/I_1 . Conclure.

3. Donner l'expression temporelle du fondamental i_{1H1} du courant dans la phase 1. Calculer sa valeur efficace I_{1H1} .
4. En déduire le taux de distorsion harmonique du courant i_1 .
5. Calculer $i_{NH1} = i_{1H1} + i_{2H1} + i_{3H1}$ et la valeur efficace correspondante.
6. Calculer les puissances active, réactive, apparente, déformante et le facteur de puissance pour la phase 1.
7. En déduire les mêmes grandeurs relatives pour l'ensemble de l'installation triphasée.
8. Proposer un montage de mesure. (Rappel : les trois phases sont équilibrées). Indiquer les valeurs lues sur les appareils.
9. Donner l'expression temporelle des 3 harmoniques de courant de rang 3 : i_{1H3} , i_{2H3} , i_{3H3} puis de $i_{NH3} = i_{1H3} + i_{2H3} + i_{3H3}$ et la valeur efficace correspondante. Conclure.
10. Donner l'expression temporelle des 3 harmoniques de courant de rang 5 : i_{1H5} , i_{2H5} , i_{3H5} puis de $i_{NH5} = i_{1H5} + i_{2H5} + i_{3H5}$ et la valeur efficace correspondante.
11. Généraliser : Quels sont les rangs des premiers harmoniques du courant i_N ? Tracer le spectre d'un courant de phase et de i_N .

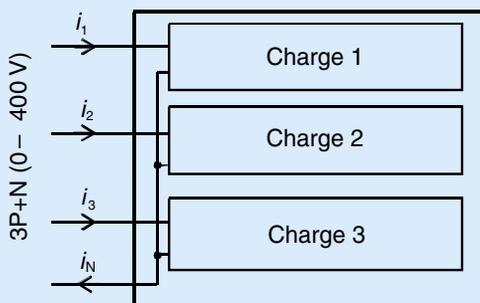


Figure 19.4 Charge triphasée non linéaire

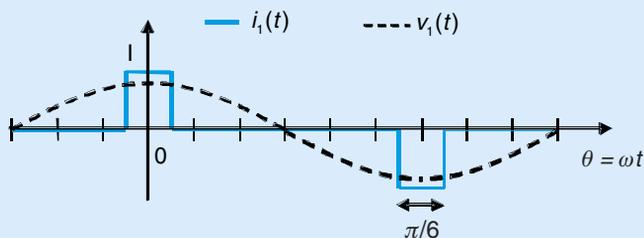


Figure 19.5 Chronogrammes

Solution

1. Valeur efficace du courant dans la phase 1 :

$$I_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/12} i_1^2(\theta) d\theta} = \sqrt{\frac{2I^2}{\pi} \int_0^{\pi/12} d\theta} = \sqrt{\frac{2I^2}{\pi} \times \frac{\pi}{12}} = \frac{I}{\sqrt{6}} \approx 10 \text{ A}$$

2. Les chronogrammes des courants sur les phases 2 et 3 ont la même allure que celui de $i_1(t)$, mais ils sont décalés respectivement de $-2\pi/3 = -120^\circ$ et de $-4\pi/3 = -240^\circ$ par rapport à $i_1(t)$. Le courant dans le neutre est : $i_N = i_1 + i_2 + i_3$ d'où le graphique (Fig. 19.6).

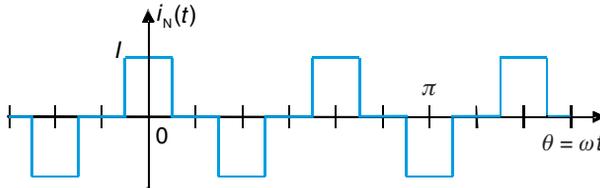


Figure 19.6 Chronogramme du courant dans le neutre

On voit que la période $T_N = T/3$, d'où : $f_N = 3f = 150 \text{ Hz}$. La valeur efficace est :

$$I_N = \sqrt{\frac{6I^2}{\pi} \int_0^{\pi/12} d\theta} = \sqrt{\frac{6I^2}{\pi} \times \frac{\pi}{12}} = \frac{I}{\sqrt{2}} \approx 17,3 \text{ A}$$

Le rapport des valeurs efficaces est : $\frac{I_N}{I_1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

Alors que les systèmes de tensions et de courants sont équilibrés, le courant dans le neutre n'est pas nul, il est même plus élevé que le courant en ligne ! D'où un risque de fusion du neutre et d'incendie, si le neutre n'est pas dimensionné en conséquence.

3. Fondamental et valeur efficace de i_{1HI} .

$$i_{1HI} = \frac{4I}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cos(\omega t) \approx 8,07 \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad I_{1HI} = \frac{4I}{\pi\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 5,7 \text{ A}$$

4. Taux de distorsion harmonique du courant i_1 .

$$THD = \sqrt{\frac{I_1^2}{I_{1HI}^2}} - 1 \approx 1,44 \text{ soit } 144 \%$$

5. On a :

$$i_{1H1} = I_{1H1} \cos(\omega t), \quad i_{2H1} = I_{2H1} \cos(\omega t - 2\pi/3) \quad \text{et} \quad i_{3H1} = I_{3H1} \cos(\omega t + 2\pi/3)$$

avec $I_{1H1} = I_{2H1} = I_{3H1}$. D'où :

$$i_{NH1} = i_{1H1} + i_{2H1} + i_{3H1} = 0 \quad \implies \quad I_{NH1} = 0$$

6. Puissances et facteur de puissance pour la phase 1. Le développement en série de

Fourier du courant i_{H1} montre que : $\varphi_{1H1} = \left(\vec{I}_{1H1}, \vec{V}_1 \right) = 0$, d'où :

$$P_1 = V_1 I_{1H1} \cos(\varphi_{1H1}) = V_1 I_{1H1} \approx 1\,311 \text{ W} \quad Q_1 = V_1 I_{1H1} \sin(\varphi_{1H1}) = 0 \text{ var}$$

$$S_1 = V_1 I_1 \approx 2\,300 \text{ VA} \quad D_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} \approx 1\,890 \text{ vad}$$

$$f_P = \frac{P_1}{S_1} \approx 0,57$$

7. Pour l'installation, on a :

$$P = 3P_1 \approx 3\,933 \text{ W} \quad Q = 0 \text{ var}$$

$$S = 3S_1 \approx 6\,900 \text{ VA} \quad D = \sqrt{S^2 - P^2} = 3\sqrt{S_1^2 - P_1^2} \approx 5\,670 \text{ vad}$$

$$f_P = \frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} \approx 0,57$$

8. Le montage de mesure proposé (Fig. 19.3) convient car la charge est équilibrée. Attention cependant, de nombreuses pinces multifonctions ne donnent pas D et calculent Q par $\sqrt{S^2 - P^2}$ ce qui est inexact si le courant n'est pas sinusoïdal. Valeurs lues sur les appareils : $V = 230 \text{ V}$, $I = 10 \text{ A}$, $W_1 = 1\,311 \text{ W}$, $W_2 = 0$.

9. Harmoniques de rang 3.

$$i_{1H3} = \frac{4I}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \cos(3\omega t) \approx 7,35 \cos(3\omega t)$$

$$i_{2H3} = \frac{4I}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \cos(3(\omega t - 2\pi/3)) \approx 7,35 \cos(3\omega t)$$

$$i_{3H3} = \frac{4I}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \cos(3(\omega t + 2\pi/3)) \approx 7,35 \cos(3\omega t)$$

$$\text{D'où : } i_{NH3} = i_{1H3} + i_{2H3} + i_{3H3} = \frac{4I}{\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \cos(3\omega t) \approx 22 \cos(3\omega t)$$

$$I_{NH3} = \frac{4I}{\pi\sqrt{2}} \sin\left(\frac{3\pi}{12}\right) \approx 15,6 \text{ A}$$

Les harmoniques de rang 3 (à 150 Hz) s'ajoutent en phase dans le neutre, ce qui explique l'importance du courant efficace dans le neutre ($I_N \approx 17,3$ A).

10. Harmoniques de rang 5.

$$i_{1H5} = \frac{4I}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos(5\omega t) \approx 6,03 \cos(5\omega t)$$

$$i_{2H5} = \frac{4I}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos(5(\omega t - 2\pi/3)) \approx 6,03 \cos(5\omega t - 10\pi/3)$$

$$i_{3H5} = \frac{4I}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \cos(5(\omega t + 2\pi/3)) \approx 6,03 \cos(5\omega t + 10\pi/3)$$

D'où : $i_{NH5} = i_{1H5} + i_{2H5} + i_{3H5} = 0$. Les harmoniques de rang 5 s'annulent.

11. Généralisation : les rangs des harmoniques du courant i_N sont impairs et multiples de 3, soit les rangs : 3, 9, 15, 21, etc. La décroissance est assez rapide (en $1/n$), et l'harmonique 3 est prépondérant. La (Fig. 19.7) montre le spectre du courant de phase qui alimente la charge et du courant dans le neutre absorbé.

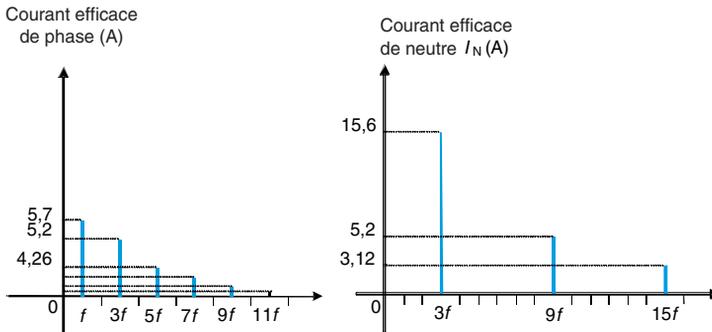


Figure 19.7 Spectres du courant de phase et du courant de neutre absorbé



Guy CHATEIGNER
Michel BOËS
Jean-Paul CHOPIN
Daniel VERKINDÈRE

Électricité en 19 fiches

Régimes sinusoïdal et non-sinusoïdal

Des principes aux applications

Comment aller à l'essentiel, comprendre les méthodes et les démarches avant de les mettre en application ?

Conçue pour faciliter aussi bien l'apprentissage que les révisions, la collection « **EXPRESS** » vous propose une présentation simple et concise de l'Électricité en **19 fiches pédagogiques**.

Chaque fiche comporte :

- les **idées clés** à connaître,
- la **méthode** à mettre en œuvre,
- des **applications** sous forme d'exercices corrigés.

Contenu :

Régime sinusoïdal en monophasé

Régime périodique

Régimes sinusoïdal et non-sinusoïdal en triphasé

Guy Chateigner

est agrégé de génie électrique. Il est Inspecteur d'Académie – Inspecteur Pédagogique Régional.

Michel Boës

est professeur de physique appliquée.

Jean-Paul Chopin

est professeur agrégé de sciences physiques, physique appliquée.

Daniel Verkindère

est professeur agrégé de sciences physiques, physique appliquée.

BTS des filières techniques industrielles (Électrotechnique, Systèmes électroniques, IRIST, CIRA, TPIL, MAI, MI, ATI, Domotique)