Ministère de l'Enseignement Supérieur, de la Recherche Scientifique et de la Technologie
Université Virtuelle de Tunis

Physique - électricité : TC1

Généralités sur le courant électrique

Concepteur du cours:
Jilani LAMLOUMI & Mongia BEN BRAÏEK

I. DEFINITIONS

I. 1. Courant électrique

Considérons deux conducteurs A et B portés aux potentiels V_A et V_B (par exemple $V_A > V_B$). Relions A et B par un fil conducteur, l'ensemble constitue alors un conducteur unique. L'équilibre électrostatique initial est rompu, il y aura transfert de charges entre A et B. Ce transport de charges est appelé ***courant électrique***.

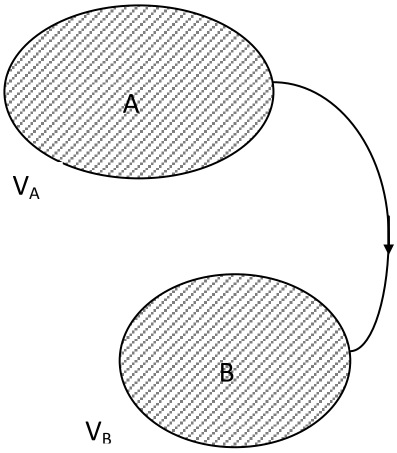


Fig.1

L'équilibre sera atteint lorsque le potentiel devient partout le même, alors aucun courant ne passe. Pour maintenir le passage des charges, on relie les conducteurs à un générateur qui va retirer les charges du conducteur B et les injecter dans le conducteur A, alors un courant permanent circule dans le fil qui relie A et B. C'est ce régime permanent que nous allons étudier. Dans la description précédente, si A et B sont des conducteurs métalliques, les porteurs de charges sont les électrons libres du métal. Dans les électrolytes, ce sont les ions qui interviennent.

Le courant électrique provoque différents effets qui ne se manifestent pas lorsque les charges sont immobiles. Les différents effets du courant électrique sont :

- ***effet thermique ou calorifique*** : Le passage du courant dans un fil conducteur provoque son échauffement ;

-effet chimique : Le passage du courant électrique à travers l'eau acidulée permet de décomposer l'eau en ses substituants ;

- ***effet magnétique*** : Une aiguille aimantée, placée à coté d'un conducteur parcouru par un courant électrique, dévie de sa position initiale.

Le courant électrique est un phénomène orienté ; le sens a été choisi arbitrairement. Le sens conventionnel du courant est opposé au sens du déplacement réel des électrons (conduction électronique). Ce sens correspond à celui du champ électrique.

I. 2. Intensité du courant électrique -Densité de courant

I. 2.1. Intensité du courant électrique

L'intensité d'un courant électrique est définie comme étant la charge électrique passant par unité de temps à travers une section de la région où il s'écoule. Ainsi, si en un temps t, N particules chargées, portant chacune une charge q, passent à travers une section du milieu, la charge totale qui passe étant Q=Nq, l'intensité du courant est :

$$I = \frac{Nq}{t} = \frac{Q}{t} \qquad (1)$$

En fait, l'expression ci-dessus donne la moyenne du courant pendant le temps t, la valeur instantanée du courant étant :

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt}} \qquad (2)$$

Le courant électrique est exprimé en coulombs/seconde, unité appelée ***l'Ampère*** (**A**) en hommage au physicien français André M. Ampère (1775 -1836).

I. 2.2. Vecteur densité de courant

Puisque le courant électrique

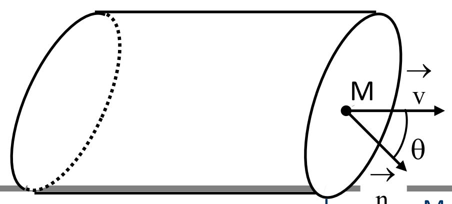


Fig.2

est un déplacement de charges,
la vitesse de charges intervient
par sa grandeur et sa direction.

Considérons un écoulement de particules chargées identiques, de charge q, ayant toutes la même vitesse $\vec{v}$ par rapport à un référentiel lié au conducteur dans lequel elles se déplacent. Le régime étant permanent, le nombre n de particules mobiles par unité de volume est constant.

Soit M un point du conducteur et soit dS un élément de surface entourant M. Quelle est la charge dq qui traverse, pendant le temps dt, l'élément de surface dS défini par le vecteur $\vec{dS}$ porté par la normale $\vec{n}$ orientée dans un sens arbitraire ? C'est la charge contenue dans le cylindre de base dS, dont les génératrices sont parallèles à $\vec{v}$ et de longueur v dt. Elle est égale à : $dq = \rho\,\vec{v}\,dt\,.\vec{dS} = \rho\vec{v}.\vec{n}\,dS\,dt$

ρ étant la densité volumique de charges mobiles en M. L'intensité élémentaire dI du courant traversant dS est :

$$dI = \frac{dq}{dt} = \rho\vec{v}\,.\vec{n}\,dS \qquad (3)$$

L'expression (3) montre que dI n'est rien d'autre que le

flux élémentaire à travers dS du vecteur :

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \qquad (4)$$

Ce vecteur $\vec{j}$ est appelé ***vecteur densité (volumique) de courant***, il s'exprime en A/m^2

Pour une surface S traversée par un courant I, on a alors :

$$\boxed{I = \iint_S \vec{j}\,.\vec{n}\,dS} \qquad (5)$$

En d'autres termes, l'intensité du courant électrique traversant une surface est égale au flux du vecteur densité de courant à travers cette surface.

Remarques

1. Le plus souvent, dans l'étude des conducteurs, on passe sous silence l'agitation thermique des électrons pour ne retenir que leur mouvement de dérive. On simplifie le modèle en considérant la vitesse moyenne comme une vitesse d'entraînement commune à tous les électrons. On écrit ainsi: $\vec{j} = n\,q\,\vec{v} = n(-e)\,\vec{v} = \rho\,\vec{v}$ (n : nombre de charges libres par unité de volume, q = -e : la charge d'un électron libre, $\vec{v}$: la vitesse d'ensemble(ou d'entraînement) des électrons, ρ : la densité volumique des charges libres, elle est différente de la densité volumique totale de charges).

Il faut noter que cette vitesse d'entraînement, dans le cas d'un conducteur, est toujours d'un ordre de grandeur très faible devant celui des vitesses d'agitation. Dans un fil métallique parcouru par un courant raisonnable, la vitesse d'entraînement des électrons est de l'ordre de 10^{-4}m/s. Cette vitesse est très faible devant la vitesse individuelle des électrons, elle traduit un mouvement global des charges. En l'absence de courant, les électrons libres se déplacent individuellement à une très grande vitesse, mais ces déplacements étant isotropes, ils se compensent et la vitesse globale des électrons est nulle.

2. Si le courant circule dans une couche d'épaisseur très faible, celle-ci constitue une nappe de courant modélisée par une surface (S) traversée par un courant superficiel. Le vecteur densité de courant correspondant est défini par : $\vec{j}_s = \sigma\,\vec{v}$ (où σ est la densité superficielle de charges libres)

Soient $d\ell$ un élément de la courbe AB centré en M, $\vec{n}$ le vecteur unitaire de la normale à $d\ell$ contenu dans le plan tangent à (S) en M et

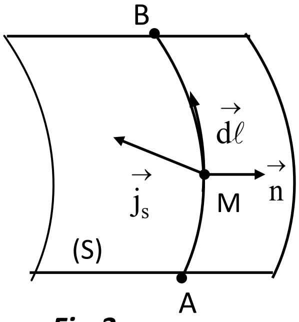


Fig.3

dq la quantité de charges traversant AB pendant le temps dt.

L'intensité du courant sera donnée alors par :

$$I = \int_A^B \vec{j_s}\,.\,\vec{d\ell} = \int_A^B \vec{j_s}\,.\,\vec{n}\,d\ell$$

3. En régime permanent : $\vec{j} = \vec{j}(x,y,z)$

En régime variable : $\vec{j} = \vec{j}(x,y,z,t)$

I. 2.3. conservation du courant électrique - équation de continuité

a. Régime variable

Soit une surface fermée (S) limitant un volume τ et contenant la charge Q(t) à l'instant t. I(t) représente la quantité de charge qui quitte le volume τ par unité de temps. D'après le principe de la conservation de la charge, la quantité de charge qui quitte τ par unité de temps, est égale à la diminution de charge contenue dans le volume τ, par unité de temps.

$$I(t) = -\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{d}{dt}\iiint_\tau \rho d\tau = -\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau$$

Or d'après le théorème de Green -Ostrogradski :

$$I(t) = \oiint_S \vec{j}\,.\,\vec{n}\,dS = \iiint_\tau \mathrm{div}\,\vec{j}\,d\tau$$

D'où : $\iiint_\tau (\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t})\,d\tau = 0$

Cette relation est valable quel que soit le volume considéré, on en déduit une relation locale appelée ***équation de la continuité de la charge*** qui exprime le principe de conservation de la charge électrique.

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0} \qquad (6)$$

b. Régime permanent

La densité volumique de charges ρ en tout point doit rester constante (indépendante du temps). Il en résulte que :

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{j} = 0 \Leftrightarrow \oiint_S \vec{j}.\vec{dS} = 0} \qquad (7)$$

Le champ de vecteurs densité de courant en régime permanent est à flux conservatif, comme le champ électrique en l'absence de distribution volumique de charges.

II. LOI D'OHM

II. 1. Forme locale de la loi d'Ohm -conductivité électrique

Si on applique une différence de potentiel (d.d.p) constante entre les deux extrémités d'un fil conducteur, celui ci est traversé par un courant continu. En tout point du conducteur les charges sont soumises à :

- Une force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$, $\vec{E}$ étant le champ électrique dû à la d.d.p appliquée.

- Une force de frottement proportionnelle à la vitesse $\vec{v} : \vec{F_f} = -k\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse moyenne des charges mobiles et k un coefficient qui dépend de la nature du conducteur. Cette force est due en somme aux différents chocs des électrons sur les ions fixes du réseau du métal.

En régime permanent, la vitesse des charges est telle que la force électrique est équilibrée par la force de frottement, le mouvement des charges se poursuit à une vitesse constante.

On a : $\vec{F} + \vec{F_f} = \vec{0}$

On en déduit que la vitesse de déplacement des charges est donnée par :

$$\vec{v} = \frac{q}{k}\vec{E}$$

En multipliant chacun des membres par ρ et en posant $\gamma = \rho \, \frac{q}{k}$, on obtient finalement :

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E}} \qquad (8)$$

ou encore : $$\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} \qquad (8 \text{ bis})$$

Le vecteur densité de courant est colinéaire au vecteur champ électrique et lui est proportionnel. La constante de proportionnalité γ est appelée ***conductivité électrique.*** Le coefficient $\rho_r = \frac{1}{\gamma}$ est appelé résistivité électrique (à ne pas confondre avec la densité de charges ρ). L'équation (8) est l'expression locale de la ***loi d'Ohm .***

<u>Remarque</u><u>:</u> *Modèle microscopique de la conductivité électrique*.

On peut retrouver les résultats expérimentaux traduits par la loi d'Ohm au moyen d'un modèle microscopique simple. En nous limitant à un modèle classique, on se contentera d'une description très grossière.

Considérons un conducteur neutre formé d'un réseau fixe d'ions positifs, « baignés par une mer d'électrons ». En l'absence de champ électrique imposé, les électrons s'agitent de façon désordonnée, c'est à dire qu'ils ont une vitesse qui peut avoir n'importe quelle direction. Cette direction change sans arrêt par suite des chocs contre les autres particules ou défauts présents dans le conducteur. Il en résulte que dans un conducteur, en l'absence de champ électrique extérieur, les porteurs ne peuvent pas se déplacer collectivement dans une direction privilégiée et l'intensité du courant est nulle.

Si un champ électrique $\vec{E}$ est imposé, le mouvement désordonné des porteurs de charges mobiles est modifié, ils se déplacent collectivement avec une vitesse moyenne $\vec{v}$

L'équation du mouvement d'une particule mobile de masse m et de charge q est :

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt}=q\vec{E}-k\vec{v}(t)$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$\vec{v}(t)=\frac{q\vec{E}}{k}(1-e^{-kt/m})$$

La vitesse moyenne étant supposée nulle à t = 0.

Nous remarquons que le terme exponentiel tend vers zéro pour des valeurs élevées du temps t; le vecteur vitesse admet ainsi une valeur limite : $\vec{v}=\frac{q\vec{E}}{k}$

Cette vitesse limite est obtenue après un régime transitoire caractérisé par une constante de temps égale à : $\tau=\frac{m}{k}$.

L'expression de la vitesse limite devient : $\vec{v}=\frac{q\tau}{m}\vec{E}$

Le vecteur densité de courant est alors donné par :

$$\vec{j}=n\,q\,\vec{v}=\frac{n\,q^2\,\tau}{m}\,\vec{E}=\gamma\,\vec{E}$$

(n est le nombre de porteurs mobiles par unité de volume)

On retrouve bien la loi d'Ohm locale, avec $\gamma=\frac{n\,q^2}{m}\tau$.

On introduit la quantité μ (mobilité des porteurs) telle que :

$$\boxed{\vec{v}=\mu\,\vec{E}} \qquad (9)$$

Soit : $\mu=\frac{q\ \tau}{m}$ ou $\gamma=n\,q\,\mu$

II. 2. Forme intégrale de la loi d'Ohm-

Notion de résistance

En introduisant la notion de résistance d'une portion finie de conducteur, nous allons donner une formulation intégrale à la loi d'Ohm.

II.2.1. Cas général

Soit un conducteur parcouru par un courant électrique de vecteur densité $\vec{j}$. En régime permanent, une portion du conducteur est équivalente à un tube de courant s'appuyant sur deux surfaces (S_1) et (S_2) portées respectivement aux potentiels V_1 et V_2.

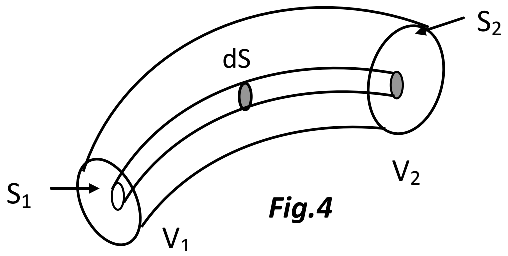


Fig.4

On a : $V_1 - V_2 = \int_1^2 \vec{E}.\vec{d\ell} = \int_1^2 \frac{\vec{j}}{\gamma}.\vec{d\ell} = \int_1^2 \frac{j}{\gamma} d\ell$

L'intensité du courant dI parcourant un tube de courant élémentaire de section dS (Fig.4) est : $dI = \vec{j}.\vec{dS}$ = j dS

D'où : $$V_1 - V_2 = \int_1^2 \frac{dI}{\gamma}\frac{d\ell}{dS} = dI\int_1^2 \frac{d\ell}{\gamma\, dS} = dI\, r$$

Avec : $$\boxed{r=\int_1^2 \frac{d\ell}{\gamma dS}=\frac{1}{\gamma dS}\int_1^2 d\ell=\frac{\ell}{\gamma dS}} \qquad (10)$$

r est une grandeur positive appelée résistance du tube élémentaire de courant.

L'intensité totale I du courant est donnée par :

$$I = \Sigma dI = (V_1 - V_2)\Sigma\frac{1}{r} = \frac{V_1 - V_2}{R}$$

Avec : $$\frac{1}{R} = \sum\frac{1}{r} = \sum\frac{\gamma dS}{\ell}$$

La résistance totale R de la portion de circuit est, par définition, égale au rapport de la différence de potentiel (V_1-V_2) à l'intensité I :

$$\boxed{R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\int_1^2 \vec{E}.\vec{d\ell}}{\iint_S \vec{j}.\vec{dS}}} \qquad (11)$$

Cette expression peut aussi s'écrire sous la forme de la ***loi d'Ohm intégrale***

$$\boxed{V_1 - V_2 = R\,I} \qquad (12)$$

Cette loi a été formulée par le physicien allemand G. Ohm (1787 - 1854).

II.2.2. <u>Résistance d’une portion de conducteur homogène cylindrique</u>

Considérons une portion de conducteur homogène cylindrique de section S, de longueur ℓ (fig.5), parcourue par un courant d'intensité I.

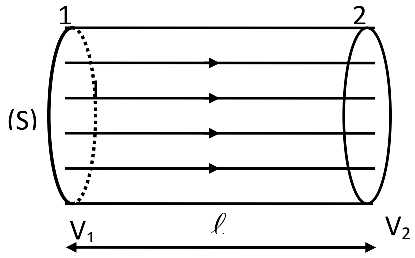


Fig.5

Les lignes de courants sont parallèles à l'axe du conducteur.

D'où la résistance R du conducteur :

$$\boxed{R = \frac{\int_1^2 \vec{E}.d\vec{\ell}}{\iint_S \vec{j}.d\vec{S}} = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S} = \rho_r \frac{\ell}{S}} \qquad (13)$$

II. 3.<u>Unités</u>

Dans le système internationale (SI), on exprime :

- R en volt par ampère, unité appelée l'Ohm (Ω). Un Ohm est

donc la résistance d'un conducteur à travers lequel il circule un courant d'un ampère lorsqu'une différence de potentiel d'un volt est maintenue entre ses extrémités.

- ρ_r en $\Omega\,m$ et γ en $\Omega^{-1}m^{-1}$ (Sm^{-1}).
- la conductance G, inverse de la résistance, en Ω^{-1} ou siemens (S).

La conductivité électrique γ sert à caractériser les propriétés électriques d'un matériau. On classe, grossièrement, les matériaux suivant la valeur de leurs résistivités électriques ρ_r (en Ωm) en conducteurs (ρ_r de l'ordre de 10^{-7} Ωm), isolants (ρ_r supérieure à 10^5 Ωm), semi-conducteurs (ρ_r varie entre 10^4 et 10^6 Ωm). Le tableau ci dessous donne les valeurs de la conductivité et de la résistivité de quelques matériaux à la température de 20°C.

Matériau	**Conductivité γ (Ω^{-1} m^{-1})**	**Résistivité ρ_r =1/γ (Ω m)**
Argent	$6,1\ 10^7$	$1,6\ 10^{-8}$
Cuivre	$5,8\ 10^7$	$1,7\ 10^{-8}$

Aluminium	$3,5\ 10^{7}$	$2,9\ 10^{-8}$
Fer	$1\ 10^{7}$	$1\ 10^{-7}$
Graphite	$8\ 10^{4}$	$1,2\ 10^{-5}$
Germanium	2,2	0,45
Silicium	$1,6\ 10^{-3}$	$6,2\ 10^{2}$
eau pure	$4\ 10^{-6}$	$2,5\ 10^{5}$
verre	$\cong 10^{-12}$	10^{12}
Diamant	$\cong 10^{-12}$	10^{12}
Quartz	$\cong 10^{-16}$	10^{16}

II.4. Association des résistances

II.4.1. *Groupement en série*

On considère deux résistances R_1 et R_2 montées en série. Dans ces conditions, les résistances sont traversées par le même courant d'intensité I. La loi d'ohm permet d'écrire :

$V_A - V_C = (R_1 + R_2)\, I = R\, I$.

Les deux résistances R_1 et R_2 en série sont équivalentes à une résistance unique $R = R_1 + R_2$.

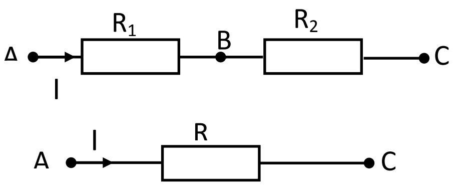


Fig.6

Ce résultat se généralise ainsi au cas de n résistances en série.

$$\boxed{R = \sum_{i=1}^{n} R_i} \qquad (14)$$

II.4.2.*Groupement en parallèle*

On considère deux résistances R_1 et R_2 montées en parallèle. Dans ces conditions, les deux résistances sont soumises à la même différence de potentiel (V_A-V_B) mais sont parcourues par des courants I_1 et I_2

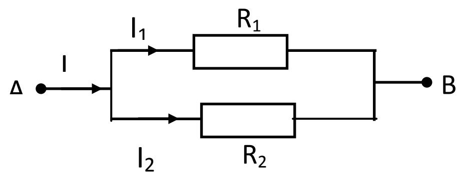


Fig.7

On a : $I = I_1 + I_2 = (\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})(V_A - V_B)$

Les deux résistances R_1 et R_2 en parallèle sont équivalentes à une résistance unique R telle que :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Pour n résistances placées en parallèle, on a :

$$\boxed{\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} \qquad (15)$$

III. LOI DE JOULE

Le déplacement des porteurs dans un conducteur à vitesse constante est lié à l'existence des chocs, que l'on peut interpréter comme un frottement visqueux. Le passage de courant s'accompagne d'une dissipation d'énergie qui se transforme en chaleur. Cette dissipation de chaleur est connue sous le nom ***d'effet Joule.***

Pendant un temps dt, la force $q\vec{E}$ appliquée à un porteur de charge libre effectue un travail :

$$dW = q\,\vec{E}.\vec{d\ell} = q\,\vec{E}.\vec{v}\,dt$$

S'il y a n porteurs par unité de volume, la puissance communiquée par le champ électrique $\vec{E}$ aux porteurs de charges est :

$$dP = \frac{dW}{dt} = n\,q\,\vec{E}.\vec{v} = \rho\,\vec{E}.\vec{v}$$

Pour un conducteur de volume τ, la puissance totale dissipée est:

$$P = \iiint_\tau \rho\,\vec{v}.\vec{E}\,d\tau = \iiint_\tau \vec{j}.\vec{E}\,d\tau = \iiint_\tau \frac{j^2}{\gamma}\,d\tau$$

Soit : $$\boxed{\frac{dP}{d\tau} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{j^2}{\gamma}} \qquad (16)$$

Cette expression représente la loi de Joule sous sa forme locale. La puissance dissipée dépend du carré du vecteur densité de courant; elle est positive : l'effet Joule correspond à une dissipation de chaleur et non à une absorption.

Pour un conducteur filiforme de longueur ℓ et de section S :

$$j = \frac{I}{S} \text{ et } E = \frac{V_1 - V_2}{\ell}$$

D'où : $$P = \iiint_\tau \frac{(V_1 - V_2)I}{\ell\,S}\,d\tau = (V_1 - V_2)I$$

$$\boxed{P = (V_1 - V_2)I = R\,I^2} \qquad (17)$$

Si la résistance est donnée en Ohms et l'intensité en Ampères, la puissance s'exprime en Watts.

IV. CHAMP ELECTROMOTEUR - FORCE ELECTROMOTRICE

IV.1. Champ électromoteur

Considérons un fil conducteur AB, entre les extrémités duquel un générateur maintient une différence de potentiel.

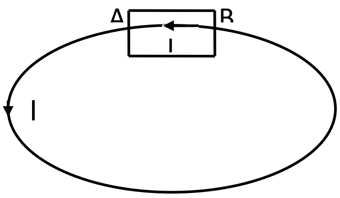


Fig.8

Le fil est parcouru par un courant d'intensité I et le générateur l'est nécessairement aussi. Donc le générateur est parcouru, de B vers A, par le même courant I que celui qui parcourt le fil de A vers B. Dans le fil, orienté de A vers B, les électrons vont de B vers A (le sens positif de I correspond au sens inverse du déplacement des électrons). Autrement dit, V_A-V_B > 0. A l'intérieur du générateur, les électrons vont de A vers B, c'est à dire qu'ils se déplacent en sens opposé au champ électrostatique $\vec{E}_e$ correspondant à la différence de potentiel

V_A-V_B. Les électrons se déplacent donc sous l'effet des forces non électrostatiques, dites « forces motrices », dont la nature dépend du type de générateur envisagé. Ce sont ces forces qui sont responsables du courant. Ces forces motrices agissent sur une particule de charge q au moyen d'un champ appelé ***champ électromoteur*** $\vec{E}_m$ qui est défini par la relation :

$$\vec{F}_{motrice} = q\,\vec{E}_m$$

Ce champ électromoteur rend compte des propriétés électriques locales en tout point à l'intérieur d'un générateur. A l'extérieur du générateur il est nul : $\vec{E}_m = \vec{0}$.

IV.2. Force électromotrice

On appelle " force électromotrice du générateur " **e** (en abrégé f.é.m.), la circulation de $\vec{E}_m$ de B à A (c'est à dire dans le sens où elle est positive).

$$\boxed{e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot \vec{d\ell}} \qquad (18)$$

La force électromotrice **e** s'exprime en Volts.

Remarques

1. La "force électromotrice du générateur : f.é.m. ", **e**, n'est pas du tout une force, et on peut regretter cette appellation traditionnelle. Pour la rendre moins choquante, nous n'utiliserons que la forme abrégée f.é.m.

2. La f.é.m. **e** est positive, c'est à dire A est le pôle positif du générateur ($V_A > V_B$).

IV.3. Loi d'Ohm généralisée - Interprétation énergétique

Considérons un point à l'intérieur d'un générateur parcouru par un courant continu. Nous avons vu que pour rendre compte du mouvement des électrons, il fallait intervenir la force motrice caractéristique du générateur. Chaque électron est soumis donc à une force globale $\vec{F} = q\,(\vec{E}_e + \vec{E}_m)$; $\vec{E}_e$ étant le champ électrostatique dérivant du potentiel dirigé de A vers B ($\vec{E}_e = -\vec{\text{grad}}\,V$). $\vec{E}_m$ est opposé à $\vec{E}_e$ et de module supérieur.

Le travail de la force $\vec{F}$ est :

$$W=\int_B^A \vec{F}.\vec{d\ell}=q\int_B^A \vec{E_e}.\vec{d\ell}+q\int_B^A \vec{E_m}.\vec{d\ell}$$

(Le sens de la circulation de $\vec{F}$ est suivant le sens du champ total, c'est à dire de B vers A)

$$\text{Avec}:\int_B^A \vec{E_e}.\vec{d\ell}=V_B-V_A\,;\quad \int_B^A \vec{E_m}.\vec{d\ell}=e;\int_B^A \vec{F}.\vec{d\ell}=r\,I^2\,t$$

r étant la résistance interne du générateur, faible en général mais pas du tout négligeable.

D'où : $r\,I^2t=q\left(V_B-V_A\right)+q\,e$, avec q = I t

Soit : $e\,I=r\,I^2-\left(V_B-V_A\right)I$ (19)

Cette relation peut être interprétée de la manière suivante: à l'intérieur du générateur, la puissance fournie par le générateur (e I) se trouve sous forme de chaleur dissipée par effet Joule (rI^2) et d'augmentation de l'énergie électrostatique des charges électriques (V_A - V_B) I .

La relation (19) peut encore s'écrire sous la forme suivante :

$$\boxed{V_A-V_B=e-r\,I} \qquad (20)$$

C'est l'expression de la loi d'ohm généralisée pour un générateur.

Remarques

1. Un générateur est traditionnellement représenté par deux « électrodes » parallèles, la plus grande étant le pôle positif.

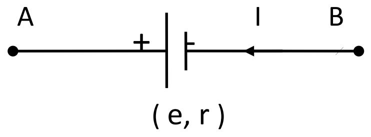


Fig.9

2. L'équation (20) est écrite avec des conventions de signe précises, sur lesquelles il est sans doute utile de revenir.

- A est le pôle positif du générateur.
- I est le courant électrique, compté algébriquement dans le générateur orienté de B vers A.

3. Quand le générateur est en circuit ouvert, I = 0, on a :

$$V_A - V_B = e$$

V. CHAMP CONTRE ELECTROMOTEUR - FORCE CONTRE ELECTROMOTRICE

V.1. Force contre électromotrice

On appelle récepteur un appareil qui transforme une partie de l'énergie électrique reçue en une forme d'énergie autre que calorifique (exemples : moteurs, électrolyseur...)

Un récepteur est caractérisé par une force contre électromotrice (f.c.e.m.), notée **e'** et définie par :

$$e' = \int_A^B \vec{E'}_m . \vec{d\ell}$$

$\vec{E'}_m$ est appelé champ contre électromoteur, il est opposé à $\vec{E}_e$ et de module inférieur.

Le récepteur est schématisé par :

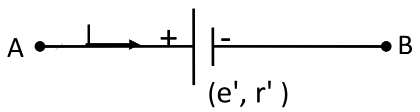


Fig.10

V.2. Loi d'Ohm généralisée pour un récepteur

L'énergie reçue par un récepteur est transformée d'une part en chaleur dans la résistance, d'autre part en une autre forme. Soit le bilan énergétique :

$$\text{Energie reçue}\left(\left(V_A - V_B\right) I\, t\right) = \text{Energie perdue par effet joule}\left(r' I^2 t\right) + \text{Energie transformée}\left(W_T\right)$$

Soit :

$$\left(V_A - V_B\right) I\, t = r' I^2 t + W_T \text{, ou } V_A - V_B = r' I + \frac{W_T}{I\, t}$$

En posant $e' = \frac{W_T}{I\, t}$, on obtient :

$$\boxed{V_A - V_B = r' I + e'} \qquad (21)$$

C'est l'expression de la loi d'ohm généralisée pour un récepteur.

EXERCICES DU CHAPITRE 1

Exercice 1

Dans un milieu conducteur métallique, en équilibre, les porteurs de charges qui sont les électrons libres ont une vitesse moyenne nulle. Placés dans un champ électrique $\vec{E}$, ces porteurs acquièrent une vitesse moyenne d'entraînement $\vec{v}(t)$ et le milieu conducteur est le siège d'un courant de vecteur densité de courant $\vec{j}$. Chaque porteur subit de la part du milieu conducteur une force résultante qui s'oppose à son mouvement. On admet que cette force est proportionnelle à la vitesse $\vec{v}(t)$:

$$\vec{F}_f = -k\,\vec{v}(t).$$

1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement d'un porteur de charge q et de masse m.

2.a. Donner la solution générale de cette équation en supposant que le porteur était immobile à t = 0.

b. Montrer qu'un régime permanent peut être atteint. En déduire la vitesse limite v_ℓ de ce mouvement et la constante de temps τ d'établissement de cette vitesse limite.

3. Le milieu est constitué par un fil cylindrique homogène de section S et de longueur ℓ. La différence de potentiel appliquée à ses bornes est constante et égale à U.

a. Calculer l'intensité I du courant qui traverse ce fil, sachant que le nombre de porteurs q mobiles par unité de volume est n.

b. En déduire la résistance R du fil et la conductivité γ du milieu.

c. Retrouver alors l'expression locale de la loi d'Ohm.

4. Dans le cas où l'on considère un conducteur en cuivre, calculer la constante de temps τ. Conclure.

On donne :

Masse atomique du cuivre : M= 63,5 10^{-3} kg .

Masse volumique : $\mu = 9.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$.

Conductivité électrique : $\gamma = 0{,}58.10^8\,\Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$.

Masse de l'électron : m = 9.10^{-31}kg.

Charge de l'électron : q = -1,6.10^{-19} C.

Nombre d'Avogadro : N = 6.10^{23}.

Solution

1. On applique le principe fondamental de la dynamique à un porteur de charge dans un référentiel galiléen lié au fil :

$$m\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -k\,\vec{v}(t) + q\,\vec{E}$$

Soit encore :

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v}(t) = \frac{q}{m}\vec{E},\ \text{en posant } \tau = \frac{m}{k}\text{, on obtient :}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = \frac{q}{m}E$$

2.a. La solution générale v(t) de cette équation différentielle est la somme de :

- la solution de l'équation sans second membre $\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{\tau} = 0$; soit : $v_1(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

- la solution particulière : $v_2(t) = \frac{q\tau}{m}E$

Soit : $v(t) = v_1(t) + v_2(t) = A\,e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{q\tau}{m}E$

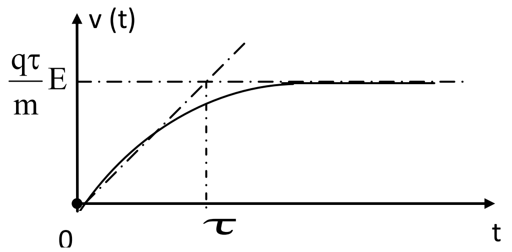
Comme v(t) = 0 à t = 0, on a : $A = -\frac{q\tau}{m}E$.   Soit :

$$v(t) = \frac{q\,\tau}{m}E\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

b. Cette expression montre que le régime permanent est théoriquement obtenu au bout d'un temps infini. La vitesse du porteur tend vers une vitesse limite v_ℓ telle que $v_\ell = \frac{q\,\tau}{m}E$.

Cette vitesse v_ℓ est la vitesse des porteurs en régime permanent.

La constante de temps d'établissement de cette vitesse limite est $\tau = \frac{m}{k}$.



3.a. En régime permanent, la charge qui traverse une section quelconque du fil pendant l'unité de temps est l'intensité :

$$I = jS = n\,q\,v_\ell\,S = n\,q\frac{q\,\tau}{m}S\;E = n\,\frac{q^2\tau}{m}S\frac{U}{\ell} \quad \text{avec} \quad (E = \frac{U}{\ell})$$

b. La loi d'ohm macroscopique s'écrit :

$$U = RI\;.\;\text{D'où: } R = \frac{U}{I} = \frac{m\,\ell}{n\,q^2\;\tau S}$$

La résistance R d'un fil cylindrique de section S et de longueur ℓ, est donnée par:

$$R = \rho\frac{\ell}{S} = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{S}$$

Ce qui donne par identification :

$$\gamma = \frac{n\,q^2}{m}\,\tau$$

c. En utilisant l'expression de l'intensité I, on calcule le module du vecteur densité de courant j dans le fil :

$$j = \frac{I}{S} = \frac{n\,q^2\,\tau}{m}\,E = \gamma\,E$$

D'où l'expression de la loi d'Ohm locale : $j = \gamma\,E$

4. L'expression de la constante de temps τ se déduit de l'expression de la conductivité. Elle est égale à : $\tau = \dfrac{m\,\gamma}{q^2\,n}$, où n est le nombre de charges mobiles (électrons) par unité de volume; il est égal au nombre d'atomes de cuivre par unité de volume (chaque atome de cuivre libère un seul électron libre). Soit : $n = \dfrac{\mu\,N}{M}$.

Il en résulte que : $\tau = \dfrac{m\,M\,\gamma}{q^2\,\mu\,N} = 2{,}4.10^{-14}\,s$

Ce résultat montre que l'établissement d'un régime permanent est pratiquement instantané : les électrons acquièrent immédiatement leur vitesse limite v_ℓ.

Exercice 2

On considère deux conducteurs sphériques creux A et B, concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$).

On remplit l'espace, délimité par les deux coquilles par une substance conductrice homogène de conductivité γ et de permittivité assimilée à celle du vide ε_0. Les deux conducteurs sont reliés à un générateur tel que $V_A > V_B$.

1. Déterminer l'expression de la résistance de la substance.

2. Si C désigne la capacité du condensateur, montrer que $RC\,\gamma = \varepsilon_0$. En déduire l'expression de la capacité d'un condensateur sphérique.

3. Déterminer l'expression de la puissance totale P dissipée par effet Joule dans le milieu situé entre les sphères concentriques de rayons R_1 et R_2.

Solution

1. Les deux conducteurs sont reliés à un générateur, un courant d'intensité I traverse le milieu entre A et B.

Par raison de symétrie, le champ électrostatique en un point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ est radial : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{u}_r$.

L'intensité du courant sur la sphère de rayon r est : $I = \iint_S \vec{j}.\vec{dS}$.

D'après la loi d'Ohm locale $\vec{j} = \gamma\,\vec{E}$, $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont parallèles et de même sens, le vecteur densité de courant est radial, son sens dépend du sens du courant I.

$$I = jS = j\,4\pi r^2 \Rightarrow j = \frac{I}{4\pi r^2}$$

L'expression du champ électrostatique est : $E = \frac{j}{\gamma} = \frac{I}{4\pi r^2 \gamma}$

La différence de potentiel entre les deux conducteurs est :

$$V_A - V_B = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.\vec{d\ell} = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \frac{I}{4\pi\gamma}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{I}{4\pi\gamma}\,\frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2}$$

La résistance R du milieu est définie par V_A-V_B = R I. Ce qui donne : $R = \frac{1}{4\pi\gamma}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$

2. La résistance R est définie par : $R = \frac{\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}\,.d\vec{\ell}}{\oiint_S \vec{j}.d\vec{S}}$. Avec $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et $V_A - V_B = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}.d\vec{\ell}$, on a :

$$R = \frac{V_A - V_B}{\gamma \oiint_S \vec{E}.d\vec{S}}.$$

S étant une surface fermée, le théorème de Gauss nous permet d'écrire:

$$\oiint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

D'où :

$$R = \frac{\varepsilon_0 (V_A - V_B)}{\gamma Q}\text{ ; avec } V_A - V_B = \frac{Q}{C}\text{, ce qui donne: } R\,C\,\gamma = \varepsilon_0.$$

L'expression de la capacité C est donnée par :

$$C = \frac{\varepsilon_0}{R\gamma} = \frac{\varepsilon_0}{R_2 - R_1}\frac{4\pi\gamma R_1 R_2}{\gamma} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

3. Dans un conducteur la puissance dissipée sous forme de chaleur, à l'intérieur d'un volume élémentaire $d\tau$, est donnée par la forme locale de la loi de Joule :

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{j^2}{\gamma} = \gamma E^2$$

La puissance dP consommée par la portion conductrice située entre les sphères de rayons r et r + dr est :

$$dP(r) = \frac{j^2}{\gamma} d\tau = \frac{j^2}{\gamma} 4\pi r^2 \, dr = \frac{I^2}{\gamma} \frac{dr}{4\pi r^2}$$

D'où : $P = \frac{I^2}{4\pi\gamma} \frac{(R_2 - R_1)}{R_1 R_2} = R I^2$.

Exercice 3

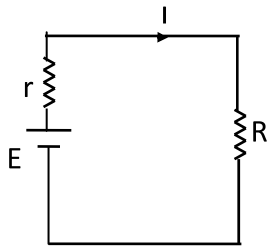
On branche une résistance variable R, aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne r.
Pour quelle valeur de R la puissance dissipée par effet Joule dans celle-ci est maximale ?

Solution

La loi d'Ohm appliquée au circuit fermé est :

$E = (r + R)\, I$. D'où :

$$I = \frac{E}{R + r}.$$



La puissance dissipée par effet Joule dans R est : $P = RI^2 = R \frac{E^2}{(R+r)^2}$.

La puissance maximale est obtenue pour :

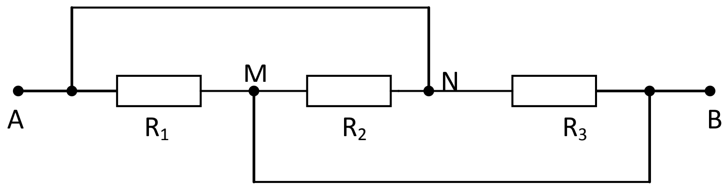
$$\frac{dP}{dR} = \frac{E^2 r^2 - E^2 R^2}{(R+r)^4} = 0$$, ce qui donne r = R.

D'où l'expression de la puissance maximale :

$$P_{max} = P(r = R) = \frac{E^2}{4R}$$

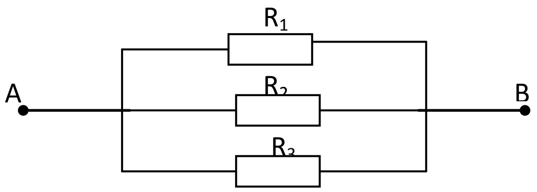
Exercice 4

Déterminer la résistance équivalente entre les bornes A et B du circuit suivant :



Solution

Les bornes M et N sont reliées aux points A et B par des fils de connexions de résistances négligeables, les résistances R_1, R_2 et R_3 sont groupées en parallèle :



bâton
d'ébonite
électrisé

La résistance équivalente entre A et B est donc égale à :

$$R = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$