# Exercices sur les théorèmes des réseaux électriques linéaires en alternatif sinusoïdal

Ce document est une compilation des exercices posés en devoirs surveillés d'électricité au département Génie Electrique et Informatique Industrielle de l'IUT de Nantes. Ces devoirs se sont déroulés généralement sans documents, sans calculette et *sans téléphone portable*…

Les devoirs d'une durée de 80 min sont notés sur 20 points. Donc chaque point proposé au barème correspond approximativement à une activité de 4 min.

Ces exercices correspondent aux chapitres 1 à 7 de la ressource **Baselecpro** sur le site IUTenligne.

Un corrigé avec barème de correction est remis aux étudiants en sortie du devoir (C'est souvent le seul moment où ils vont réfléchir à ce qu'ils ont su (ou pas su) faire dans ce devoir)

Personnellement, je me refuse à manipuler le barème d'un devoir lors de la correction dans le but d'obtenir une moyenne présentable. *(ni trop ni trop peu…)*
La moyenne d'un devoir doit refléter l'adéquation entre les objectifs de l'enseignant et les résultats des étudiants.

Les documents proposés ici sont délivrés dans un format qui permet tout assemblage/désassemblage ou modification à la convenance de l'utilisateur. Les dessins et les équations ont été réalisés avec Word97.

Nos étudiants disposent d'une masse considérable d'informations sur internet. Les enseignants sont maintenant soucieux de leur apprendre à utiliser intelligemment cet immense champ de connaissance. Ils leur apprennent notamment à citer les sources…




Une version de Baselecpro est disponible sous forme d'un livre aux éditions *Ellipses* dans la collection *Technosup* sous le titre

***ÉLECTRICITÉ GÉNÉRALE – Les lois de l'électricité***



Michel PIOU - Agrégé de génie électrique – IUT de Nantes – France

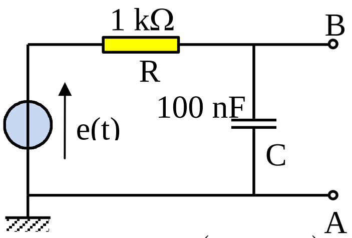
Table des matières

# 1 Questions de cours

Un réseau électrique linéaire en régime alternatif sinusoïdal est considéré entre deux points A et B. Enoncer le théorème Thévenin et le théorème de Norton relatifs à ce réseau. (*Préciser les expressions de* $\underline{E_{eq}}$ , $\underline{Z_{eq}}$ *et* $\underline{I_{eq}}$ ). Quelle relation existe entre la tension équivalente de Thévenin, l'impédance équivalente et le courant équivalent de Norton ?

Réponse : voir Baselecpro :
http://www.iutenligne.net/ressources/baselecpro-cours-et-exercices-d-electricite.html

## 2 *Théorème de Thévenin* (3 pts)




$e(t) = 10.\cos(2000\pi.t)$

On a calculé le modèle équivalent de Thévenin du dipôle A-B ci contre.

En choisissant la convention $e(t) = 10.\cos(2000\pi.t) \leftrightarrow \underline{E} = 10.e^{j0}$, on a trouvé $\underline{E_{TH}} = 8{,}467.e^{-j0{,}561}$ et $\underline{Z_{eq}} = 846{,}7.e^{-j0{,}561}$

**a)** Reconstituer le calcul (expression littérale puis expression numérique) qui a permis d'obtenir $\underline{E_{TH}}$. *Le devoir se déroulant sans calculette, il est simplement demandé de poser le calcul numérique sans l'effectuer.*

**b)** Reconstituer le calcul (expression littérale puis expression numérique) qui a permis d'obtenir $\underline{Z_{eq}}$. *Le devoir se déroulant sans calculette, il est simplement demandé de poser le calcul numérique sans l'effectuer.*

Corrigé :

**a)** La tension équivalente de Thévenin est la tension aux bornes du dipôle AB « à vide ». On peut donc l'obtenir avec la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{E_{TH}} = \underline{E}.\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} = \frac{\underline{E}}{1 + jRC\omega} = \frac{10}{1 + j.10^3.10^{-7}.2000.\pi} = \frac{10}{1 + j.0{,}2.\pi} = 8{,}467.e^{-j0{,}561}$$

**b)** $\underline{Z_{eq}}$ est l'impédance vue entre les bornes du dipôle AB lorsque la source de tension indépendante $e(t)$ est remplacée par son impédance interne (un court-circuit) :

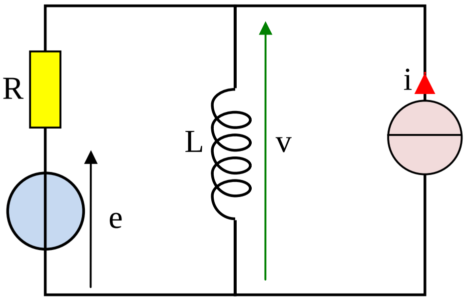
$$\underline{Z_{eq}} = \left(R^{-1} + jC\omega\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1000} + j.10^{-7}.2000.\pi\right)^{-1} = 846{,}7.e^{-j0{,}561}$$

Formule littérale de $\underline{E_{TH}}$ 1 pt

Formule littérale de $\underline{Z_{eq}}$ 1 pt

Identification de $\omega = 2000.\pi\ rad/s$, de $R = 1000\ \Omega$ et de $C = 10^{-7}\ F$ 1 pt

## 3 Réseau électrique linéaire en régime alternatif sinusoïdal - Superposition (4,5 pts)




*L'objectif est de calculer $v(t)$. Les valeurs ont été choisies de façon que les calculs numériques puissent être faits sans calculette.*

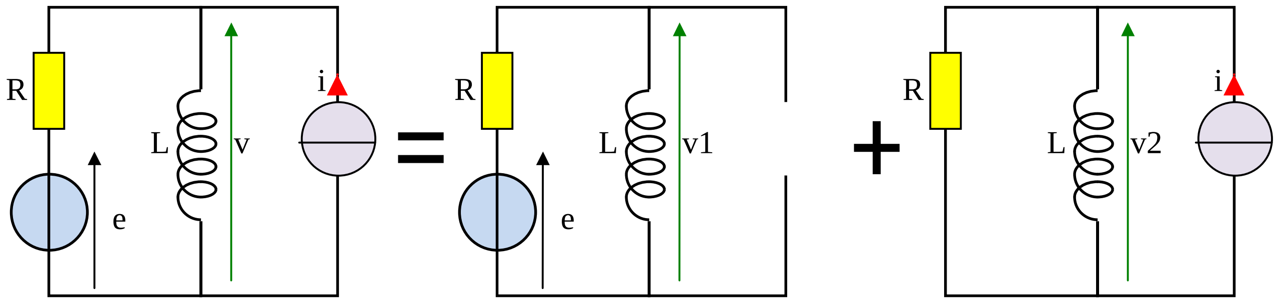
**a)** Illustrer par des schémas la démarche du théorème de superposition appliquée au réseau électrique ci-contre.

**b)** Soient : $e(t)=100.\cos(\omega.t)$ et $i(t)=1.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)$

Pour associer un complexe à une fonction alternative sinusoïdale, on prendra comme convention :
$e(t) = 100.\cos(\omega.t) \leftrightarrow \underline{E} = 100.e^{j0} = 100$.

Sachant qu'à la pulsation considérée, $R = L.\omega = 100\ \Omega$, calculer $\underline{V}$, et en déduire $v(t)$.

Corrigé :



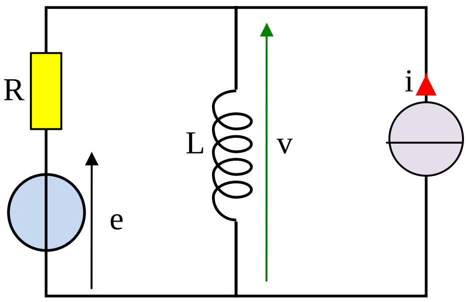

$$\boxed{\underline{V} = \underline{V_1} + \underline{V_2} = \frac{\underline{E}\,.\,jL\omega}{R + jL\omega} + \left(\frac{R\,.\,jL\omega}{R + jL\omega}\right).\,\underline{I}}$$

$$\Rightarrow\ \underline{V} = \frac{\underline{E}\,.\,jR}{R + jR} + \left(\frac{R\,.\,jR}{R + jR}\right).\,\underline{I} = \frac{j\underline{E}}{1 + j} + \left(\frac{jR}{1 + j}\right).\,\underline{I}$$

$$\Rightarrow\ \underline{V} = \frac{j100}{1 + j} + \left(\frac{j100}{1 + j}\right).1.e^{j\frac{\pi}{2}} = \frac{j100}{1 + j} + \left(\frac{j100}{1 + j}\right).\,j = \frac{j100}{1 + j}.(1 + j) = 100\,.\,j = 100.e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ v(t) = 100\,.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)\quad ou\quad v(t) = -100\,.\sin(\omega.t)}$$

## 4 Réseau électrique linéaire en régime alternatif sinusoïdal - Superposition (4,5 pts) Variante




*L'objectif est de calculer* $v(t)$. *Les valeurs ont été choisies de façon que les calculs numériques puissent être faits sans calculette.*

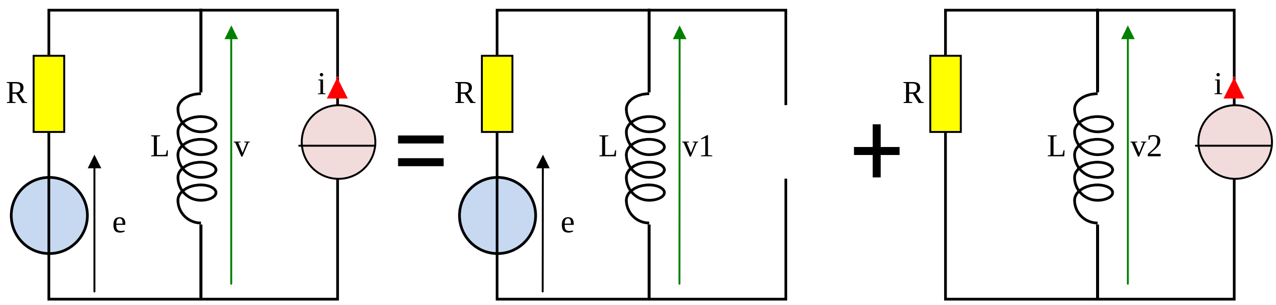
**a)** Illustrer par des schémas la démarche du théorème de superposition appliquée au réseau électrique ci-contre.

**b)** Soient : $e(t) = 100.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)$ et $i(t) = 1.\cos(\omega.t)$

Pour associer un complexe à une fonction alternative sinusoïdale, on prendra comme convention :
$i(t) = 1.\cos(\omega.t) \leftrightarrow \underline{I} = 1 = 1\,.e^{j0}$.

Sachant qu'à la pulsation considérée, $R = L.\omega = 100\ \Omega$, calculer $\underline{V}$, et en déduire $v(t)$.

Corrigé :



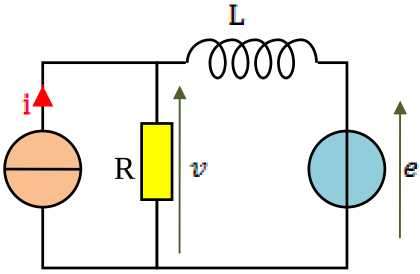

$$\boxed{\underline{V} = \underline{V_1} + \underline{V_2} = \frac{\underline{E}\,.\,jL\omega}{R + jL\omega} + \left(\frac{R\,.\,jL\omega}{R + jL\omega}\right).\,\underline{I}}$$

$$\Rightarrow\ \underline{V} = \frac{\underline{E}\,.\,jR}{R + jR} + \left(\frac{R\,.\,jR}{R + jR}\right).\,\underline{I} = \frac{j\underline{E}}{1 + j} + \left(\frac{jR}{1 + j}\right).\,\underline{I}$$

$$\Rightarrow\ \underline{V} = \frac{j\,.\,100.e^{-j\frac{\pi}{2}}}{1 + j} + \left(\frac{j100}{1 + j}\right).\,1 = \frac{100}{1 + j} + \left(\frac{j100}{1 + j}\right) = \frac{100}{1 + j}\,.(1 + j) = 100 = 100.e^{j\,0}$$

$$\boxed{\Rightarrow\ v(t) = 100\,.\cos(\omega.t)\ \ ou\ \ v(t) = 100\,.\sin\left(\omega.t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

## 5 *Réseau électrique en régime alternatif sinusoïdal. Choix de méthode (4 pts)*




$$i(t) = 2.\cos(\omega.t)$$

$$e(t) = 10.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

On prendra comme convention $i(t) = 2.\cos(\omega.t) \Leftrightarrow \underline{I} = 2.e^{j0} = 2$

Sachant qu'à la pulsation considérée, $R = L.\omega = 5\ \Omega$,

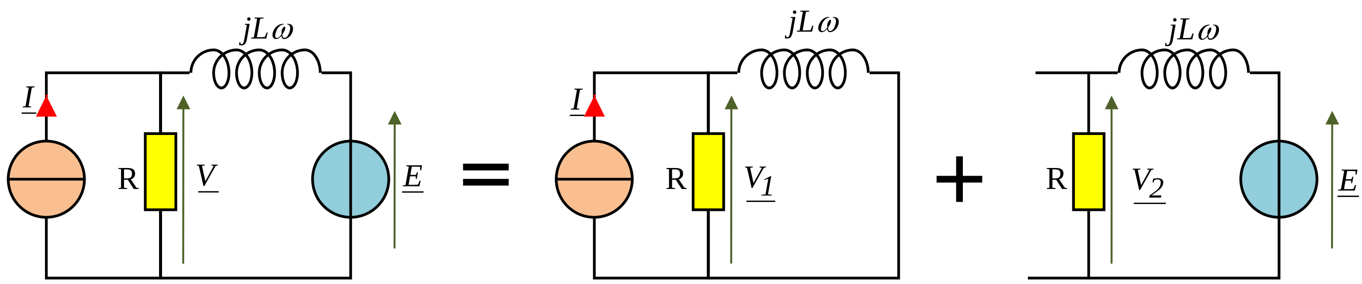
calculer $\underline{V}$, et en déduire $v(t)$.

La méthode n'est pas imposée: on pourra utiliser le théorème de superposition, les transformations Thévenin-Norton …Les valeurs numériques sont choisies pour que les calculs soient simples (sans calculette)

Corrigé :

$$\underline{I} = 2.e^{j0} = 2,\ \underline{E} = 10.e^{-j\frac{\pi}{2}} = -10j,\ R = 5,\ jL.\omega = 5j$$

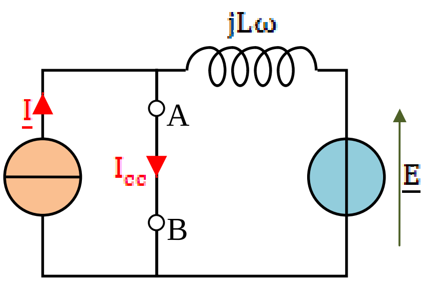
- Méthode du théorème de superposition :




$$\underline{V} = \underbrace{(R /\!/ jL\omega).\underline{I}}_{\underline{V_1}} + \underbrace{\frac{\underline{E}.R}{R + jL\omega}}_{\underline{V_2}} = \left(\frac{R\,.\,jL\omega}{R + jL\omega}\right).\underline{I} + \frac{\underline{E}.R}{R + jL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{(R\,.\,jL\omega\,.\,\underline{I}) + (\underline{E}.R)}{R + jL\omega} = \frac{(5.5j.2) + (-10j\,.5)}{5 + 5j} = \frac{50j - 50j}{5 + 5j} = 0 \quad \text{donc } v(t) = 0$$

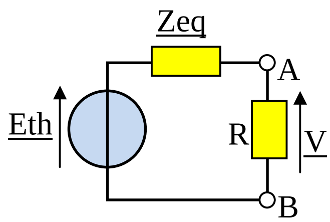
- Méthode de Norton / Thévenin :




$$\underline{I_{cc}} = \underline{I} + \frac{\underline{E}}{jL\omega} = 2 + \frac{-10j}{5j} = 0\ ;\ \underline{Z_{eq}} = jL\omega$$

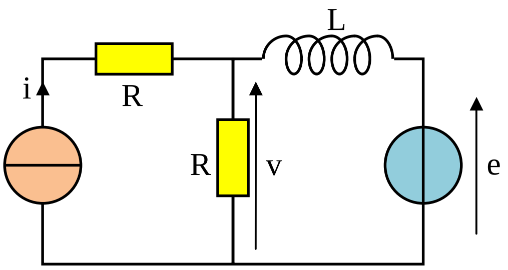
$$\Rightarrow \underline{E_{th}} = \underline{Z_{eq}}\,.\,\underline{I_{cc}} = 0 \ \Rightarrow \underline{V} = \frac{\underline{E_{th}}\,.\,R}{\underline{Z_{eq}} + R} = 0$$

donc $v(t) = 0$




- *On peut utiliser d'autres méthodes…*

# 6 Réseau électrique linéaire en régime alternatif sinusoïdal - Superposition (4,5 pts)

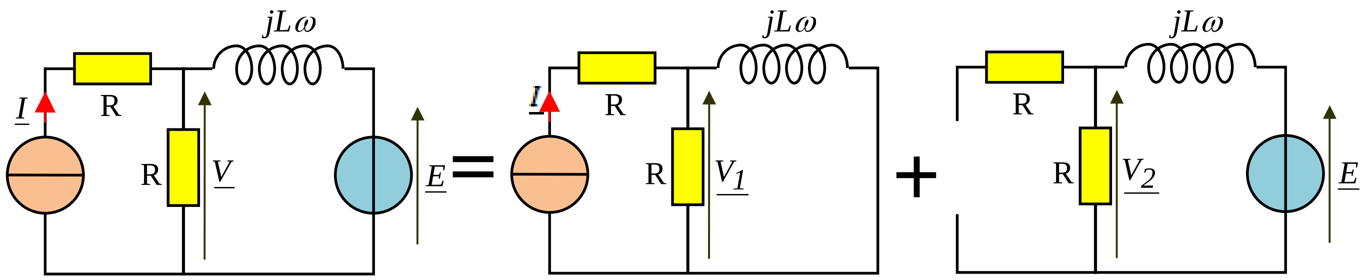



**3.1** A l'aide de deux schémas et d'un court commentaire, décrire la méthode du théorème de superposition appliquée au montage ci-contre pour calculer $v(t)$.

**3.2** Sachant que $i(t)=\hat{I}.cos(\omega.t)$ et $e(t)=\hat{E}.cos(\omega.t)$, calculer $\underline{V}$, et en déduire $v(t)$. On prendra comme convention $\underline{E}=\hat{E}$.

On considèrera par hypothèse que $\hat{E}=R.\hat{I}$.

Corrigé :




$$\underline{V_1}=(R /\!/ jL\omega).\underline{I}=\left(\frac{R.jL\omega}{R+jL\omega}\right).\underline{I} \qquad \underline{V_2}=\frac{R}{R+jL\omega}.\underline{E}$$

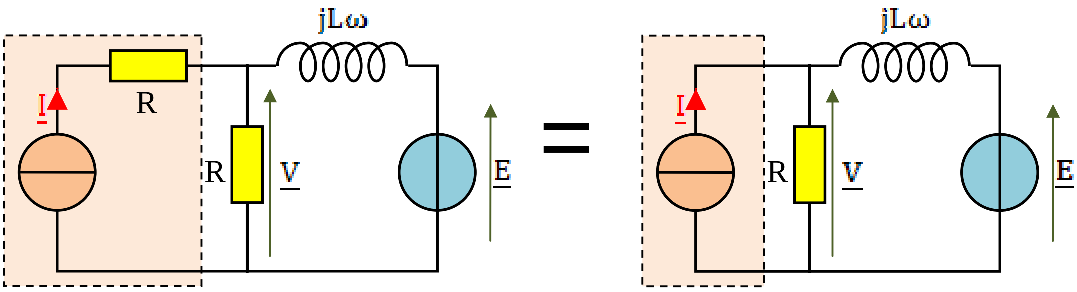
Sachant que $\hat{E}=R.\hat{I}$ et que $i(t)=\hat{I}.cos(\omega.t)$ et $e(t)=\hat{E}.cos(\omega.t)$, on en déduit $\underline{E}=\hat{E}.e^{j0}=R.\hat{I}.e^{j0}=R.\underline{I}$

Sachant que $R=L.\omega$ et $\underline{E}=R.\underline{I}$ :

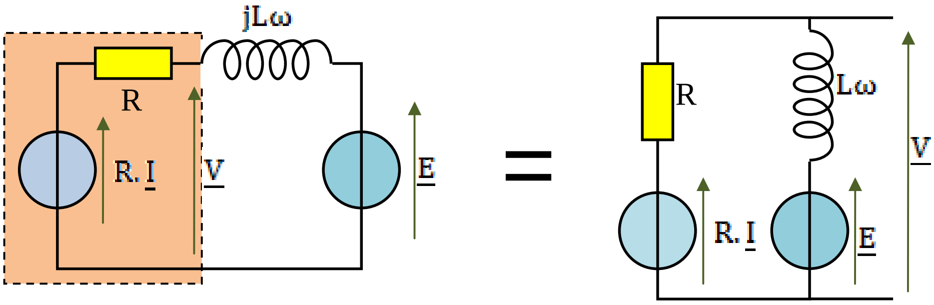
$$\underline{V}=\underline{V_1}+\underline{V_2}=\left(\frac{jL\omega}{R+jL\omega}\right).R.\underline{I}+\frac{R}{R+jL\omega}.\underline{E}=\left(\frac{jL\omega}{R+jL\omega}\right).\underline{E}+\frac{R}{R+jL\omega}.\underline{E}$$

$$\underline{V}=\left(\frac{jL\omega}{R+jL\omega}+\frac{R}{R+jL\omega}\right).\underline{E}=\left(\frac{jL\omega+R}{R+jL\omega}\right).\underline{E}=\underline{E} \quad \text{Donc } v(t)=\hat{E}.cos(\omega.t)$$

*Autre méthode :*




Modèle équivalent
de Norton

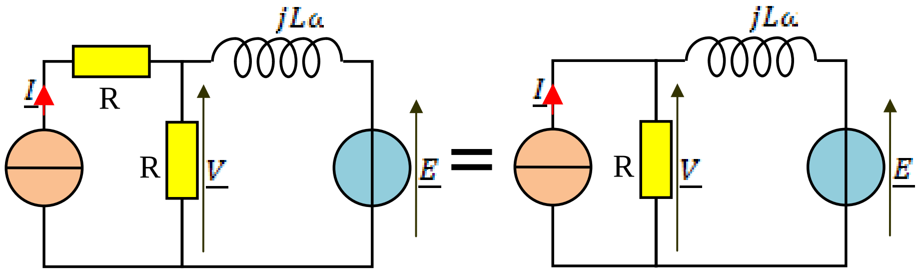


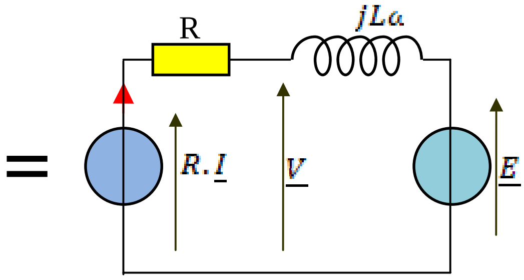

Modèle équivalent
de Thévenin

Théorème de Millman : $\underline{V} = \dfrac{\dfrac{R.\underline{I}}{R} + \dfrac{\underline{E}}{jL\omega}}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega}} = \dfrac{\left(\dfrac{R.\underline{I}}{R} + \dfrac{\underline{E}}{jL\omega}\right).(jRL\omega)}{\left(\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{jL\omega}\right).(jRL\omega)} = \dfrac{jRL\omega.\underline{I} + \underline{E}.R}{jL\omega + R}$

Sachant que $\underline{E} = R.\underline{I}$ : $\underline{V} = \; = \dfrac{jL\omega.\underline{E} + \underline{E}.R}{jL\omega + R} = \left(\dfrac{jL\omega + R}{R + jL\omega}\right).\underline{E} = \underline{E}$ Donc $v(t) = \hat{E}.cos(\omega.t)$

*Autre méthode :*

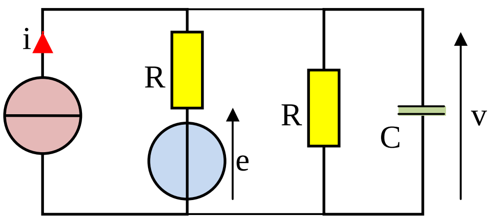



Sachant que $\underline{E} = R.\underline{I}$ ,

La tension aux bornes du dipôle $R + jL.\omega$ est nulle (loi des mailles), donc le courant dans la maille est nul, donc $\underline{V} = \underline{E} - 0\ .\ jL.\omega = \underline{E}$

## 7 Réseau électrique linéaire en régime alternatif sinusoïdal - Superposition (5 pts)




Sachant que $R = 100\,\Omega$ et $\dfrac{1}{C.\omega} = 50\,\Omega$, calculer, pour le schéma ci-contre, l'expression de $v(t)$ sous la forme $v(t) = \hat{V}.\cos(\omega.t + \varphi)$.

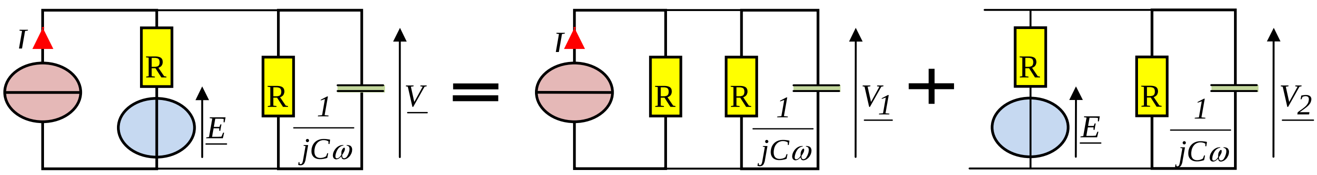
(Sachant que le devoir se déroule sans calculette, on peut garder des résultats avec des expressions en $\sqrt{\ }$).

$e(t) = 4.\cos(\omega.t)$ et $i(t) = 0{,}04.\sin(\omega.t + \pi)$

*… Attention aux sinus et cosinus !*

*Corrigé :*

On applique le théorème de superposition :




Sachant que $e(t) = 4.\cos(\omega.t)$, on pose $\underline{E} = 4.e^{j0}$

et sachant que $i(t) = 0{,}04.\sin(\omega.t + \pi) = 0{,}04.\cos\left(\omega.t + \dfrac{\pi}{2}\right)$, on pose $\underline{I} = 0{,}04.e^{j\frac{\pi}{2}}$

Impédances en parallèle : $\underline{V_1} = \left(\dfrac{R}{2} // \dfrac{1}{jC\omega}\right).\underline{I} = \dfrac{\dfrac{R}{2}.\dfrac{1}{jC\omega}}{\dfrac{R}{2} + \dfrac{1}{jC\omega}}.\underline{I} = \dfrac{\dfrac{R}{2\,jC\omega}}{\dfrac{jRC\omega + 2}{2\,jC\omega}}.\underline{I} = \dfrac{R}{jRC\omega + 2}.\underline{I}$

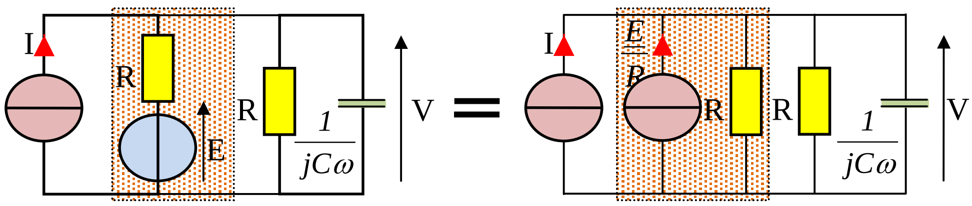
Pont diviseur de tension :

$$\underline{V_2} = \frac{\left(R \,//\, \frac{1}{jC\omega}\right).\underline{E}}{\left(R \,//\, \frac{1}{jC\omega}\right) + R} = \frac{\left(\frac{R}{jRC\omega + 1}\right).\underline{E}}{\left(\frac{R}{jRC\omega + 1}\right) + R} = \frac{\frac{R}{jRC\omega + 1}.\underline{E}}{\frac{R + R.(jRC\omega + 1)}{jRC\omega + 1}} = \frac{R.\underline{E}}{R + R.(jRC\omega + 1)} = \frac{\underline{E}}{2 + jRC\omega}$$

$$\Rightarrow \underline{V_1} + \underline{V_2} = \frac{R}{jRC\omega + 2}.\underline{I} + \frac{\underline{E}}{2 + jRC\omega} = \frac{R.\underline{I} + \underline{E}}{jRC\omega + 2} = \frac{100.0{,}04.e^{j\frac{\pi}{2}} + 4.e^{j0}}{j.\frac{100}{50} + 2} = \frac{4\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}} = 2.e^{j0}$$

Donc $v(t) = 2.cos(\omega.t)$

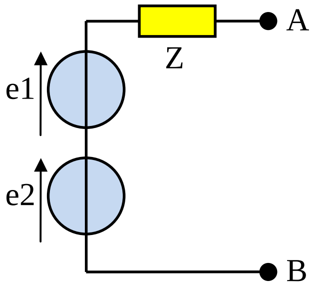
*Autre méthode :*




$$\underline{V} = \left(\frac{R}{2} // \frac{1}{jC\omega}\right).\left(\underline{I} + \frac{\underline{E}}{R}\right) = \frac{\frac{R}{2}.\frac{1}{jC\omega}}{\frac{R}{2}+\frac{1}{jC\omega}}.\left(\underline{I} + \frac{\underline{E}}{R}\right) = \frac{\frac{R}{2\,jC\omega}}{\frac{jRC\omega+2}{2\,jC\omega}}.\left(\underline{I} + \frac{\underline{E}}{R}\right) = \frac{R}{jRC\omega+2}.\left(\underline{I} + \frac{\underline{E}}{R}\right)$$

$$\Rightarrow \underline{V} = \frac{100.\left(0{,}04.e^{j\frac{\pi}{2}} + 0{,}04.e^{j0}\right)}{j.\frac{100}{50}+2} = \frac{4\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}} = 2.e^{j0} \quad \text{Donc } v(t) = 2.cos(\omega.t)$$

## 8 Régime alternatif sinusoïdal – court-circuit (2 pts)




$$e_1(t) = 10.\cos(\omega.t)$$

$$e_2(t) = -10.\sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{Z} = 5.e^{j\pi/4}$$

Calculer le courant de court-circuit $i_{cc}(t)$ du dipôle AB (avec $i_{cc}(t)$ orienté de A vers B dans le court-circuit).

Corrigé :

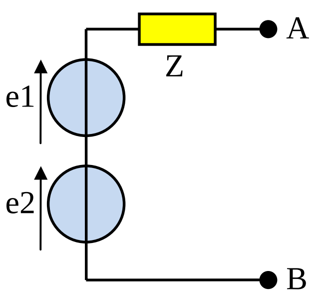
Sachant que $e_1(t) = 10.\cos(\omega.t)$, on pose $\underline{E_1} = 10.e^{j0}$

et sachant que $e_2(t) = -10.\sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right) = 10.\cos(\omega.t)$, on pose $\underline{E_2} = 10.e^{j0}$

$\underline{I_{cc}} = \frac{\underline{E_1} + \underline{E_2}}{\underline{Z}} = \frac{10.e^{j0} + 10.e^{j0}}{5.e^{j\pi/4}} = 4.e^{-j\pi/4}$ donc $i_{cc}(t) = 4.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{4}\right)$

## 9 Régime alternatif sinusoïdal. Dipôle équivalent (3 pts)

On pourra utiliser les vecteurs de Fresnel ou les complexes. Pour les complexes, on prendra la convention :




$$e_1(t)=10.\cos(\omega.t) \leftrightarrow \underline{E_1}=10.e^{j.0}$$

$$e_1(t)=10.\cos(\omega.t)$$

$$e_2(t)=10.\cos\left(\omega.t-\frac{\pi}{2}\right)$$

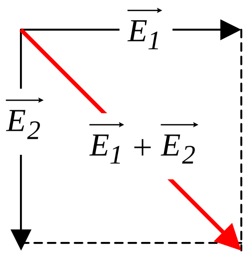
$$\underline{Z}=5.e^{-j\pi/4}$$

Calculer la tension équivalente de Thévenin $e_{TH}(t)$ et le courant de court-circuit $i_{cc}(t)$ du dipôle AB (avec $i_{cc}(t)$ orienté de A vers B dans le court-circuit).

Le devoir se déroulant sans calculette, on pourra conserver des expressions telles que $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$

Corrigé :

0.5 pt




La tension équivalente de Thévenin est la tension aux bornes du dipôle à vide, donc :

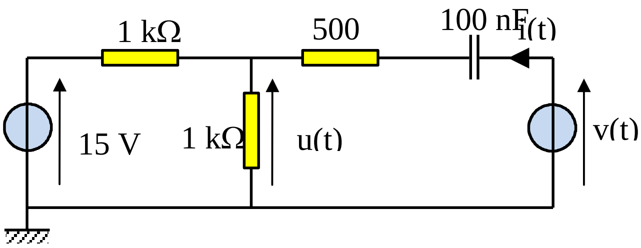
$$e_{TH}(t)=e_1(t)+e_2(t) \Leftrightarrow \underline{E_{TH}}=\underline{E_1}+\underline{E_2}=10.\sqrt{2}.e^{-j.\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{(cf diagramme de Bode ci-contre)} \Leftrightarrow e_{TH}(t)=10.\sqrt{2}.\cos\left(\omega.t-\frac{\pi}{4}\right)$$ 1,5 pt

Le courant équivalent de Norton est le courant de court-circuit :

$$\underline{I_{cc}}=\frac{\underline{E_{TH}}}{\underline{Z}}=\frac{10.\sqrt{2}.e^{-j.\frac{\pi}{4}}}{5.e^{-j.\frac{\pi}{4}}}=2.\sqrt{2} \Leftrightarrow i_{cc}(t)=2.\sqrt{2}.\cos(\omega.t)$$ 1 pt

## *10 Théorème de superposition en continu+alternatif sinusoïdal. (5 pts)*




Dans le but de déterminer la tension u(t) du schéma ci-contre, réaliser les opérations suivantes :

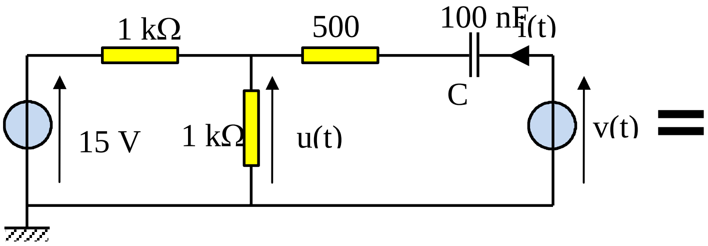
**a)** Représenter les deux schémas relatifs au théorème de superposition.

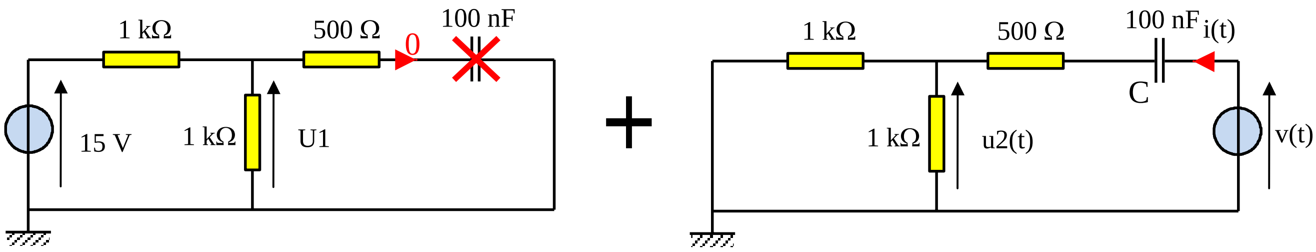
**b)** Déterminer la composante U1 de u(t) créée par la tension continue de 15 V.

**c)** Déterminer la composante u2(t) de u(t) créée par la tension alternative sinusoïdale v(t) = 10.cos(10000.t). (Les valeurs ont été choisies de façon que le calcul puisse se faire à la main) (On admet dans le résultat des expressions telles que $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ ).

**d)** En utilisant le théorème de superposition, déterminer et représenter u(t). *(Ne pas oublier de graduer les axes).*

Corrigé :



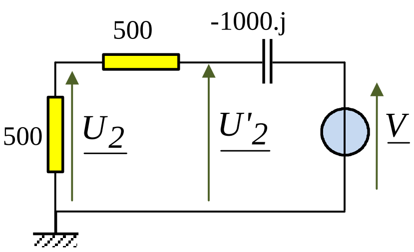




**b)** En courant continu, le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

On peut utiliser la formule du pont diviseur de tension : $U_1 = \dfrac{15\,.10^3}{10^3 + 10^3} = 7{,}5\ V\ continu$

**c)** En courant alternatif sinusoïdal, on peut utiliser les nombres complexes :

$v(t) = 10.cos(10000.t) \Leftrightarrow \underline{V} = 10.e^{j0}$ et $\dfrac{1}{jC\omega} = \dfrac{-j}{C\omega} = \dfrac{-j}{10^{-7}.10^4} = -10^3.j$

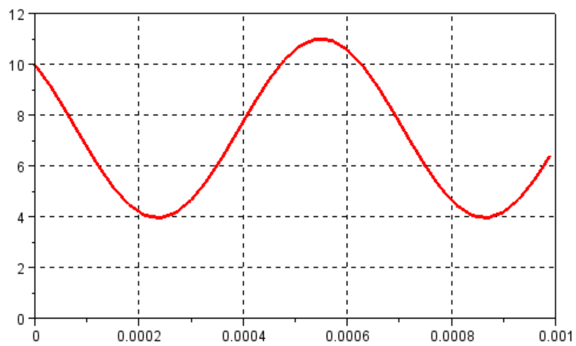



En utilisant la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{U'_2} = \frac{\underline{V}.(500+500)}{(500+500)-1000.j} = \frac{10.e^{j0}\,.10^3}{10^3 - 10^3.j} = \frac{10.e^{j0}}{1-j} = \frac{10.e^{j0}}{\sqrt{2}.e^{-j\frac{\pi}{4}}} = 5\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}$$

En utilisant à nouveau la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{U_2} = \frac{\underline{U'_2}\,.500}{500+500} = \frac{\underline{U'_2}}{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}.e^{j\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow u_2(t) = \frac{5}{\sqrt{2}}cos\left(10000.t + \frac{\pi}{4}\right)$$

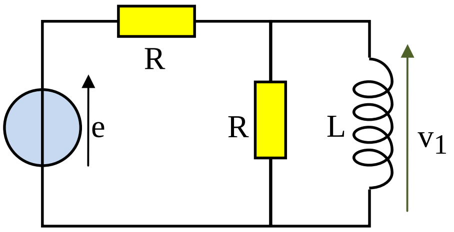



**d)** Donc $u(t) = U_1 + u_2(t) = 7{,}5 + \dfrac{5}{\sqrt{2}}cos\left(10000.t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

Instruction sous Scilab :

```
t=0:3e-5:1e-3;
v=7.5+(5/sqrt(2))*cos(10000*t+%pi/4) ;
plot(t,v)
```

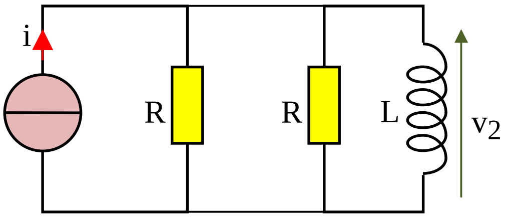
## 11 *Théorème de superposition et alternatif sinusoïdal 2 sources (7 pts)*




$e(t) = 20.cos(\omega.t)$

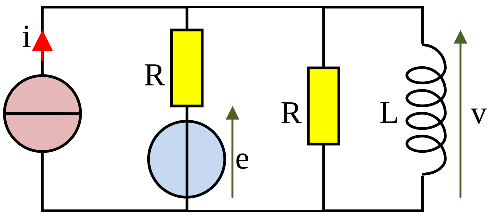
**a)** Sachant que $R = 100\,\Omega$ et $L\omega = 50\,\Omega$, calculer, pour le schéma ci-contre, l'expression de $v_1(t)$.

On prendra pour convention : $e(t) = 20.cos(\omega.t) \Leftrightarrow \underline{E} = 20.e^{j0}$, ([1])




$i(t) = 0{,}2.sin(\omega.t)$

**b)** Sachant que $R = 100\,\Omega$ et $L\omega = 50\,\Omega$, calculer, pour le schéma ci-contre, l'expression de $v_2(t)$.




$e(t) = 20.cos(\omega.t)$

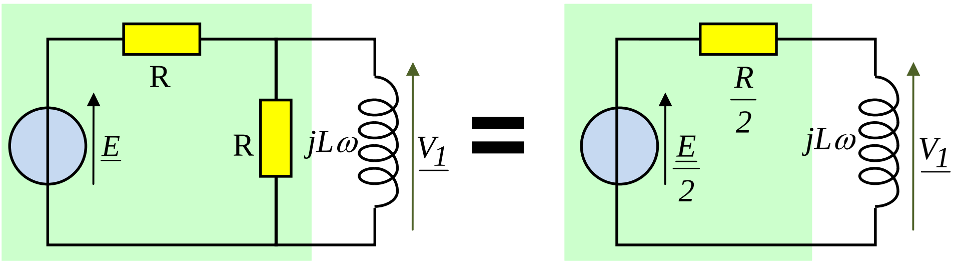
$i(t) = 0{,}2.sin(\omega.t)$

**c)** Sachant que $R = 100\,\Omega$ et $L\omega = 50\,\Omega$, calculer, pour le schéma ci-contre, l'expression de $v(t)$. (*On s'aidera des résultats des deux questions précédentes*).

([1]) On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigé :

**a)** En appliquant le modèle équivalent de Thévenin puis la formule du pont diviseur de tension:

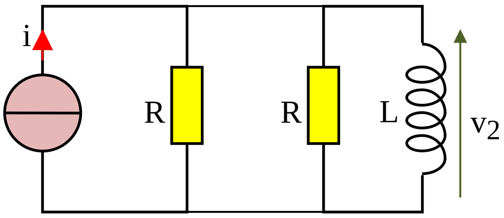



$$\underline{V_1} = \frac{\frac{\underline{E}}{2}.\,jL\omega}{\frac{R}{2} + jL\omega} = \frac{10.e^{j0}.50\,j}{50+50\,j}$$

$$\underline{V_1} = \frac{10.e^{j0}.50e^{j\frac{\pi}{2}}}{50.\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}} = \frac{10e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow v_1(t) = \frac{10}{\sqrt{2}}.\cos\left(\omega.t + \frac{\pi}{4}\right)$$

**b)** Trois impédances en parallèles parcourues par le courant $\underline{I}$ *(attention au sinus !)*:

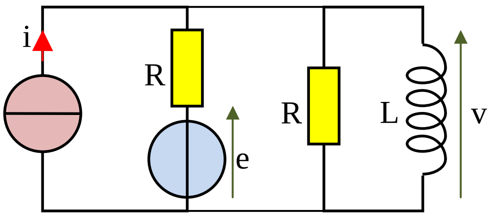



$$\underline{V_2} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right)^{-1}.\,\underline{I} = \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100} + \frac{1}{50\,j}\right)^{-1}.0{,}2.e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{V_2} = \left(\frac{2\,j+2}{100\,j}\right)^{-1}.0{,}2.e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{50\,j}{\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}}.0{,}2.e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{V_2} = \frac{50.e^{j\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}}}.0{,}2.e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}.e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad \Rightarrow v_2(t) = \frac{10}{\sqrt{2}}.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{4}\right)$$

**c)** En appliquant le théorème de superposition : $v(t) = v_1(t) + v_2(t)$




$$\Leftrightarrow \underline{V} = \underline{V_1} + \underline{V_2} = \frac{10e^{j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} + \frac{10e^{-j\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(e^{j\frac{\pi}{4}} + e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)$$

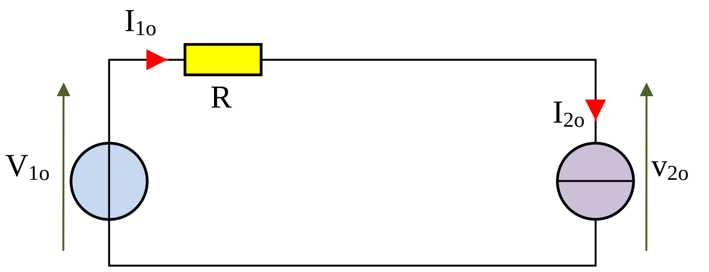
Donc

$$\Rightarrow \underline{V} = \frac{10}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + j.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - j.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 10$$

$$v(t) = 10.\cos(\omega.t)$$

## *12 Réseau en DC + alternatif sinusoïdal. Superposition 3 sources* (12 pts)

Les questions a), b) et c) sont indépendantes.

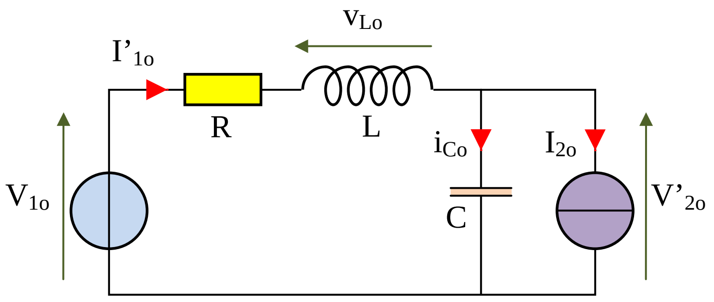



**a)** Dans le montage ci-contre, $V_{1o}$ est une source de tension continue, et $I_{2o}$ est une source de courant continu.

Exprimer $V_{2o}$ et $I_{1o}$ en fonction de R, $V_{1o}$ et $I_{2o}$.

**b)** Exprimer la relation générale entre la tension $v_L(t)$ aux bornes d'une inductance et le courant $i_L(t)$ qui la traverse lorsqu'ils sont orientés en convention récepteur.

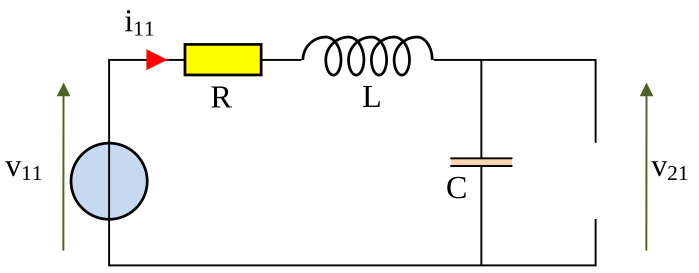
Exprimer la relation générale entre la tension $v_C(t)$ aux bornes d'un condensateur et le courant $i_C(t)$ qui le traverse lorsqu'ils sont orientés en convention récepteur.




Dans le montage ci-contre, $V_{1o}$ est une source de tension continue, et $I_{2o}$ est une source de courant continu.

En régime permanent (suffisamment longtemps après la mise sous tension du montage), toutes les tensions et tous les courants sont continus. En déduire les valeurs de $v_{Lo}$ et $i_{Co}$ en régime permanent.

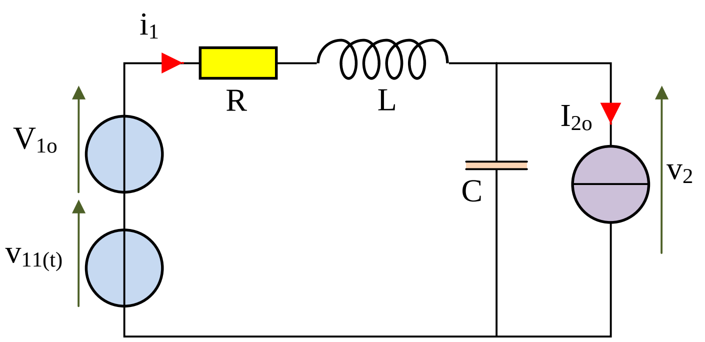
En déduire $V'_{2o}$ et $I'_{1o}$ en fonction des éléments du montage, en régime permanent.




**c)** Dans le montage ci-contre, $v_{11}$ est une tension alternative sinusoïdale : $v_{11}(t) = \hat{V}_1.cos(\omega.t)$

**c1)** Exprimer les complexes $\underline{I_{11}}$ et $\underline{V_{21}}$ en fonction de $\underline{V_{11}}$, R, L, C et $\omega$.

**c2)** On suppose que $R << L\omega$ et $LC\omega^2 >> 1$. Simplifier les expressions de $\underline{I_{11}}$ et $\underline{V_{21}}$ en conséquence puis en déduire les expressions approchées de $i_{11}(t)$ et $v_{21}(t)$.




**d)** Exprimer le théorème de superposition puis l'illustrer par des schémas dans le cas du montage ci-contre.

$V_{1o}$ est une tension continue, et $I_{2o}$ est un courant continu.

$v_{11}$ est une tension alternative sinusoïdale :

$v_{11}(t) = \hat{V}_1.cos(\omega.t)$

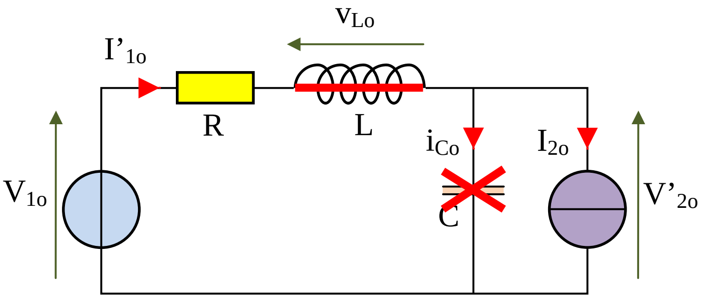
On suppose que $R << L\omega$ et $LC\omega^2 >> 1$.

En utilisant les résultats des questions **b)** et **c)**, exprimer $i_1(t)$ et $v_2(t)$ en fonction de $V_{1o}$, $I_{2o}$., R, L, C, $\hat{V}_1$ et $\omega$ en régime permanent.

*Corrigé :*

**a)** $V_{2o} = V_{1o} - R.I_{2o}$ (loi des mailles) avec $I_{1o} = I_{2o}$

**b)** $v_L(t) = L.\dfrac{d(i_L(t))}{dt}$ et $i_C(t) = C.\dfrac{d(v_C(t))}{dt}$




- Si le courant dans l'inductance est « continu » (c'est-à-dire « constant ») : $\dfrac{d(i_L(t))}{dt} = 0 \Rightarrow v_{Lo}(t) = 0$. L'inductance se comporte comme un court-circuit.

- Si la tension aux bornes du condensateur est « continu » (c'est-à-dire « constante ») : $\dfrac{d(v_C(t))}{dt} = 0 \Rightarrow i_{Co}(t) = 0$. Le condensateur se comporte comme un circuit ouvert.

Le montage se comporte alors comme le premier montage (voir **a)**) :

$V'_{2o} = V_{1o} - R.I_{2o}$ et $I'_{1o} = I_{2o}$

**c)** **c1)** En utilisant la notion d'impédance : $\underline{I_{11}} = \dfrac{\underline{V_{11}}}{R + jL\omega - \dfrac{j}{C\omega}} = \dfrac{\underline{V_{11}}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}$

En utilisant la notion de pont diviseur de tension : $\underline{V_{21}} = \dfrac{\underline{V_{11}}.\dfrac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}}$

**c2)** $\underline{I_{11}} = \dfrac{\underline{V_{11}}}{R + \dfrac{j^2 LC\omega^2 + 1}{jC\omega}} = \dfrac{\underline{V_{11}}}{R + \dfrac{-LC\omega^2 + 1}{jC\omega}} \approx \dfrac{\underline{V_{11}}}{R - \dfrac{LC\omega^2}{jC\omega}} = \dfrac{\underline{V_{11}}}{R + jL\omega} \approx \dfrac{\underline{V_{11}}}{jL\omega}$

$$\Rightarrow \underline{I_{11}} \approx \frac{\underline{V_{11}}}{L\omega.e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{\hat{V}_1.e^{j0}}{L\omega.e^{j\frac{\pi}{2}}} = \frac{\hat{V}_1}{L\omega}.e^{-j\frac{\pi}{2}} \qquad \Rightarrow i_{11}(t) \approx \frac{\hat{V}_1}{L\omega}.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\underline{V_{21}} = \frac{\left(\underline{V_{11}}.\dfrac{1}{jC\omega}\right).jC\omega}{\left(R + jL\omega + \dfrac{1}{jC\omega}\right).jC\omega} = \frac{\underline{V_{11}}}{jRC\omega + j^2 LC\omega^2 + 1} = \frac{\underline{V_{11}}}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$$

$$\Rightarrow \underline{V_{21}} \approx \frac{\underline{V_{11}}}{jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{\underline{V_{11}}}{jC\omega.(R + jL\omega)} \approx \frac{\underline{V_{11}}}{jC\omega.(+jL\omega)} = \frac{\underline{V_{11}}}{-LC\omega^2} = \frac{\underline{V_{11}}}{j^2 LC\omega^2} = \frac{\hat{V}_1.e^{j0}}{LC\omega^2.e^{j\pi}}$$

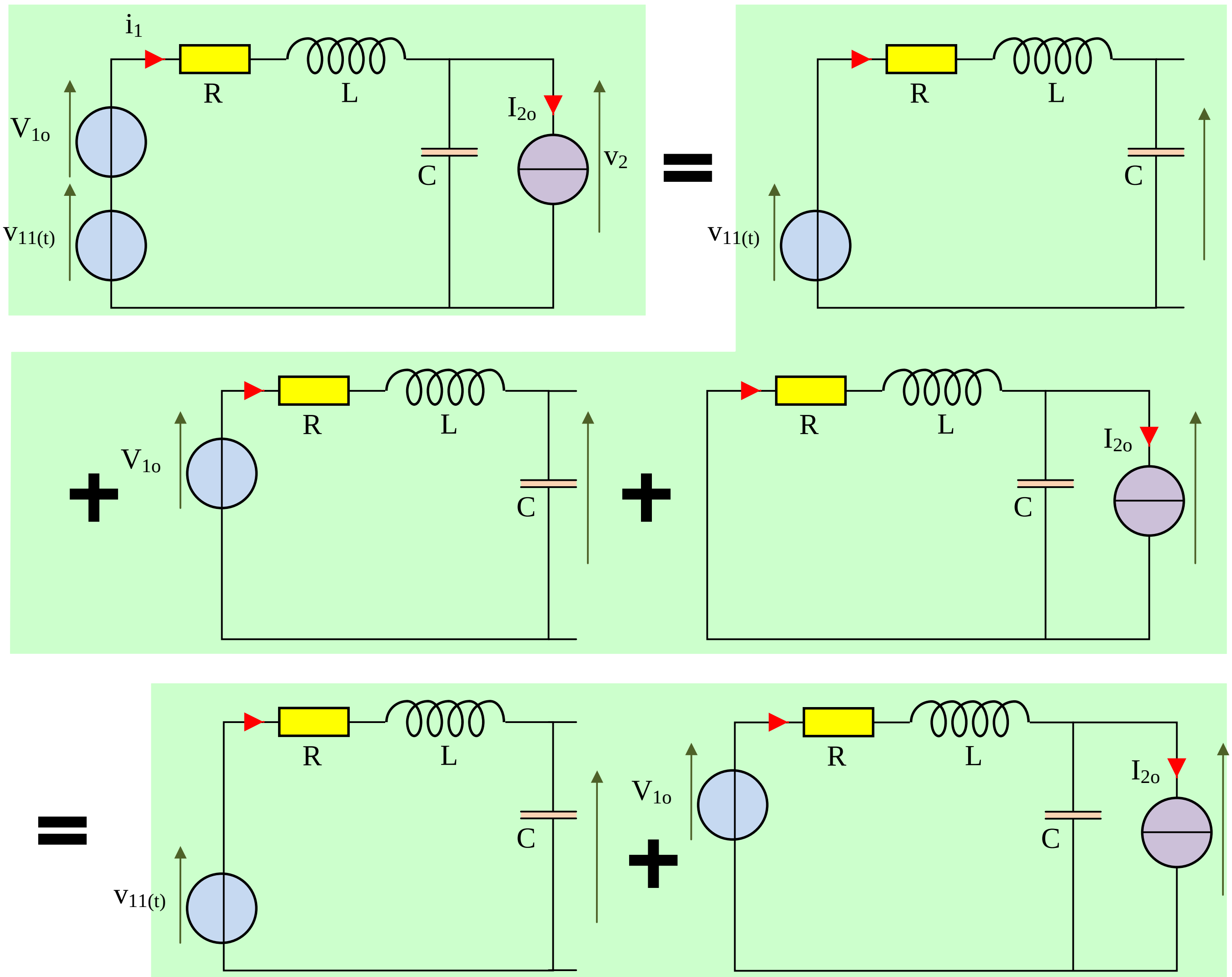
$$\Rightarrow v_{21}(t) \approx \frac{\hat{V}_1}{LC\omega^2}.\cos(\omega.t - \pi)$$

Autre solution :

$$v_{21}(t) = \frac{1}{C}.\int i_{11}(t).dt \approx \frac{1}{C}.\int \frac{\hat{V}_1}{L\omega}.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right).dt = \frac{\hat{V}_1}{LC\omega}\,\frac{\sin\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right)}{\omega} = \frac{\hat{V}_1}{LC\omega^2}\cos(\omega.t - \pi)$$

**d)**

Dans un **réseau électrique linéaire**, le courant (ou la tension) dans une branche quelconque est égal **la somme algébrique** des courants (ou des tensions) obtenus dans cette branche sous l'effet de chacune des **sources indépendantes** prise isolément, toutes les autres sources indépendantes ayant été remplacées par leur **impédance interne**.




Le montage du §d) est donc la somme des montages des paragraphes **b)** et **c)**.

Donc

$$i_{11}(t) \approx I_{2o} + \frac{\hat{V}_1}{L\omega}.\cos\left(\omega.t - \frac{\pi}{2}\right) \text{ et } v_{21}(t) \approx V_{1o} - R.I_{2o} + \frac{\hat{V}_1}{LC\omega^2}.\cos(\omega.t - \pi)$$

*Cet exercice fait référence à l'étude du filtre d'une alimentation à découpage par l'approximation au premier harmonique. Voir PowerElecPro chapitre 1exercice 1 et chapitre 7 exercice 2 sur le site IUTenligne*

## *13 Dipôle linéaire en alternatif sinusoïdal. Mesure de l'impédance interne (6 pts)*

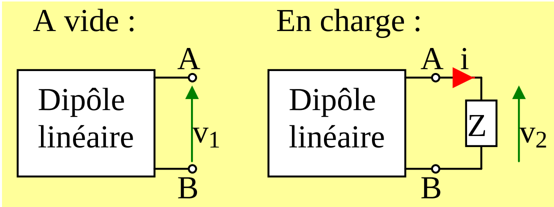
On choisit la convention suivante : $f(t) = F_{max}.\cos(\omega.t + \varphi) \leftrightarrow \underline{F} = F_{max}.e^{j\varphi}$

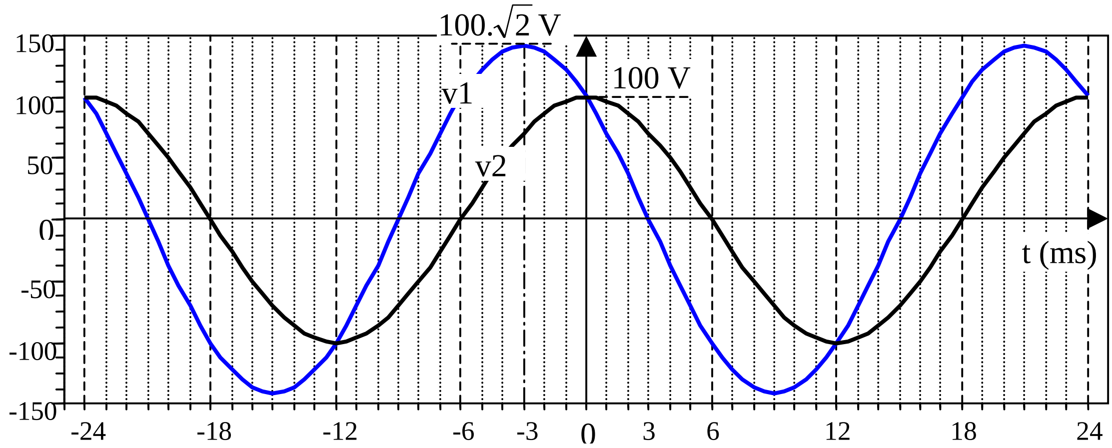
Soit un dipôle linéaire « A-B ».

A vide on a mesuré à ses bornes une tension $v_1(t)$.

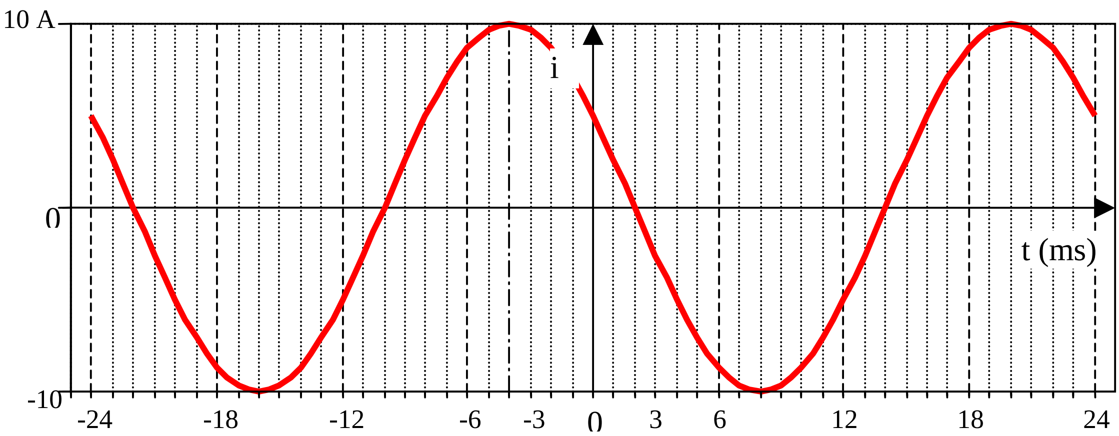
En charge avec une impédance « $\underline{Z}$ », on a mesuré à ses bornes une tension $v_2(t)$ avec un courant $i(t)$.

(Toutes les mesures ont été effectuées en concordance des temps).




**a)** Déterminer (avec la convention ci-dessus) les expressions complexes $\underline{V_1}$, $\underline{V_2}$ et $\underline{V_1} - \underline{V_2}$ associées respectivement à $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_1(t) - v_2(t)$. ([2])




**b)** Déterminer la valeur complexe de l'impédance « $\underline{Z}$ » mise aux bornes du dipôle A-B lors de l'essai en charge *(Sans justification).*

**c)** Déterminer l'expression complexe $\underline{E_{Th}}$ de la tension équivalente de Thévenin du dipôle A-B.

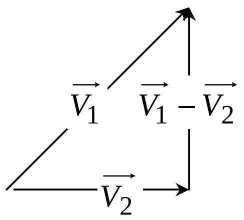
**d)** Déterminer la valeur de l'impédance équivalente du dipôle linéaire A-B : « $\underline{Z_{eq}}$ »

(On pourra utiliser la formule du pont diviseur de tension ou la loi d'ohm généralisée).

---

([2]) On rappelle que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Corrigé :



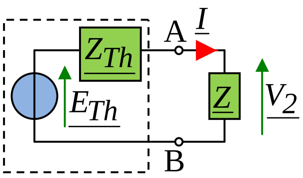

**a)** *(2 pt)* $\underline{V_1} = 100\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}} = 100 + 100\,j$ ; $\underline{V_2} = 100.e^{j0} = 100$ ;

$$\underline{V_1} - \underline{V_2} = 100 + 100\,j - 100 = 100\,j = 100.e^{j\frac{\pi}{2}}$$

**b)** *(1 pt)* $\underline{Z} = \dfrac{V_{2\max}}{I_{\max}} \,.\, e^{j\left(\vec{I},\vec{V_2}\right)} = \dfrac{100}{10} \,.\, e^{-j\frac{\pi}{3}} = 10 \,.\, e^{-j\frac{\pi}{3}}$

**c)** *(1 pt)* La tension équivalente de Thévenin est la tension aux bornes du dipôle « à vide ». Donc $\underline{E_{Th}} = \underline{V_1} = 100\sqrt{2}.e^{j\frac{\pi}{4}} = 100 + 100\,j$ .

**d)** (2 pt)

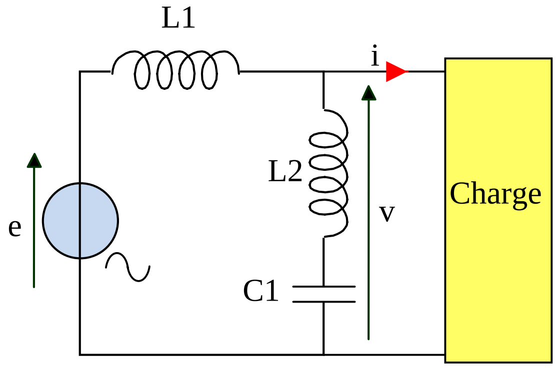



$$\underline{V_2} = \frac{\underline{E_{Th}} \,.\, \underline{Z}}{\underline{Z_{eq}} + \underline{Z}} \Leftrightarrow \underline{Z_{eq}} \,.\, \underline{V_2} = \underline{Z}.\left(\underline{E_{Th}} - \underline{V_2}\right) \Leftrightarrow \underline{Z_{eq}} = \underline{Z}.\left(\frac{\underline{E_{Th}} - \underline{V_2}}{\underline{V_2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z_{eq}} = \underline{Z}.\left(\frac{\underline{V_1} - \underline{V_2}}{\underline{V_2}}\right) = 10 \,.\, e^{-j\frac{\pi}{3}}.\left(\frac{100 \,.\, e^{j\frac{\pi}{2}}}{100}\right) = 10 \,.\, e^{j\frac{\pi}{6}}$$

ou : $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{\underline{E_{Th}} - \underline{V_2}}{\underline{I}} = \dfrac{100 + 100\,j - 100}{10.e^{j\frac{\pi}{3}}} = \dfrac{100.e^{j\frac{\pi}{2}}}{10.e^{j\frac{\pi}{3}}} = 10.e^{j\frac{\pi}{6}}$

## 14 Filtrage d'une ligne de distribution d'énergie électrique




Une source de tension $e(t) = 100.\cos(50.2.\pi.t) = 100.\cos(100.\pi.t)$ alimente une charge qui consomme un courant $i(t)$ non sinusoïdal : $i(t) = 10.\cos(100.\pi.t) + 4.\cos(300.\pi.t)$

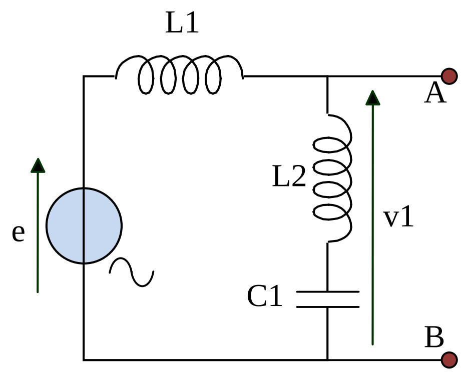
La liaison entre la source de tension et la charge se fait au moyen d'une ligne bifilaire (l'inductance de cette ligne est modélisée par L1 sur le schéma ci-contre.)

Pour éviter que le courant $i(t)$ n'engendre des perturbations dans la source $e(t)$, on a ajouté un « filtre » constitué de L2 et C1.

*L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression de la tension $v(t)$ appliquée à la charge en utilisant le calcul complexe. Beaucoup des questions suivantes sont indépendantes.*

A l'aide d'un tableur, on a effectué les calculs suivants *(tous ne sont pas utiles pour la suite)*

| f | 50 Hz | 150 Hz |
|---|---|---|
| $L_1.\omega$ | 4,712 | 14,137 |
| $L_2.\omega$ | 14,451 | 43,354 |
| $\dfrac{1}{C_1.\omega}$ | 128,4 | 42,8 |
| $L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}$ | -113,949 | 0,554 |
| $L_1.\omega + L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}$ | -109,237 | 14,691 |
| $L_1.\omega * \left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)$ | -536,928 | 7,832 |
| $L_1.\omega * \left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right) \Big/ \left(L_1.\omega + L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)$ | 4,915 | 0,500 |
| $\left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right) \Big/ \left(L_1.\omega + L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)$ | 1,0431 | 0,0377 |
| $\left[\dfrac{1}{L_1.\omega} + \dfrac{1}{\left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)}\right]^{-1}$ | 4,9153 | 0,5000 |
| $\dfrac{1}{L_1.\omega} + \dfrac{1}{\left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)}$ | 0,2034 | 1,8758 |

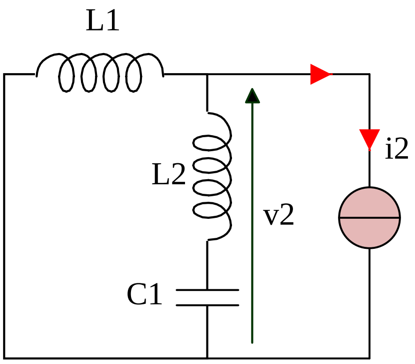



a) $e(t) = 100.\cos(50.2.\pi.t) = 100.\cos(100.\pi.t)$.

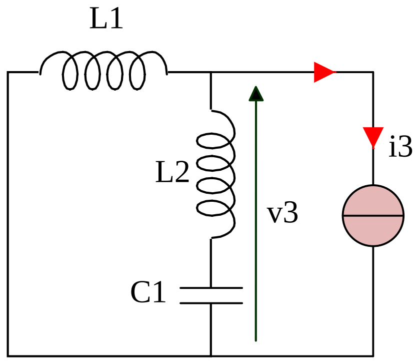
Soit $\underline{E} = 100.e^{j0} = 100$ la tension complexe associée à $e(t)$.

Déterminer la tension complexe $\underline{V_1}$ associée à $v_1(t)$ ci-dessus (indiquer les calculs litéraux puis les résultats numériques (obtenus à partir des valeurs calculées dans le tableau ci-contre).

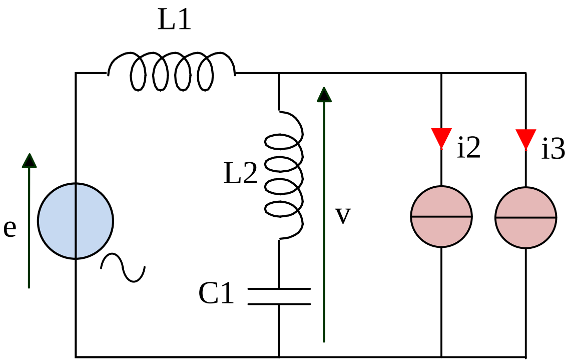
En déduire l'expression numérique de la tension $v_1(t)$.




**b)** Sachant que $i_2(t) = 10.\cos(100.\pi.t)$, (schéma ci-contre), déterminer la valeur complexe $\underline{V_2}$ associée à $v_2(t)$ (indiquer les calculs litéraux puis les résultats numériques complexes).
En déduire l'expression numérique de $v_2(t)$

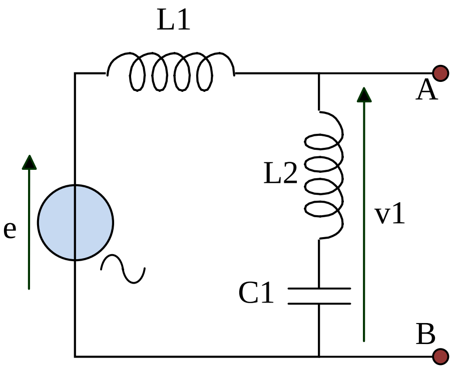



**c)** Sachant que $i_3(t) = 4.\cos(300.\pi.t)$, (schéma ci-contre), déterminer la valeur complexe $\underline{V_3}$ associée à $v_3(t)$ (indiquer les calculs litéraux puis les résultats numériques complexes).
En déduire l'expression numérique de $v_3(t)$




**d)** Sachant que $e(t) = 100.\cos(100.\pi.t)$, $i_2(t) = 10.\cos(100.\pi.t)$ et $i_3(t) = 4.\cos(300.\pi.t)$, (schéma ci-contre), déterminer l'expression numérique de $v(t)$.

Corrigé :



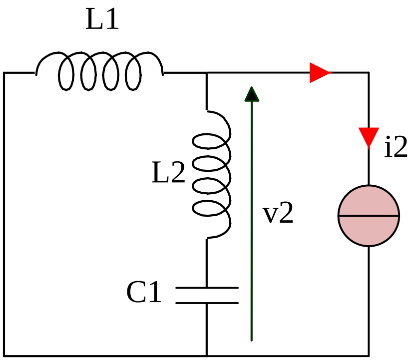

**a)** $e(t) = 100.\cos(50.2.\pi.t) = 100.\cos(100.\pi.t)$. $\Leftrightarrow \underline{E} = 100$.

Pont diviseur de tension :

$$\underline{V_1} = \frac{\underline{E}\,.\left(jL_2.\omega - \dfrac{j}{C_1.\omega}\right)}{\left(jL_1.\omega + jL_2.\omega - \dfrac{j}{C_1.\omega}\right)} = \frac{\underline{E}\,.\,j.\left(L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)}{j\,.\left(L_1.\omega + L_2.\omega - \dfrac{1}{C_1.\omega}\right)}$$

$\underline{V_1} = 1{,}0431\,\underline{E} = 104 \;\Rightarrow\; v_1(t) = 104.\cos(100.\pi.t)$

**b)** Sachant que $i_2(t)=10.\cos(100.\pi.t) \Leftrightarrow \underline{I_2}=10$,




$\underline{V_2}=-\underline{Z_{eq_2}}\,.\,\underline{I_2}$ (à la fréquence 50 Hz) avec :

$$\underline{Z_{eq_2}}=\left[\frac{1}{jL_1.\omega}+\frac{1}{\left(jL_2.\omega-\frac{j}{C_1.\omega}\right)}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{j}.\left(\frac{1}{L_1.\omega}+\frac{1}{\left(L_2.\omega-\frac{1}{C_1.\omega}\right)}\right)\right]^{-1}$$

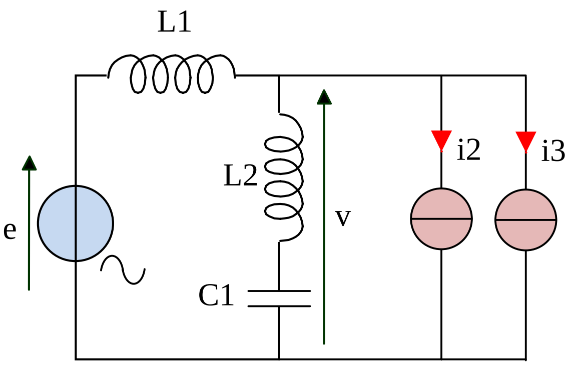
$$\Leftrightarrow \underline{Z_{eq_2}}=\left(\frac{1}{j}\right)^{-1}.\left[\frac{1}{L_1.\omega}+\frac{1}{\left(L_2.\omega-\frac{1}{C_1.\omega}\right)}\right]^{-1}=j\,.\,4{,}9153 \quad \text{Donc}$$

$$\underline{V_2}=-4{,}9153.j\,.\,\underline{I_2}\;=\;-4{,}9153.j\,.\,10\;=\;49{,}153.e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow v_2(t)=49{,}153.\cos\left(100.\pi.t-\frac{\pi}{2}\right)$$

**c)** Le calcul est identique pour $v_3(t)$ avec $\underline{I_3}=4$ et $\underline{Z_{eq_3}}=j\,.\,0{,}5$ (à la fréquence 150 Hz).

On trouve donc $\underline{V_3}=-0{,}5.j\,.\,\underline{I_3}\;=\;-0{,}5.j\,.\,4\;=\;2.e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad \Leftrightarrow v_3(t)=2.\cos\left(300.\pi.t-\frac{\pi}{2}\right)$

**d)** Avec $e(t)=100.\cos(100.\pi.t)$, $i_2(t)=10.\cos(100.\pi.t)$ et $i_3(t)=4.\cos(300.\pi.t)$, on peut appliquer le théorème de superposition : $v(t)=v_1(t)+v_2(t)+v_3(t)$




$$\Rightarrow v(t)=104.\cos(100.\pi.t)+49{,}153.\cos\left(100.\pi.t-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\,2.\cos\left(300.\pi.t-\frac{\pi}{2}\right)$$

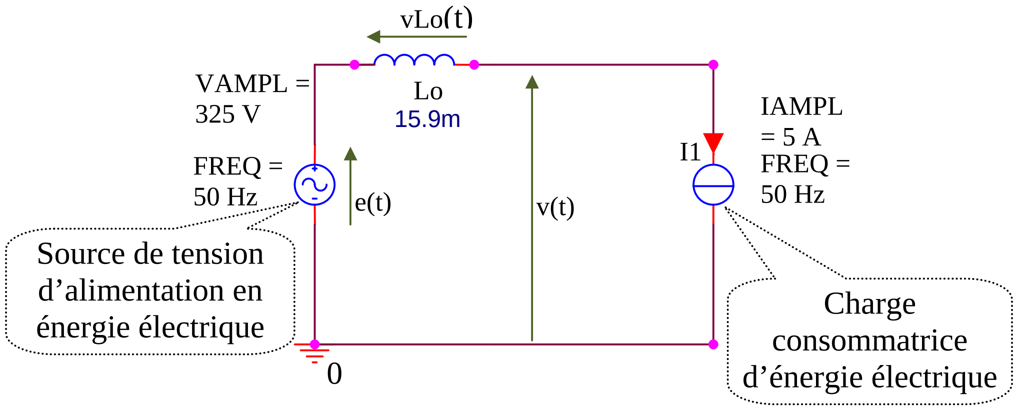
*$e(t)$ représente l'alimentation d'une ligne en énergie électrique.*

*$i_1(t)+i_3(t)$ représente le courant consommé par l'étage d'entré d'un convertisseur de puissance.*

Le même problème traité par les diagrammes de Bode se trouve dans IUT en ligne/Baselecpro/cours du chapitre 8/exercice 5.

## 15 Echange d'énergie électrique et filtrage des harmoniques (13pts)

### A - Ligne inductive




Une source de tension $e(t)=230.\sqrt{2}.\cos(100.\pi.t)$
$=325.\cos(100.\pi.t)$
alimente une charge qui se comporte comme une source de courant :
$i_1(t)=5.\cos(100.\pi.t)$.
La liaison entre la source de tension et la charge se fait au moyen d'une ligne inductive (modélisée par l'inductance Lo sur le schéma ci-contre.)

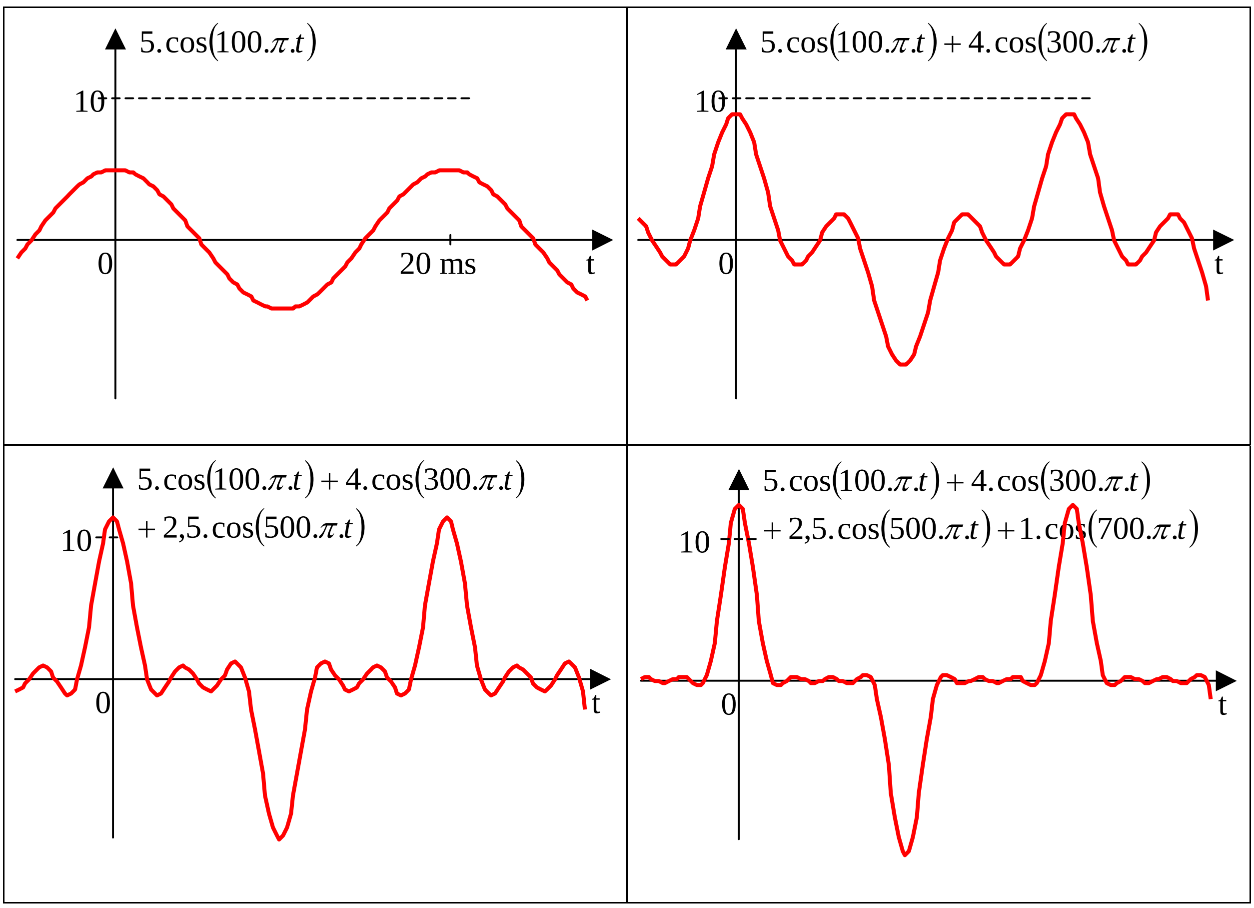
**a1)** Sachant que $Lo.100.\pi=5\,\Omega$, en déduire $v_{Lo}(t)$

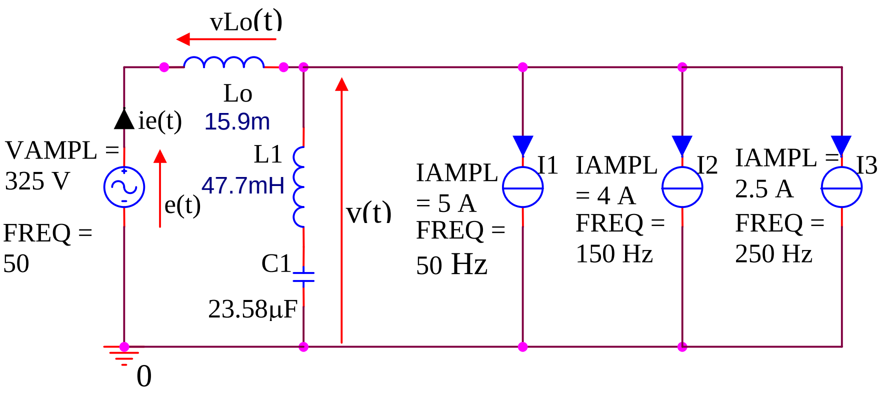
**a2)** En s'appuyant sur un diagramme de Fresnel (à main levée), proposer une estimation de $v(t)$.

### B - Charge non sinusoïdale

La charge est maintenant un convertisseur de puissance. Il consomme un courant périodique impulsionnel. On admettra que ce courant peut être reconstitué par une somme de fonctions alternatives sinusoïdales de fréquences multiples de 50 Hz (appelée « série de Fourier »)

$i(t)=5.\cos(100.\pi.t)+4.\cos(300.\pi.t)+2{,}5.\cos(500.\pi.t)+1.\cos(700.\pi.t)$ comme le montre les graphes ci-dessous:






Ce courant non sinusoïdal est source de perturbations dans la ligne d'alimentation en énergie électrique.

Pour réduire ces perturbations, on équipe le montage d'un « filtre » ($L_1.C_1$)

De façon à simplifier l'étude, on négligera le terme $1.\cos(700.\pi.t)$ par rapport aux autres termes de la somme.

La somme $i(t) = 5.\cos(100.\pi.t) + 4.\cos(300.\pi.t) + 2{,}5.\cos(500.\pi.t)$ est représentée sur le schéma ci-dessus par trois sources de courant en parallèle.

Les différentes sources ne sont pas de même fréquence (le courant $i(t)$ n'est pas alternatif sinusoïdal). Il n'est donc pas possible d'utiliser directement les complexes pour calculer l'état du montage. On peut cependant utiliser le théorème de superposition.

**b1)** Dans le but de déterminer $v(t)$ et $i_e(t)$, représenter les 4 schémas illustrant la mise en œuvre du théorème de superposition.

Chacun des 4 schémas décrit un fonctionnement en régime alternatif sinusoïdal. On peut donc l'étudier à l'aide des complexes.

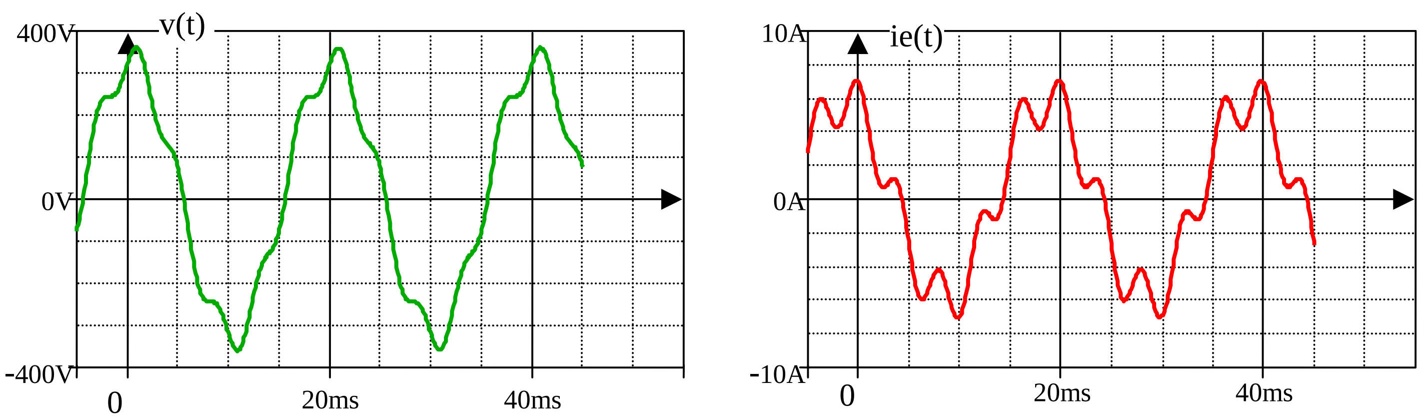
| $\omega$ | $100.\pi$ | $300.\pi$ | $500.\pi$ |
|---|---|---|---|
| $L_o.\omega$ | $5\ \Omega$ | $15\ \Omega$ | $25\ \Omega$ |
| $L_1.\omega$ | $15\ \Omega$ | $45\ \Omega$ | $75\ \Omega$ |
| $1/C_1.\omega$ | $135\ \Omega$ | $45\ \Omega$ | $27\ \Omega$ |

**b2)** Connaissant les valeurs ci-contre, reconstituer les calculs qui ont permis d'obtenir les résultats suivants :

$$v(t) = 339.\cos(100.\pi.t) + 26{,}1.\cos\left(100.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right) + 41.\cos\left(500.\pi.t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$i_e(t) = 2{,}8.\cos\left(100.\pi.t + \frac{\pi}{2}\right) + 5{,}22.\cos(100.\pi.t) + 1{,}64.\cos(500.\pi.t)$$

Le devoir se déroulant sans calculette, il n'est pas demandé d'effectuer de calculs numériques au delà d'une addition ou d'une soustraction. Mais on se servira des résultats donnés ci-dessus pour proposer les résultats des calculs en complexe.

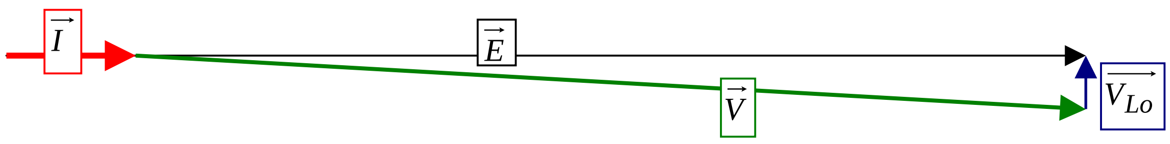



Résultats de simulation du comportement du montage étudié.

Corrigé :

**a1 -** $V_{Lo}(t) = Lo\,.\,\frac{d\left(i_1(t)\right)}{dt} = Lo\,.\,\omega\,.\,\hat{I}\,.\,\cos\left(\omega.t+\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow V_{Lo}(t) = (5\,.\,5).\cos\left(100\pi.t+\frac{\pi}{2}\right) = 25.\cos\left(100\pi.t+\frac{\pi}{2}\right)$

**a2 -** $v(t) = e(t) - v_{Lo}(t) \Leftrightarrow \vec{V} = \vec{E} - \overrightarrow{V_{Lo}}$




On voit graphiquement que $\hat{V} \approx \hat{E} = 325\,V$ et que le déphasage de $\vec{V}$ par rapport à $\vec{E}$ est d'environ -4°.

D'après ce diagramme de Fresnel : $v(t) \approx 325.\cos(\omega.t - 0.1)$

Par un calcul avec le logiciel Scilab :

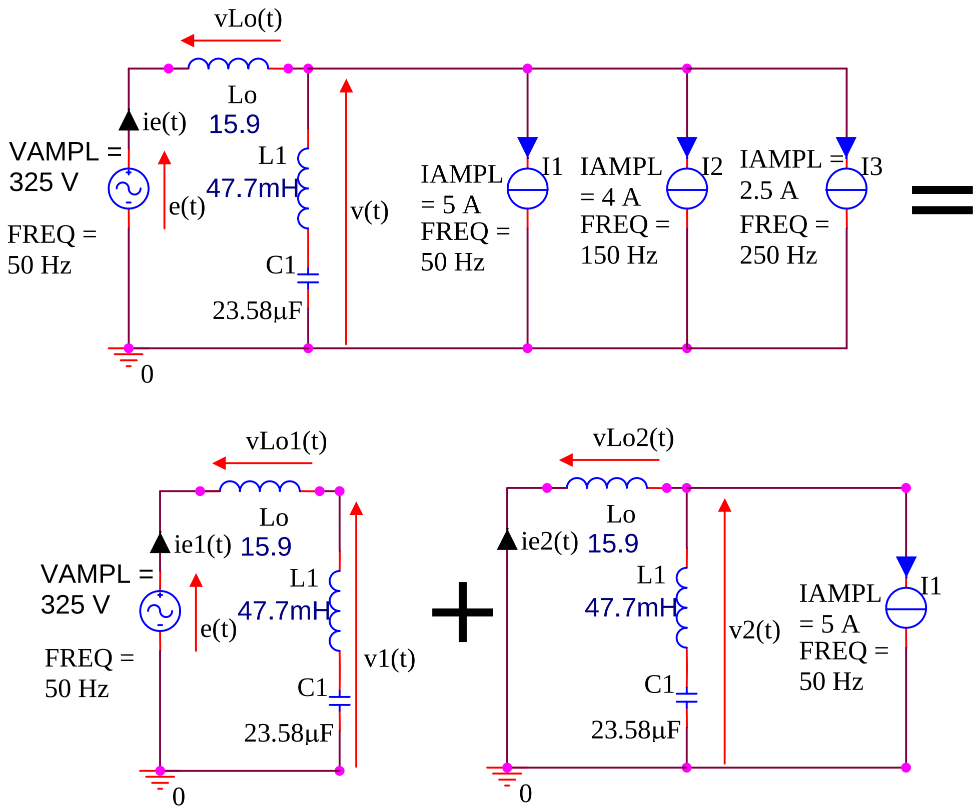
VLo=325-25*%i => VLo = 325. - 25.i

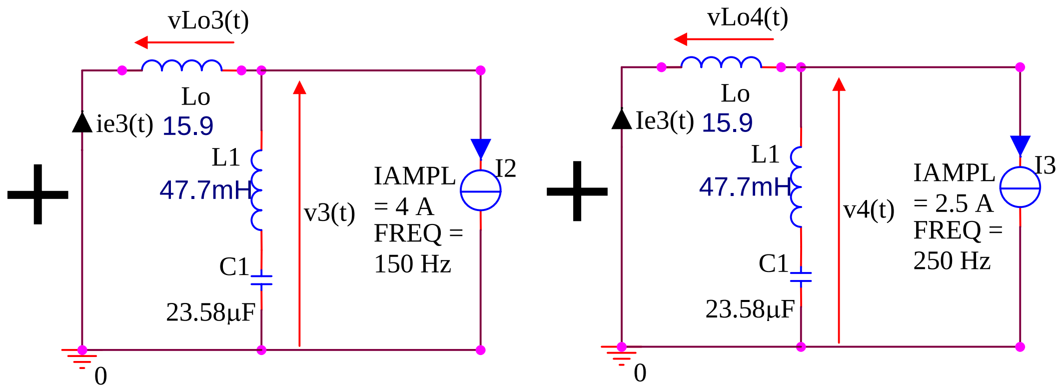
module=abs(VLo) => module = 325.96012

argument=atan(-25,325) => argument = - 0.0767719 rad = - 0.0767719*180/%pi = - 4.3987054 ° donc

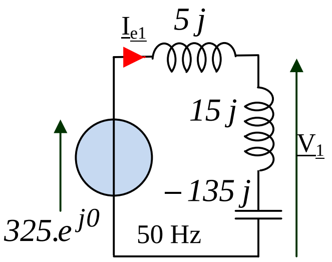
$v(t) = 325.96012\,.\,\cos(\omega.t - 0.0767719)$

**b1 -** On applique le théorème de superposition aux fonctions du temps (et non pas aux complexes car les régimes sinusoïdaux ne sont pas de même fréquence) :



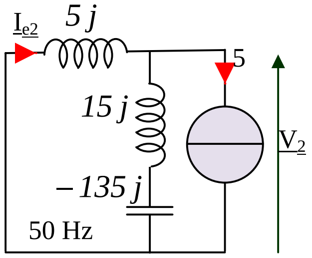



Chaque sous schéma issu de l'application du théorème de superposition est en régime alternatif sinusoïdal. On peut donc déterminer son état électrique à l'aide des complexes. On retrouve ainsi les valeurs proposées dans les équations temporelles de l'exercice :




Pont diviseur de tension :

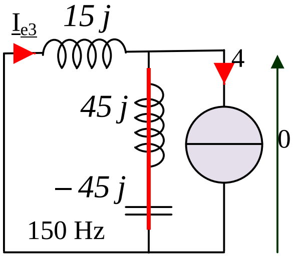
$$\underline{V}_1 = \frac{325.e^{j0}.(15j-135j)}{(5j+15j-135j)} = \frac{325.(-120j)}{(-115j)}.\frac{j}{j} = \frac{325.120}{115} = 339 = 339.e^{j0}$$



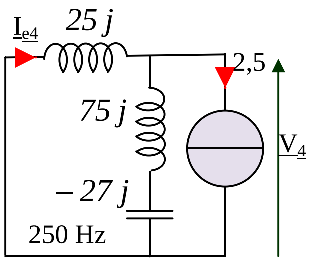

Loi d'ohm généralisée (Attention au sens des flèches !)

$$\underline{V}_2 = -\left((5j)^{-1} + (15j-135j)^{-1}\right)^{-1}.5 = -\left(\frac{1}{5j} + \frac{1}{-120j}\right)^{-1}.5$$

$$\underline{V}_2 = -\left(\frac{24}{120j} - \frac{1}{120j}\right)^{-1}.5 = -\frac{120j.5}{23} = -26{,}1\ j = 26{,}1\ e^{-j.\frac{\pi}{2}}$$




$\underline{V}_3 = 0$ : tension aux bornes d'une impédance nulle




Loi d'ohm généralisée

$$\underline{V}_4 = -\left((25j)^{-1} + (75j-27j)^{-1}\right)^{-1}.2{,}5 = -\left(\frac{1}{25j} + \frac{1}{48j}\right)^{-1}.2{,}5$$

$$\underline{V}_4 = -\left(\frac{48j+25j}{25.48.j^2}\right)^{-1}.2{,}5 = -\frac{1200.j^2.2{,}5}{73j} = -41\ j = 41\ e^{-j.\frac{\pi}{2}}$$

Loi d'ohm généralisée : $\underline{I_{e1}} = \dfrac{325}{5\,j + 15\,j - 135\,j} = \dfrac{325}{-115\,j} = 2{,}83\, e^{j.\frac{\pi}{2}}$

Pont diviseur de courant : $\underline{I_{e2}} = \dfrac{5\,.\left(15\,j - 135\,j\right)}{5\,j + 15\,j - 135\,j} = \dfrac{5\,.\left(-120\,j\right)}{-115\,j} = 5{,}22\, e^{j.0}$

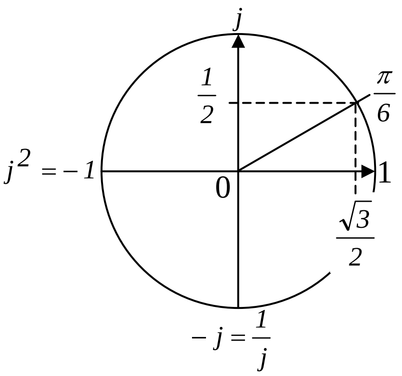
$\underline{I_{e3}} = 0$ (en parallèle avec un court-circuit)

Pont diviseur de courant : $\underline{I_{e4}} = \dfrac{2{,}5\,.\left(75\,j - 27\,j\right)}{25\,j + 75\,j - 27\,j} = \dfrac{2{,}5\,.\left(48\,j\right)}{73\,j} = 1{,}64\, e^{j.0}$

*Bien que le courant consommé par la charge soit très éloigné d'une sinusoïde, le courant prélevé dans la source « e » est assez proche d'une sinusoïde, ce qui permet de réduire les perturbations dans la ligne*

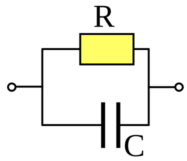
## 16 Filtre d'un onduleur MLI (10 pts)

*Le devoir se déroulant sans calculatrice, les valeurs numériques ont été choisies de façon que les calculs soient simples ([3]). Beaucoup de questions sont indépendantes.*

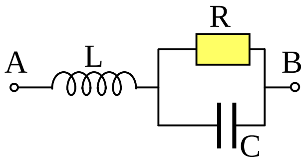



**a)** Exprimer sous forme exponentielle ([4]) le complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} + j\,\frac{1}{2}$

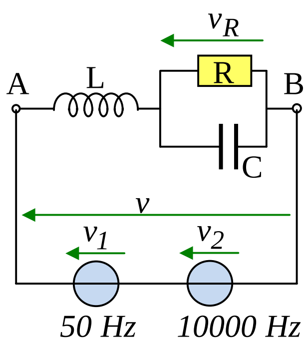
On pourra s'aider du cercle trigonométrique ci-contre.




**b)** Soit $\underline{Z_{RC}}$ l'impédance du dipôle R//C ci-contre. Sachant que $R = 115\ \Omega$ et qu'à la fréquence $50\ Hz$ : $\frac{1}{C\omega} = 200\ \Omega$, exprimer, sous forme algébrique ([5]), la valeur numérique du complexe $\frac{1}{\underline{Z_{RC}}}$ à la fréquence $50\ Hz$. Sachant que $115 = \frac{200}{\sqrt{3}}$, en déduire les valeurs numériques de $\frac{1}{\underline{Z_{RC}}}$ puis de $\underline{Z_{RC}}$ sous forme exponentielle. *(s'inspirer du **a)**)*




**c)** Le dipôle A-B ci-contre est alimenté en régime alternatif sinusoïdal de pulsation $\omega$. Donner l'expression littérale de l'impédance $\underline{Z_{AB}}$ de ce dipôle en fonction de R, L, C et $\omega$.




**d)** Le dipôle A-B précédent constitue la charge d'un onduleur MLI qui lui applique une tension $v(t)$. Cette tension peut être approximée par une somme de deux sinusoïdes $v_1(t)$ de fréquence $50\ Hz$ et $v_2(t)$ de fréquence $10000\ Hz$. On souhaite calculer $v_R(t)$, mais le calcul à l'aide des complexes n'est pas directement utilisable car $v_1(t)$ et $v_2(t)$ ne sont pas de même fréquence.

On peut néanmoins utiliser le théorème de superposition car le réseau électrique est linéaire.

Uniquement par des schémas électriques, illustrer le théorème de superposition appliqué au montage ci-contre dans le but de calculer $v_R(t)$. *(L'objectif est de préparer les questions **e)** et **f)** )*

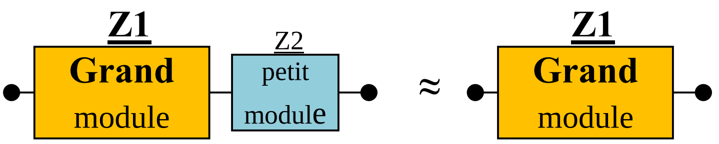
**e)** Pour chaque sous-schéma ci-dessus, le régime est alternatif sinusoïdal.
On peut donc calculer à l'aide des complexes.
On donne $v_1(t) = 325 \cdot \sin(2\pi \cdot 50 \cdot t)$ et $v_2(t) = 240 \cdot \sin(2\pi \cdot 10000 \cdot t)$

---

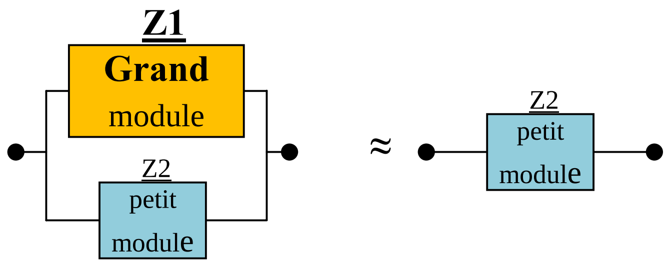
([3]) On rappelle les valeurs suivantes : $\sqrt{3} \approx 1{,}73$ ; $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$ ; $\frac{\pi}{6}\ rad = 30°$

([4]) Nombre complexe sous forme exponentielle : $module \cdot e^{i\ argument}$

([5]) Nombre complexe sous forme algébrique : $partie\ réelle + j \cdot partie\ imaginaire$




Lorsqu'on fait la somme de deux complexes dont l'un a un grand module et l'autre un petit module, cette somme est approximativement égale au complexe de grand module (peut importe les arguments).




On peut appliquer cette remarque aux impédances en série.

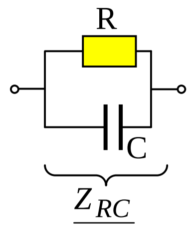
Pour les impédances en parallèle, il faut raisonner sur la somme des inverses des impédances

| Module des impédances | | |
|---|---|---|
| f | 50 Hz | 10 kHz |
| $L\omega$ | *0,6 Ω* | *120 Ω* |
| $\dfrac{1}{C\omega}$ | *200 Ω* | *1 Ω* |
| $R$ | *115 Ω* | *115 Ω* |
| $\lvert \underline{Z}_{RC} \rvert$ | *100 Ω* | |

En utilisant les simplifications ci-dessus concernant les impédances grandes et petites, en série ou en parallèle. Compléter la dernière case du tableau ci-contre.

Pas de justification demandée.

(On admettra qu'on peut simplifier lorsque le rapport des modules est supérieur à 100)




$v_1(t)$ engendre aux bornes de $\underline{Z}_{RC}$ une tension $v_{R_1}(t)$

Calculer $v_{R_1}(t)$ en justifiant la démarche utilisée. (Comme ci-dessus, on pourra simplifier les sommes de complexes lorsque les modules sont très différents)

$v_2(t)$ engendre aux bornes de $\underline{Z}_{RC}$ une tension $v_{R_2}(t)$

Calculer $v_{R_2}(t)$ en justifiant la démarche utilisée. (On pourra simplifier les sommes de complexes lorsque les modules sont très différents)

En déduire que $v_R(t)$ est quasiment alternatif sinusoïdal.

Préciser son expression.

Corrigé :

**a)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2} + j\,\dfrac{1}{2} = 1.e^{\,j\frac{\pi}{6}}$ 1 pt

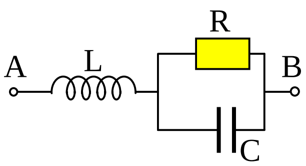
**b)** A la fréquence $50\ Hz$ :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{RC}} = R^{-1} + \left(\frac{1}{jC\omega}\right)^{-1} = \frac{1}{115} + j.\frac{1}{200} = \frac{\sqrt{3}}{200} + j.\frac{1}{200} = \frac{1}{200}.\left(\sqrt{3} + j\right) = \frac{1}{200}.2.e^{\,j\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{100}.e^{\,j\frac{\pi}{6}}$$

0,5 0,5

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{RC} = \frac{100}{e^{\,j\frac{\pi}{6}}} = 100.e^{-j\frac{\pi}{6}}.$$

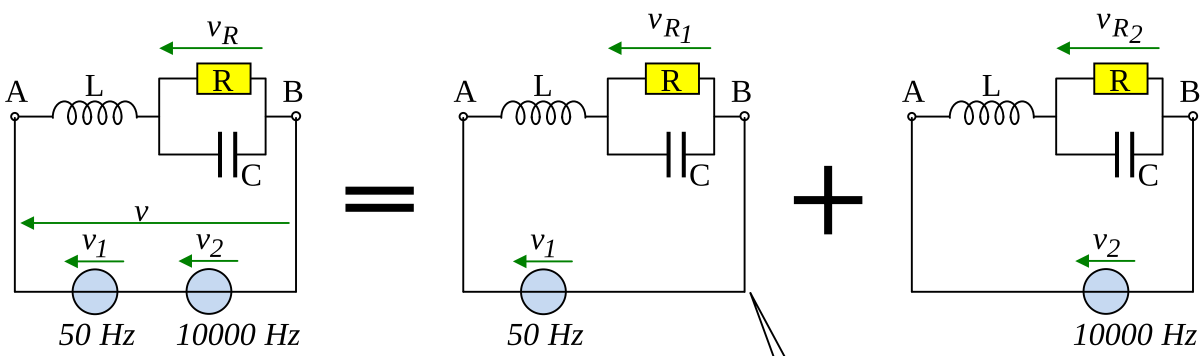
0,5




**c)** $\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \left(R^{-1} + jC\omega\right)^{-1}$ ou $\underline{Z}_{AB} = jL\omega + \dfrac{R}{jRC\omega + 1}$

1 pt

**d)** théorème de superposition :




1 pt

| Module des impédances | | |
|---|---|---|
| f | 50 Hz | 10 kHz |
| $L\omega$ | $0{,}6\ \Omega$ | $120\ \Omega$ |
| $\dfrac{1}{C\omega}$ | $200\ \Omega$ | $1\ \Omega$ |
| $R$ | $115\ \Omega$ | $115\ \Omega$ |
| $\lvert\underline{Z}_{RC}\rvert$ | $100\ \Omega$ | **1** |

**e)**

Pour un montage en parallèle, c'est la plus petite impédance qui l'emporte :

A $10\ kHz$ : $\left(R\,//\,\underline{Z}_C\right) \approx \left(\dfrac{-j}{C\omega} = -j\right)$. Donc $\left|\underline{Z}_{RC}\right| \approx 1$

1 pt

A $50\ Hz$ : $\left(\underline{V}_{R_1} = \dfrac{\underline{V}_1 . \underline{Z}_{RC}}{jL\omega + \underline{Z}_{RC}}\right) \approx \left(\dfrac{\underline{V}_1 . \underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RC}} = \underline{V}_1\right) \Rightarrow v_{R_1}(t) \approx v_1(t) = 325 . \sin(2\pi . 50 . t)$

0,5 0,5 0,5

A $10\ kHz$ : $\left(\underline{V}_{R_2} = \dfrac{\underline{V}_2 \cdot \underline{Z}_{RC}}{jL\omega + \underline{Z}_{RC}}\right) \approx \left(\dfrac{\underline{V}_2 \cdot \underline{Z}_{RC}}{jL\omega}\right)$ 0,5

$$\Rightarrow \underline{V}_{R_2} \approx \frac{240.e^{-j\frac{\pi}{2}}.(-j)}{j120} = -\frac{240}{120}.e^{-j\frac{\pi}{2}} = 2.e^{j\frac{\pi}{2}}$$ 1 pt

$$\Rightarrow v_{R_2}(t) \approx 2.\cos\left(2\pi\ .10000\ .t + \frac{\pi}{2}\right) = -2.\sin(2\pi\ .10000\ .t)$$ 0,5

D'après le théorème de superposition :

$$v_R(t) = v_{R_1}(t) + v_{R_2}(t) \approx 325\ .\sin(2\pi\ .50\ .t) - 2.\sin(2\pi\ .10000\ .t)$$ 0,5

$$\Rightarrow v_R(t) \approx 325\ .\sin(2\pi\ .50\ .t)$$ 0,5

Le filtre L-C permet de transmettre la composant basse fréquence à la charge « R » et d'éliminer la composante haute fréquence engendrée par l'onduleur MLI.