1ère partie Chapitre III	Le potentiel électrostatique dans le vide

I. Circulation du champ électrostatique

I.1 Définition

La circulation d'un champ de vecteur $\vec{E}$, sur une courbe, de A à B est définie par : $C_{AB}(\Gamma) = \int_A^B \vec{E}.\,d\vec{l}$ où $d\vec{l}$ désigne le déplacement élémentaire le long de la courbe Γ .

I.2 Conservation de la circulation du champ électrostatique

La circulation élémentaire d'un champ $\vec{E}$ créé par une charge ponctuelle q est:

$$\vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r\,.\,d\vec{r} = \frac{q.dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}d(-\frac{1}{r})$$

La circulation de A à B sur la courbe Γ est donc :

$$\int_A^B \vec{E}.d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B})$$

Cette circulation ne dépend pas du chemin Γ pour aller de A à B : la circulation se conserve lorsque nous passons d'un chemin Γ à un chemin Γ ' reliant les points A et B : la circulation du champ est conservative.

On peut donc identifier le champ $\vec{E}$ à champ de gradient :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V(r) \quad \text{avec} \quad V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \text{cte}$$

II. Potentiel crée par une charge ponctuelle

une charge ponctuelle qi placé en O, crée à la distance r le potentiel scalaire V donné par :

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte}$$

- C'est un champ scalaire . Il est défini par les relations suivantes :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V\,, \qquad V_A - V_B = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl}}$$

Remarques :

- Le potentiel V est défini à une constante près. Lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini, on choisit la constante nulle, c.à.d que l'action des charges tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.
- Physiquement, c'est la différence de potentiel entre deux points qui a un sens et qui est mesurable.
- V croît des charges - aux charges + (sens de croissance de V opposé à $\vec{E}$)
- Les surfaces de potentiel constant sont appelées **équipotentielles**
- V est un scalaire exprimé en Volt (V)
- De la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}V}$ on peut calculer $\vec{E}$ connaissant V : on a

- En coordonnées cartésiennes : $E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $E_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

- En coordonnées cylindriques : $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$, $E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}$, $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

- Les champs et les potentiels électriques ont été exprimés dans le cas où les charges sont dans le vide. On a utilisé la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9 \mathrm{SI}$, ε_0 est la permittivité du vide. Dans le cas où on a de la matière à la place du vide on remplace ε_0 par ε ; donc la constante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ change de valeur mais la structure des formules reste la même.

III. Potentiel crée par un ensemble de charges ponctuelles

Le potentiel électrostatique crée en M par un ensemble de charges q_1, q_2, …. q_n est la somme des potentiels crée par chacune des charges au point M :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_i} + cte$$

IV. Potentiel crée par une distribution continue de charges

On passe des charges ponctuelles à la distribution continue de charges en changeant $\sum \frac{q_i}{r_i}$:

- par $\int \frac{\lambda.dl}{r}$ pour un fil chargé → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\lambda.dl}{r} + \mathrm{cte}$,

- par $\iint \frac{\sigma.ds}{r}$ pour une surface chargée → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int \frac{\sigma.ds}{r}$

- par $\iiint \frac{\rho.dv}{r}$ pour un volume chargé → $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho.dv}{r}$.

V. Surfaces équipotentielles et lignes de champ

V.1 surfaces équipotentielles

C'est l'ensemble des points M pour lesquels : V(x,y,z) = cte

V.2 Lignes de champs

Ce sont des lignes tangentes en tout point au champ $\vec{E}$.

Considérons deux point M et M' d'une surface équipotentielle : on a, $\overrightarrow{MM'} = d\vec{l}$ et dV = 0 (potentiel constant).

Or : $dV = \overrightarrow{gradV}.d\vec{l}$ et $\vec{E} = -\overrightarrow{gradV}$ donc $\vec{E}.d\vec{l} = 0$

→ $\vec{E}$ est normale à la surface équipotentielle.

Conclusion : les lignes de champ sont normales aux surfaces équipotentielles.

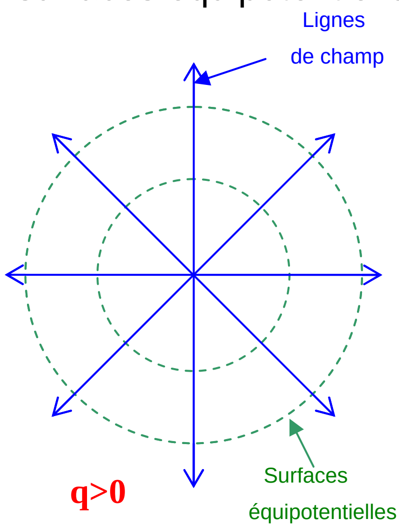
Exemple : Surfaces équipotentielles et ligne de champ dans le cas d'une charge ponctuelle :

- Surfaces équipotentielles :

$$V = cte \rightarrow \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} = cte \rightarrow r = cte$$

→ les surfaces équipotentielles sont des sphères centrés sur la charge q.

- Lignes de champs : elles sont normales aux surfaces équipotentielles
→ ce sont les rayons des sphères centrées sur la charge q.



VI. Travail de la force électrostatique

Le travail élémentaire de la force $\vec{F} = q.\vec{E}$ lors d'un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ de la charge q est :

$$\delta W = \vec{F}.d\vec{l} = q\vec{E}.d\vec{l} = -q.\overrightarrow{gradV}.d\vec{l} = -qdV = -d(qV)$$

Lorsque la charge se déplace de A à B, le travail total est :

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -q\int_A^B dV = -q(V_B - V_A)$$

VII. Energie potentielle d'interaction électrostatique

VII.1 Energie potentielle d'interaction de deux charges ponctuelles

Le travail de la force électrostatique ne dépend pas du chemin suivi, elle dérive donc d'une énergie potentielle W_p telle que :

$$\vec{F} = q.\vec{E} = -\overrightarrow{grad}W_p \text{ , et puisque } \vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \text{ on en déduit : } W_p = q.V$$

W_p est l'énergie potentielle électrostatique, elle sera noté E_e.

Ainsi pour une charge q_1 placé en M_1 sous l'action du potentiel $V_2(M_1)$ créé par une autre charge q_2, l'énergie électrostatique est :

$$E_e = q_1.V_2(M_1) = q_1\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_2\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} = q_2.V_1(M_2) = \frac{1}{2}(q_1.V_2 + q_2.V_1)$$

VII.2 Energie potentielle électrostatique de n charges ponctuelles

Pour une charge q_i placé en M_i sous l'action du potentielle V_i créé en M_i par toute les charges sauf q_i, son energie électrostatique sera q_iV_i. Pour l'ensemble des charges, l'énergie électrostatique sera : $E_e = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i$

VII.3 Energie potentielle d'une distribution continue de charges

On se ramène à un ensemble de charges ponctuelles en divisant la charge totale en charges élémentaires dq :

Distribution volumique : $dq = \rho\, d\tau \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\iiint \rho.V.d\tau$

Distribution surfacique : $dq = \sigma\, dS \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\iint_S \sigma.V.ds$

Distribution linéique : $dq = \lambda\, dl \quad \rightarrow \quad W = \frac{1}{2}\int_C \lambda.V.dl$

V étant le potentiel créé par toutes les charges de la distribution au point où se trouve la charge élémentaire dq.