

UNIVERSITÉ D'ANGERS

ISTIA

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

2005

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : Sciences pour l'ingénieur

Présentée et soutenue publiquement par

Fabrice GUÉRIN

le 14 Décembre 2004

à l'ISTIA - Université d'Angers

Estimation de la fiabilité par les essais

Jury

Président	: Yves Dutuit, Professeur	Université de Bordeaux I
Rapporteurs	: Jean-Yves Hascoët, Professeur	École Centrale de Nantes
	Maurice Lemaire, Professeur	IFMA Clermont-ferrand
	Patrick Lyonnet, Professeur	ENI de Saint Etienne
Examineurs	: Bernard Dumon, Professeur	Université d'Angers
	Jaromir Antoch, Professeur	Université de Prague - République tchèque
	Jean-Claude Ligeron, Pdg	LIGERON SA

ESTIMATION DE LA FIABILITÉ PAR LES ESSAIS

Fabrice GUÉRIN



Université d'Angers

Fabrice GUÉRIN

Estimation de la fiabilité par les essais

vii+

Ce document a été préparé avec L^AT_EX_{2 ϵ} et la classe these-IRIN version 0.92 de l'association de jeunes chercheurs en informatique LOGIN, Université de Nantes. La classe these-IRIN est disponible à l'adresse :

<http://www.sciences.univ-nantes.fr/info/Login/>

Impression : hdr_guerin_version_recherche.tex – 25/1/2005 – 23:21

Révision pour la classe : \$Id: these-IRIN.cls,v 1.3 2000/11/19 18:30:42 fred Exp

Résumé

Ce mémoire a pour vocation de démontrer aux membres du jury ma capacité à diriger des recherches dans le cadre d'une activité d'enseignant-chercheur. Je présente une partie des travaux que j'ai initiés au cours de la dernière décennie. Dans un souci de cohérence d'ensemble, je n'ai présenté que les travaux relatifs à l'estimation de la fiabilité par les essais. Ils constituent le dénominateur commun aux quatre thèses que j'ai encadrées ou que j'encadre actuellement. Il est organisé de la manière suivante :

- le premier chapitre présente la problématique de l'estimation de la fiabilité par les essais.
- le deuxième rappelle les bases de la fiabilité nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.
- le troisième chapitre regroupe les travaux portant sur l'analyse statistique des essais aggravés.
- le chapitre 4 présente l'approche bayésienne des essais.
- le suivant aborde les essais accélérés dans une perspective d'estimer la fiabilité de composants mécaniques.
- un bilan et des perspectives concluent le mémoire.
- en annexe sont regroupées quelques publications afférentes aux résultats énoncés dans le document.

Mots-clés : Fiabilité, Modèle standard de vie accélérée, Statistiques bayésiennes, Estimation

Remerciements

Je remercie Yves Dutuit de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury, Jean-Yves Hascöet, Maurice Lemaire et Patrick Lyonnet d'avoir bien voulu participer à ce jury et accepté les responsabilités de rapporteurs.

Je souhaite remercier également chaleureusement Jaromir Antoch d'avoir accepté de participer au jury.

J'adresse également ma gratitude à Jean-Claude Ligeron pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail.

Je tiens à remercier très sincèrement Bernard Dumon pour son soutien et des multiples échanges que nous avons pu avoir durant ces dix ans à l'ISTIA.

Je souhaite également exprimer ma reconnaissance aux différents doctorants qui ont contribué aux travaux présentés dans ce document.

Enfin, tous mes remerciements vont aux collègues de l'ISTIA pour leur soutien, l'ambiance chaleureuse et amicale dans laquelle se sont déroulées mes activités d'enseignant-chercheur.

Notations

$\lambda(t)$: taux de défaillance .

$R(t)$: Fiabilité dépendant du temps t .

$1 - \gamma$: niveau de confiance .

$B(a, b)$: distribution Bêta de paramètres a et b .

$G(\alpha, \beta)$: distribution Gamma de paramètres α et β .

$N(\mu, \sigma)$: distribution normale de paramètres μ et σ .

$W(\beta, \eta)$: distribution de Weibull de paramètres β et η .

$g_0(\theta)$: fonction de densité de probabilité a priori du paramètre inconnu θ .

$f(X/\theta)$: fonction de vraisemblance du vecteur X connaissant θ .

$g(\theta/X)$: fonction de densité de probabilité a posteriori du paramètre inconnu θ connaissant X .

s_0 : stress en conditions nominales

$R_s(t)$: fiabilité à l'instant t sous stress s

$R_{s_0}(t)$: fiabilité à l'instant t sous stress nominal s_0

$f_s(t)$: fonction de transfert permettant de passer de R_s à R_{s_0}

$\chi_{\nu, p}^2$: fractiles de la loi de χ^2 de degré de liberté ν pour la probabilité p

$t_{\nu, p}^2$: fractiles de la loi de student de degré de liberté ν pour la probabilité p

$r(s)$: facteur d'accélération permettant de passer des conditions sévèrisées à celles nominales

$\rho(s_1, s_2)$: facteur d'accélération permettant de passer des conditions sévèrisées s_1 à s_2

$\delta(s)$: taux de changement d'échelle entre les conditions s_1 et s_2

β : paramètres du modèle d'accélération

z : le vecteur de primitives (associé aux niveau de stress)

R_m : limite à la rupture

σ_a : contrainte d'amplitude

σ_D : limite d'endurance

d : taux d'endommagement

D : endommagement cumulé

N : nombre de cycles

\dot{d} : vitesse d'endommagement

σ : écart type

μ : moyenne

$L(x_1, x_2)$: vraisemblance de paramètres x_1 et x_2

η : logarithme décimal de N

$S(\eta)$: nombre de systèmes survivants à l'instant η

$K(\eta)$: nombre de systèmes défaillants à l'instant η

(η) nombre de systèmes défaillants entre l'instant η^- et η

ϕ : fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

u : variable centrée réduite

ϵ : ensemble de stress

ϵ_0 : ensemble de stress particulier

Acronymes

HALT : Highly Accelerated Life Test

HASS : Highly Accelerated Stress Screen

HASA : Highly Accelerated Stress Audit

ESS : Environmental Stress Screen

STRIFE : STRESS for IIFFE

AMDEC : Analyse des Modes de Défaillance, de leurs Effets et Criticité

APR : Analyse Préliminaire des Risques

SVA : modèle Standard de Vie Accélérée

MTTF : Mean Time To Failure

Table des matières

Notations	1
Acronymes	3
Table des matières	5
1 Problématique de l'estimation de la fiabilité par les essais	9
2 Introduction à la fiabilité	11
2.1 Mesure des performances	11
2.2 Fiabilité et taux de défaillance instantané	13
2.3 Les principales lois de fiabilité	14
2.3.1 Loi exponentielle	14
2.3.2 Loi de Weibull	15
2.3.3 Loi normale	15
2.3.4 Loi lognormale	15
2.3.5 Loi Gamma	16
2.3.6 Loi binômiale	16
2.3.7 Loi beta	16
3 Les différents essais utilisés en fiabilité	17
3.1 Les essais dans le cycle de fiabilisation d'un produit	17
3.2 Les essais aggravés ou de robustesse	18
3.3 Les essais d'estimation de la fiabilité	20
3.3.1 Les essais de détermination	21
3.3.2 Les essais de démonstration	22
3.4 Déverminage	22
3.5 Conclusions	23
4 Estimation de la robustesse par les essais aggravés	25
4.1 Introduction	25
4.2 Analyse statistique des essais HALT	26
4.3 Définition des limites statistiques de zone	26
4.3.1 Limites opérationnelles dans le cas de la température	26
4.3.2 Limite opérationnelle dans le cas de la vibration	27
4.3.3 Limites de destruction dans le cas de la température	28
4.3.4 Limite de destruction dans le cas de la vibration	29
4.4 Définition des marges	30
4.5 Définition des niveaux de stress pour le déverminage de type HASS	32
4.5.1 Exemple simulé	33
4.6 Conclusion	36

5	Estimation de la fiabilité par les essais bayésiens	37
5.1	Introduction	37
5.2	Rappel du principe bayésien	37
5.3	Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité exponentielle	39
5.3.1	Définition de la vraisemblance	39
5.3.2	Définition de la connaissance a priori	39
5.3.3	Exemple d'application	40
5.4	Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité binômiale . .	41
5.4.1	Définition de la vraisemblance	41
5.4.2	Définition de la connaissance a priori	41
5.4.3	Exemple d'application	43
5.5	Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité normale ou lognormale	44
5.5.1	Définition de la vraisemblance	44
5.5.2	Définition de la connaissance a priori	44
5.5.3	Détermination des estimateurs bayésiens	46
5.5.4	Exemple d'application	47
5.6	Modélisation de la connaissance a priori issue d'avis d'experts	50
5.6.1	Cas des systèmes à mortalité exponentielle	51
5.6.2	Cas des systèmes à mortalité binômiale	52
5.6.3	Cas des systèmes à mortalité normale ou lognormale	54
5.7	Modélisation de la connaissance a priori issue de l'expertise à partir de l'étude sûreté de fonctionnement	55
5.7.1	Modèles d'architecture de système	55
5.7.2	Modélisation de la connaissance a priori	57
5.7.3	Exemple : Evénement indésirable défini par un arbre de défaillances	60
5.8	Vérification de la compatibilité de l'a priori avec la vraisemblance et pondération	63
5.8.1	Problématique	63
5.8.2	Objectifs d'un facteur de pondération normalisé K	63
5.8.3	Principe de calcul d'un facteur de pondération normalisé K	65
5.8.4	Calcul pratique du facteur K	66
5.8.5	Utilisation du facteur de pondération K comme facteur de pondération de l'a priori	68
5.8.6	Interprétation de la pondération par le facteur de pondération K	72
5.8.7	Exemples d'application - comparaison avec les essais classiques et bayésiens pondérés ou non	73
5.9	Conclusion	75
6	Estimation de la fiabilité par les essais accélérés	77
6.1	Définition d'un plan d'essai accéléré	77
6.1.1	Profils de stress utilisés	78
6.1.2	Types de stress utilisés	80
6.1.3	Modèles de vie accélérée	80
6.2	Modèle standard de vie accélérée	81
6.3	Application des modèles SVA à la mécanique	83
6.3.1	Introduction	83
6.3.2	Rappel sur l'endommagement par fatigue	84

6.3.3	Etude des SVA en mécanique	88
6.3.4	Définition d'un modèle de simulation	90
6.4	Plan d'essai accéléré par régression	92
6.4.1	Définition du plan d'essai	92
6.4.2	Application des SVA paramétriques	92
6.4.3	Application des SVA semi paramétriques à la fatigue	93
6.4.4	Application des SVA non paramétriques	94
6.4.5	Exemple par simulation d'un essai de fatigue	95
6.5	Plan d'essai avec endommagement préalable accéléré	101
6.5.1	Définition du plan d'essai	101
6.5.2	Application du modèle SVA paramétrique	103
6.5.3	Application du modèle SVA non paramétrique	104
6.5.4	Exemple par simulation	105
6.6	Plan d'essai en contraintes échelonnées	107
6.6.1	introduction	107
6.6.2	Définition du plan d'essai	108
6.6.3	Application du modèle SVA paramétrique en contraintes échelonnées à la fatigue	108
6.6.4	Exemple numérique :	109
6.6.5	Conclusion	111
6.7	Plan d'essai avec réparation	111
6.7.1	Rappels sur les plans d'essais avec réparation	111
6.7.2	Modèles de vie accélérée de systèmes réparables	113
6.7.3	Conclusion	118
6.8	Synthèse	118
7	Conclusions et Perspectives	121
	Bibliographie	123
A		131
A.1	Modèle d'Arrhenius	131
A.2	Modèle de Peck	131
A.3	Modèle de puissance inverse	131
A.4	Modèle d'Eyring	132
A.5	Conjuguée de la loi normale sans connaissance	132
A.6	Définition de la distribution a posteriori de la loi normale avec connaissance	134
A.7	Moyenne et variance pour différentes distributions	136
B		137
B.1	Reliability estimation by Bayesian method : definition of prior distribution using dependability study	137
B.2	Estimation de la fiabilité par les essais accélérés	137
B.3	Applying accelerated life models to HALT testing.	137

CHAPITRE 1

Problématique de l'estimation de la fiabilité par les essais

Plus les caractéristiques d'un produit ou d'un système sont appréhendées tôt dans son cycle de vie, moins les risques financiers ou reliés à la sûreté des installations dus à la non réalisation des performances attendues sont élevés. Dans un contexte d'exigences de systèmes de plus en plus fiables et sûrs, et de durées de garanties croissantes, il est impératif de vérifier le plus tôt possible que les performances des systèmes sont conformes au cahier des charges.

L'idéal, pour identifier la fiabilité du produit ou système avant même sa fabrication en série, est de procéder de façon classique à des séries d'essais sur des prototypes quand ils existent. Le problème est l'investissement en temps et en quantité de matériel important demandé car les matériels étant de plus en plus fiables, l'observation de défaillances est de moins en moins probable. Les industriels ne peuvent plus se permettre de tels coûts financiers. A l'extrême, certains systèmes se fabriquent à l'unité, ce qui rend les politiques d'essai difficiles.

Ainsi, cette problématique a été la source, pour la communauté scientifique, de nombreuses voies de recherche. Celles-ci sont basées principalement sur la modélisation stochastique des apparitions des défaillances au cours du temps et sur l'estimation statistique des paramètres des modèles à partir des résultats d'essai. Les premiers travaux ont consisté à étudier les essais réalisés en conditions nominales (on reproduit les conditions normale d'utilisation du produit), provoquant des temps d'essai importants, et avec des tailles d'échantillon élevées. Par la suite des travaux ont été menés pour réduire les tailles d'échantillon et temps d'essai :

- P. Sander, R. Badoux , H. Procaccia, C. Clarotti, A. Lannoy, J. Ringler, ... ([Sander and Badoux, 1991], [Procaccia et al., 1992], [Procaccia and Morilhat, 1996], [Clarotti, 1998], [Ringler, 1979], [Lannoy and Procaccia, 1994]) ont proposé d'intégrer toute la connaissance disponible sur la fiabilité des systèmes testés dans les plans d'essais, à l'aide des statistiques bayésiennes, permettant de réduire le nombre de produits à tester.
- W. Nelson, E. Elsayed, O'Connor, H. Caruso, Kececioglu, P. Hoang, V. Bagdonavicius, M. Nikulin, ... ([Nelson, 1990], [Shyur et al., 1999],[O'Connor, 2003], [Caruso and Dasgupta, 1998], [kececioglu, 1944], [Hoang, 2003], [kececioglu, 1944], [Bagdonavicius and Nikulin, 2002], ...) ont proposé d'utiliser les essais accélérés (sévérisation des conditions d'essai permettant de provoquer les défaillances plus rapidement) pour estimer la fiabilité d'un produit et les essais bayésiens

Ainsi, les travaux de l'équipe "Sûreté de fonctionnement des systèmes" du Laboratoire en Sûreté de fonctionnement, Qualité et Organisation (LASQUO, UPRES EA 3858) s'inscrivent dans cette problématique. C'est Bernard Dumon qui initia les travaux sur l'estimation de la fiabilité et plus particulièrement par les techniques bayésiennes. J'ai été recruté, en 1994, pour conforter cette équipe.

Ce document a donc pour objectif de rappeler une partie des travaux au cours des dix années passées. Par souci d'homogénéité je ne parlerai que des résultats relatifs à l'estimation de fiabilité par les essais,

qui constituent le dénominateur commun aux quatre thèses que j'ai dirigées ou qui sont en cours.

Ce document porte essentiellement sur l'estimation de la fiabilité par les essais en étudiant différentes techniques d'essais et plus particulièrement appliquées aux systèmes mécaniques.

Il est organisé de la manière suivante :

- Le second chapitre rappelle brièvement les définitions de quelques indicateurs de fiabilité qui seront utilisés dans la suite du document ([Villemeur, 1988], [Cocozza-Thivent, 1997], [Pages and Gondran, 1980], [Afnor, 1988]).
- Le troisième présente rapidement les différentes techniques d'essai de fiabilité en les situant dans le cycle de développement d'un produit ([Nelson, 1990], [Crowe and Feinberg, 2001], [ASTE, 1993], [O'Connor, 2003], [Ligeron and et M. Neff, 1984]).
- Le quatrième présente l'analyse statistique des résultats d'essai aggravé et plus particulièrement des essais HALT.¹ ([Crowe and Feinberg, 2001], [McLean, 2000], [kececioglu and Sun, 1999])
- Le cinquième présente les essais bayésiens permettant de réduire le nombre de produits à tester ([ASTE, 1993], [Marts and Walter, 1982], [Sander and Badoux, 1991]). Au cours de ce chapitre, nous traiterons deux aspects :
 - **la définition de la distribution a priori** permettant de capitaliser toute l'information disponible sur le système. Nous proposons de construire cette distribution à partir d'avis d'expert ([Cooke, 1991], [Lannoy and Procaccia, 2001]) et des études de Sûreté de fonctionnement effectuées sur le produit ([Guerin et al., 2003b],).
 - **la vérification de la compatibilité de l'a priori avec la vraisemblance et pondération** ([Usureau et al., 2004], [Guerin et al., 2004b]) donnant une méthodologie de comparaison entre ces deux distributions afin de vérifier la cohérence des résultats d'essai avec l' a priori et de pondérer celle-ci en fonction du degré de compatibilité.
- Le sixième présente les essais accélérés permettant de précipiter plus rapidement les défaillances et ainsi réduire les temps d'essai. Nous avons traité différents plans d'essai :
 - **le plan d'essai par régression** ([Nelson, 1990], [Bagdonavicius et al., 2000], [Tebbi et al., 2004b], [Vassilious and Mettas, 2001]) permettant de déduire la loi de fiabilité dans les conditions nominales à partir uniquement des résultats d'essais réalisés dans des conditions sévériées.
 - **le plan d'essai avec endommagement accéléré préalable** ([Bagdonavicius et al., 2000], [Tebbi et al., 2004b], [Tebbi et al., 2004c]) consistant à réaliser un essai où le début se fait dans les conditions sévériées afin de consommer rapidement le potentiel de durée de vie des produits testés et de finir l'essai sous conditions nominales pour y précipiter les défaillances.
 - **le plan d'essai en contraintes échelonnées** ([Nelson, 1990], [Hoang, 2003], [Guerin et al., 2004d]) permettant de réaliser un essai au cours duquel le stress de sévériisation augmente par palier.
 - **le plan d'essai avec réparation** ([Guida and Giorgio, 1995], [Guerin and Dumon, 2004b]) consistant à réparer les produits défaillants lors d'un test et de les réintroduire dans la campagne d'essai.
- Enfin je termine ce document par des conclusions et des perspectives sur l'ensemble de mes activités.

¹Highly Accelerated Life Test.

CHAPITRE 2

Introduction à la fiabilité

Dans ce chapitre, nous allons rappeler les éléments de base sur la fiabilité nécessaire pour comprendre les chapitres suivants. Le lecteur peut trouver plus de détails dans les ouvrages suivants : [Procaccia et al., 1992], [Ayyub and Mccuen, 1997], [Hoang, 2003], [Birolini, 1997], [Villemeur, 1988], [Pages and Gondran, 1980], [Afnor, 1988].

2.1 Mesure des performances

On considère un matériel (une carte électronique, un moteur, une voiture, un avion, ...) pouvant se trouver dans différents états. Cet ensemble d'états, noté \mathbb{E} , se décompose en deux sous-ensembles formant une partition : le sous-ensemble \mathbb{M} des états de marche et le sous-ensemble \mathbb{D} des états de défaillance. La "qualité" du matériel, du point de vue de la fiabilité, est donnée par un certain nombre d'indicateurs ou mesure de la performance que nous allons citer.

La fiabilité, ou fonction de survie, est définie comme " l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise, dans des conditions données, pendant un intervalle de temps donné ".

Par extension, on appelle également fiabilité, la probabilité associée $R(t)$ définie par :

$R(t) = \text{Prob}(\text{qu'une entité } E \text{ soit non défaillante sur la durée } [0 ; t], \text{ en supposant qu'elle n'est pas défaillante à l'instant } t = 0)$

La caractéristique contraire est appelée probabilité de défaillance du système (ou défiabilité). Elle est telle que :

$$\overline{R(t)} = 1 - R(t) \tag{2.1}$$

La Figure 2.1 ci-dessous présente une allure de la fonction $R(t)$ en fonction du temps.

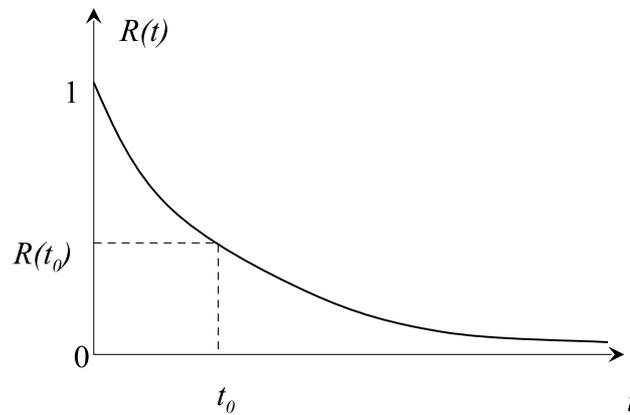


Figure 2.1 – Courbe de survie ou de fiabilité

Il est également possible de donner une estimation intuitive de la fiabilité $R(t)$ d'un parc de N matériels identiques en fonctionnement et non réparés après défaillance. En effet, en considérant que $n(t)$ est le nombre de matériels encore non défectueux à l'instant t , alors la valeur

$$R_{exp}(t) = \frac{n(t)}{N} \quad (2.2)$$

est une mesure expérimentale de la fiabilité des matériels.

Pour compléter l'approche théorique de la notion de fiabilité, il est nécessaire de définir aussi les notions suivantes, qui sont dérivées de la théorie des probabilités. La fonction $F(t) = \overline{R(t)} = 1 - R(t)$ représente la fonction de répartition de la variable aléatoire T (instant de défaillance). De même, la densité de probabilité de T est donnée par :

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt} \quad (2.3)$$

Ainsi, lors d'une approche expérimentale (voir [Birolini, 1997]), $F(t)$ et $f(t)$ ont les valeurs suivantes :

$$F(t) = \frac{N - n(t)}{N} \quad (2.4)$$

et

$$f(t) = -\frac{1}{N} \cdot \frac{dn(t)}{dt} \quad (2.5)$$

Une autre grandeur est aussi associée à la fiabilité, c'est le temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance, noté M.T.T.F. (" Mean Time To Failure "). Cette notion permet notamment de visualiser plus concrètement la fiabilité d'un matériel. Elle s'exprime par :

$$MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = - \int_0^{\infty} t \cdot \frac{dR(t)}{dt} \cdot dt$$

soit

$$MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt - [t \cdot R(t)]_0^{\infty}$$

puisque $[t \cdot R(t)]_0^{\infty} = 0$

alors

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt \quad (2.6)$$

Enfin, dans le cas particulier où l'étude porte sur des matériels fonctionnant à la sollicitation (démarrateur, air-bag, interrupteur, munition), la mesure de la Fiabilité est assimilée à la probabilité que le matériel fonctionne au moment de sa sollicitation. En pratique, on mesure plutôt la probabilité de défaillance à la sollicitation, notée $p = 1-R$.

Cette probabilité est définie par

$$p = \frac{\text{Nombre de défaillances à la sollicitation}}{\text{Nombre total des sollicitations}} = \frac{k}{N} \quad (2.7)$$

avec

- N : nombre de matériels testés
- k : nombre de matériels n'ayant pas fonctionné à la sollicitation
- p : probabilité de défaillance à la sollicitation

La défaillance à la sollicitation correspond au fait que le matériel testé refuse de changer d'état lorsqu'on le lui demande : marche-arrêt, ouverture-fermeture, mise à feu, ...

2.2 Fiabilité et taux de défaillance instantané

Il est aussi possible de définir la notion de taux instantané de défaillance au temps t , notée $\lambda(t)$. La valeur $\lambda(t)dt$ représente la probabilité d'avoir une défaillance dans l'intervalle de temps $[t; t + dt]$, sachant qu'il n'y a pas eu de défaillance dans l'intervalle de temps $[0; t]$.

Ainsi, en appliquant le théorème des probabilités conditionnelles, puis le théorème des probabilités totale, $\lambda(t)$ s'écrit

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{\text{Prob(défaillant sur } [t; t + dt] \text{ sans défaillance sur } [0; t])}{\text{Prob(non défaillant sur } [0; t])}$$

$$\lambda(t) \cdot dt = \frac{\text{Prob(défaillant sur } [0; t + dt]) - \text{Prob(défaillant sur } [0; t])}{\text{Prob(non défaillant sur } [0; t])}$$

soit finalement

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = -\frac{1}{R(t)} \cdot \frac{dR(t)}{dt} \quad (2.8)$$

Il est fréquent de représenter l'évolution du taux de défaillance $\lambda(t)$ au cours du temps t selon une courbe caractéristique dite en "baignoire" (voir figure 2.2).

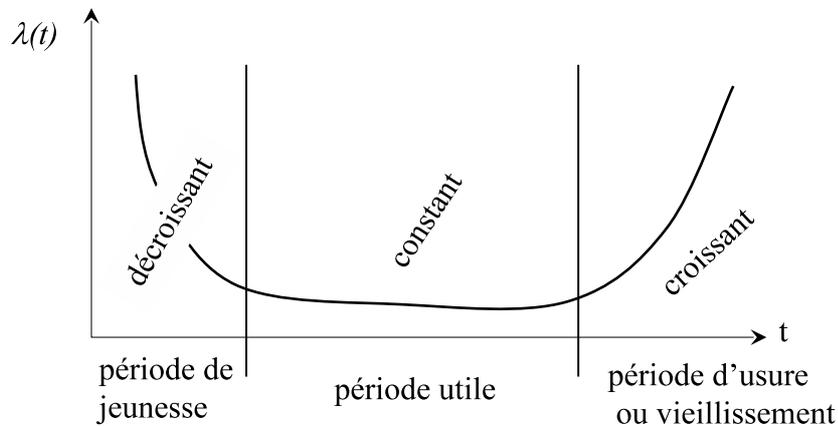


Figure 2.2 – Courbe en baignoire

Cette courbe se décompose en trois parties :

- la première concerne les défaillances précoces dues à des problèmes de conception (mauvais dimensionnement d'un composant, ...) ou de production (dérive d'un process de fabrication, ...),
- la deuxième partie, pouvant être plus ou moins importante selon le type de matériel (plus pour l'électronique et moins pour la mécanique et l'électromécanique), est caractéristique des défaillances aléatoires,
- la troisième partie correspond aux défaillances dues à des phénomènes d'usure, de vieillissement, ...

2.3 Les principales lois de fiabilité

Nous présentons dans cette section quelques distributions de vie qui interviennent le plus fréquemment dans l'analyse de la fiabilité. Nous énoncerons les principales propriétés de ces lois, les fonctions de survie (Fiabilité) associées ainsi que les taux de défaillance.

2.3.1 Loi exponentielle

Cette loi a de nombreuses applications dans plusieurs domaines. C'est une loi simple, très utilisée en fiabilité dont le taux de défaillance est constant. Elle décrit la vie des matériels qui subissent des défaillances brutales.

La fonction de survie d'une loi exponentielle de paramètre θ est :

$$R(t) = e^{-\frac{t}{\theta}} \quad (2.9)$$

Par conséquent le taux de défaillance est :

$$\lambda(t) = \frac{1}{\theta} \quad (2.10)$$

2.3.2 Loi de Weibull

La plus populaire des lois, souvent utilisée aussi bien en électronique qu'en mécanique ; elle caractérise mieux le comportement du produit dans les trois phases de vie : période de jeunesse, période de vie utile et période d'usure ou vieillissement.

La fonction de survie d'une loi de Weibull de paramètres η et β est :

$$R(t) = e^{\left(-\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.11)$$

Taux de défaillance :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.12)$$

2.3.3 Loi normale

La loi normale est très répandue parmi les lois de probabilité car elle s'applique à de nombreux phénomènes. La fonction de densité est définie par la moyenne μ et l'écart type σ :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.13)$$

La fonction de répartition est donnée par :

$$F(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx \quad (2.14)$$

Si t suit une loi normale Normale(μ, σ), $u = \frac{t-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite dont la fonction de répartition, notée ϕ , est donnée par :

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \quad (2.15)$$

2.3.4 Loi lognormale

Une variable aléatoire continue et positive t est distribuée selon une loi lognormale si son logarithme est distribué suivant une loi normale. Cette distribution est utilisée en fiabilité pour modéliser les défaillances par fatigue. La fonction de survie d'une loi lognormale de paramètres μ et σ est :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t) - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.16)$$

la fonction de densité est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.17)$$

Le taux de défaillance est donné par

$$\lambda(t) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)^2}}{t \int_0^\infty \sigma\sqrt{2\pi} f(t) dt} \quad (2.18)$$

2.3.5 Loi Gamma

Elle représente la loi de probabilité d'occurrence de α événements dans un processus poissonien. Par exemple si t_i est le temps entre les défaillances successives d'un système, et que t_i suive une distribution exponentielle, le temps cumulé d'apparition de α défaillances suit une loi Gamma de densité de probabilité :

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} \quad (2.19)$$

Le taux de défaillance est donné par

$$\lambda(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\int_t^\infty \Gamma(\alpha) f(u) du} \quad (2.20)$$

2.3.6 Loi binômiale

La loi binômiale s'applique pour décrire des phénomènes ayant des occurrences s'excluant mutuellement (états de fonctionnement ou de défaillance). Cette loi décrira principalement les systèmes utilisés à la sollicitation comme les munitions, les air-bag, ... La variable aléatoire correspondant au nombre d'échecs k à la sollicitation observables sur un échantillon testé, de taille n , en fonction de la probabilité de réalisation de cette occurrence p (soit la fiabilité ou la probabilité de défaillance), suit une loi binômiale :

$$f(k/p) = C_n^k p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad (2.21)$$

2.3.7 Loi beta

Cette loi représente, en particulier, la probabilité pour qu'un matériel survive jusqu'à un instant t , quand on essaie n matériels. D'où son intérêt dans l'évaluation de la durée des essais de fiabilité. La fonction de densité est définie par :

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)} x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} \quad (2.22)$$

où a et b sont les paramètres de distribution.

CHAPITRE 3

Les différents essais utilisés en fiabilité

3.1 Les essais dans le cycle de fiabilisation d'un produit

La fiabilisation d'un produit au cours de son cycle de vie de développement fait appel à de nombreuses phases dans lesquelles on utilise divers méthodes et outils (voir Figure 3.1).

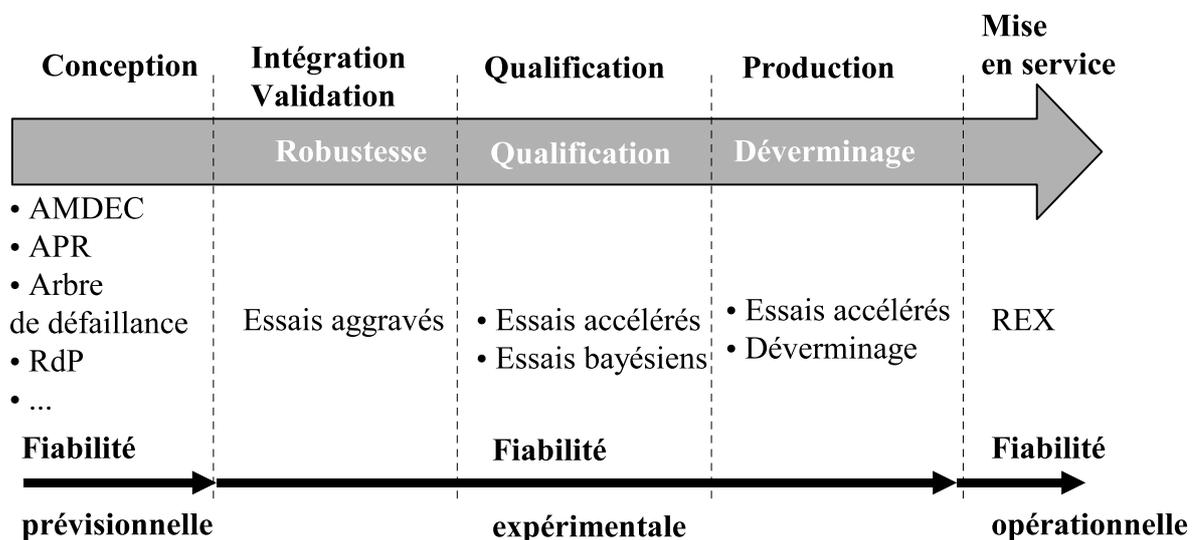


Figure 3.1 – Position des essais dans le cycle de développement d'un produit

Pour synthétiser (voir [Villemeur, 1988], [Pages and Gondran, 1980], [Biolini, 1997], [Afnor, 1988], [Ligeron and et M. Neff, 1984], [ASTE, 1993]), on peut distinguer trois grandes phases :

1. **Estimation prévisionnelle de la fiabilité** : cette phase consiste dès le début du projet à étudier la fiabilité à travers des analyses qualitatives (APR¹, AMDEC², ...) et quantitatives (Arbre de défaillance, Diagramme de fiabilité, ...). Pour des systèmes plus complexes, il est possible de modéliser la fiabilité par des réseaux de Petri (RdP) ou chaînes de Markov.
2. **Estimation expérimentale de la fiabilité** : dès que le développement du produit est suffisamment avancé et que l'on dispose des premiers prototypes, il est possible de réaliser des essais de robustesse (appelés également essais aggravés) afin de connaître les faiblesses et les marges de

¹Analyse Préliminaire des Risques

²Analyse des Modes de Défaillances, de leurs Effets et Criticité

conception. Une fois que le produit est mature (marges suffisantes), une campagne d'essai peut être menée pour estimer la fiabilité. Pour finir, lors de la production, l'élimination des défauts de jeunesse (dérive process, composant faible, ...) est opérée par un essai de déverminage.

3. **Estimation opérationnelle de la fiabilité** : une fois que le produit est en exploitation, une estimation de la fiabilité est réalisée à partir des données de retour d'expériences (REX).

L'ensemble des essais de fiabilité (robustesse, estimation et déverminage) contribue largement à la croissance de la fiabilité du produit au cours de son développement et de sa production (voir Figure 3.2).

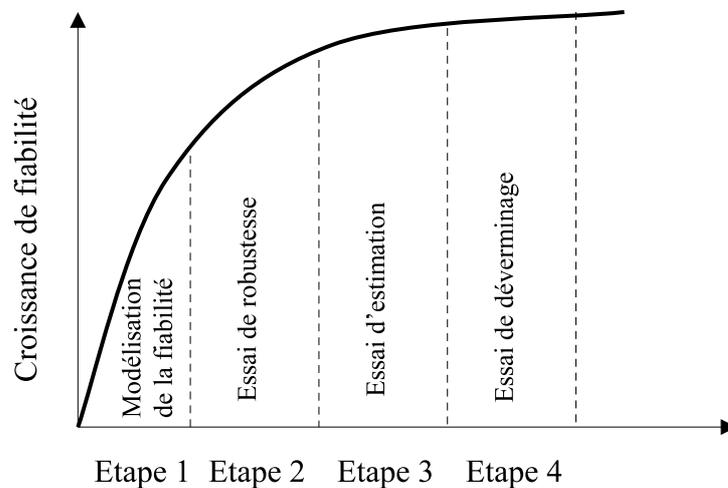


Figure 3.2 – Croissance de la fiabilité au cours du développement d'un produit

Les dernières techniques d'essais développées consistent à accélérer cette croissance de fiabilité par l'utilisation d'**essais accélérés** [Crowe and Feinberg, 2001]. Ainsi, on peut citer :

- essais de robustesse : les essais HALT (Highly **Accelerated** Life Test)
- essais d'estimation : les essais accélérés ALT (**Accelerated** Life Test)
- essais de déverminage : les essais HASS (Highly **Accelerated** Stress Screen)

Dans la suite, nous détaillons les objectifs des différents types d'essai.

3.2 Les essais aggravés ou de robustesse

Ces essais sont utilisés en phase de conception dans le but d'aboutir à un produit mature en mettant en évidence un certain nombre de faiblesses pour lesquelles on apporte des corrections afin de les éliminer pour augmenter la fiabilité (voir Figure 3.3).

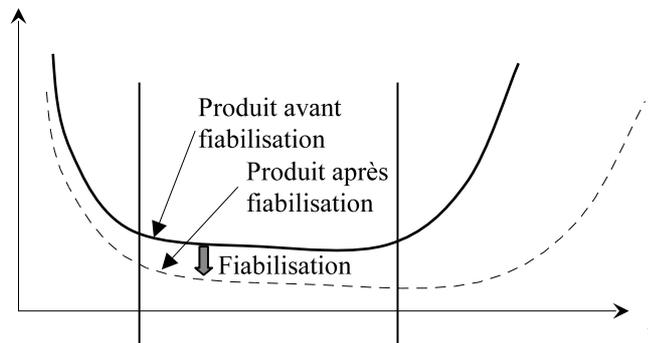


Figure 3.3 – Maturation des produits par les essais aggravés

Pour mettre en évidence les points faibles, on soumet le produit à des sollicitations échelonnées (climatiques, vibratoires, électriques, ...) en augmentant les niveaux jusqu'à apparition d'une défaillance (voir Figure 3.4). A chaque défaillance on effectue les analyses technologiques de défaillance pour voir si celle-ci est la conséquence d'une faiblesse latente (action corrective) ou si la limite de résistance de technologie est atteinte.

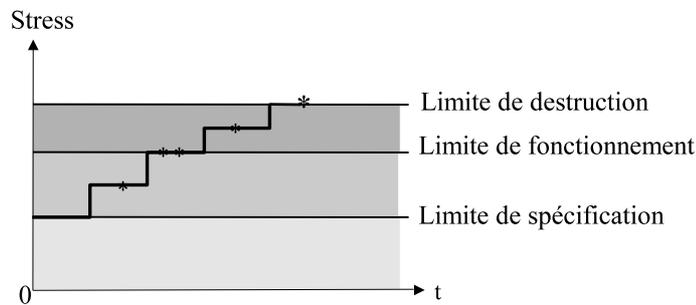


Figure 3.4 – Profil du test

Au cours de l'essai, on peut également s'intéresser à la limite de fonctionnement au delà de laquelle le produit fonctionnera en mode dégradé. Ainsi, lors de l'essai aggravé nous pouvons découvrir le comportement du produit sous l'effet de différents types de stress et mettre en évidence ses 4 domaines caractéristiques (voir figure 3.5, [ASTE, 1993] et [McLean, 2000]) qui sont :

- Zone de spécification du produit
- Zone de fonctionnement optimal
- Zone de fonctionnement dégradé
- Zone de destruction (défaillance)

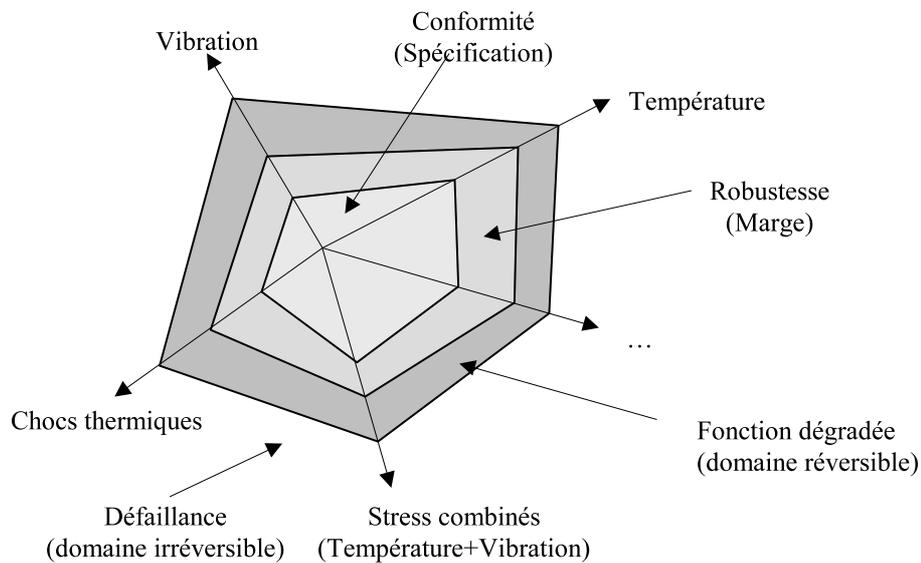


Figure 3.5 – Définition des zones caractéristiques du produit

De nombreux essais aggravés existent comme : STRIFE³ [ASTE, 1993], ESS⁴ [kececioglu and Sun, 1999], HALT⁵ [McLean, 2000], ... permettant d'obtenir :

- les limites inhérentes aux technologies utilisées
- un produit mature dès le début du cycle de production
- l'amélioration de la fiabilité opérationnelle

3.3 Les essais d'estimation de la fiabilité

Les essais d'estimation consistent à vérifier que les objectifs de fiabilité sont respectés (voir figure 3.6) en reproduisant les conditions d'utilisation du produit (cycle de marche/arrêt, température, humidité, ...).

³STREss for IIFE

⁴Environmental Stress Screen

⁵Highly Accelerated Life Test

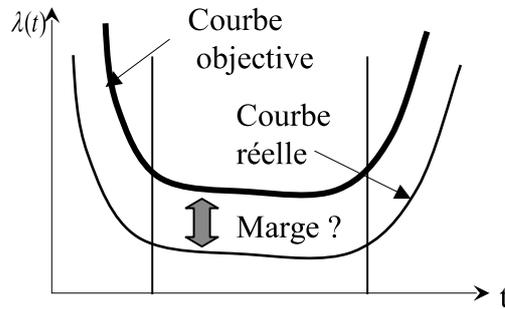


Figure 3.6 – Objectif d'un essai d'estimation

Pour cela, on dispose de deux stratégies d'essai :

1. les essais de détermination consistant à déterminer la valeur d'une caractéristique (MTTF, probabilité de défaillance, ...) ou les paramètres de la loi de mortalité d'un système.
2. les essais de démonstration permettant de montrer si la valeur d'une caractéristique de fiabilité d'un système est conforme ou non aux objectifs fixés.

On trouve une littérature abondante (voir [ASTE, 1993], [Biolini, 1997], [Afnor, 1988], [Ligeron and et M. Neff, 1984], ...) sur ces essais appliqués aux taux de défaillance et à la probabilité de défaillance.

3.3.1 Les essais de détermination

Détermination d'un taux de défaillance λ constant ou d'un $MTTF = 1/\lambda$:

Lorsque lors d'un essai de durée cumulée T , on constate k défaillances, les estimations ponctuelles du taux de défaillance λ ou du $MTTF$ sont données par :

$$\hat{\lambda} = \frac{k}{T} \quad \text{ou} \quad \widehat{MTTF} = \frac{T}{k} \tag{3.1}$$

Pour un niveau de confiance $(1-\gamma)$ et $k > 0$ donnés, les limites inférieure λ_{inf} et supérieure λ_{sup} de l'intervalle de confiance sur le taux de défaillance λ peuvent être obtenues de :

$$\hat{\lambda}_{inf} = \frac{\chi_{2k, \gamma/2}^2}{2T} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_{sup} = \frac{\chi_{2k+2, 1-\gamma/2}^2}{2T} \tag{3.2}$$

avec $\chi_{2k+2, 1-\gamma/2}^2$ déduit de la loi du χ^2 pour le degré de liberté $2k + 2$ et le niveau de confiance $(1 - \gamma/2)$.

Les limites correspondant au $MTTF$ sont données par :

$$\widehat{MTTF}_{inf} = \frac{2T}{\chi_{2k+2, 1-\gamma/2}^2} \quad \text{et} \quad \widehat{MTTF}_{sup} = \frac{2T}{\chi_{2k, \gamma/2}^2} \tag{3.3}$$

Détermination d'une probabilité de défaillance p (ou d'une fiabilité $R = 1 - p$) :

Lorsque lors d'un essai sur une échantillon de taille N , on constate k défaillances, l'estimation ponctuelle

de la probabilité de défaillance p est donnée par :

$$\hat{p} = \frac{k}{N} \quad (3.4)$$

Pour un niveau de confiance $(1-\gamma)$ et $k > 0$ donnés, les limites inférieure p_{inf} et supérieure p_{sup} de l'intervalle de confiance sur la probabilité de défaillance p peuvent être déduites de :

$$\sum_{i=k}^N C_i^N \hat{p}_{inf}^i (1 - \hat{p}_{inf})^{N-i} = \gamma/2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^k C_i^N \hat{p}_{sup}^i (1 - \hat{p}_{sup})^{N-i} = \gamma/2 \quad (3.5)$$

3.3.2 Les essais de démonstration

Démonstration d'un taux de défaillance λ constant ou d'un $MTTF = 1/\lambda$:

Le plan d'essai consiste à déterminer le temps cumulé d'essai assurant un $MTTF$ d'un système supérieur à une valeur objective $MTTF_0$ (en considérant un faible nombre de défaillances (si possible $k=0$)) pour un niveau de confiance donné $(1-\gamma)$.

La règle pour un plan de démonstration est, pour un $MTTF_0$ et $1-\gamma$ donnés, de calculer l'entier le plus petit k et le temps cumulé d'essai T qui satisfont :

$$prob(MTTF \geq MTTF_0) = 1 - \gamma = \sum_{i=0}^k \frac{T/MTTF_0}{i!} e^{-T/MTTF_0} \quad (3.6)$$

Démonstration d'une fiabilité ou d'une probabilité de défaillance :

Dans ce cas, on recherche la taille de l'échantillon N à tester vérifiant que la probabilité de défaillance p d'un système est inférieure à une valeur objective p_0 (en considérant un faible nombre de défaillances (si possible $k=0$)) pour un niveau de confiance donné $(1-\gamma)$.

La règle pour un plan de démonstration est, pour p_0 et $1-\gamma$ donnés, de calculer les entiers les plus petits k et N qui satisfont :

$$prob(p \geq p_0) = \gamma = \sum_{i=0}^k C_i^N p_0^i (1 - p_0)^{N-i} \quad (3.7)$$

3.4 Déverminage

L'objectif du déverminage est d'éliminer tous les défauts latents de la période de jeunesse (voir [ASTE, 1993], [kececioglu and Sun, 1999]). Pour cela, on soumet les produits sortant de fabrication à des sollicitations d'environnement (climatiques, vibratoires,) pendant une durée donnée de manière à faire apparaître les défauts de jeunesse :

- composants faibles
- défauts de fabrication
- faiblesses de conception (produits nouveaux) si elles n'ont pas été éliminées auparavant.

A l'issue de l'opération de déverminage, tous les produits de la production triée se trouvent dans la période utile (voir figure 3.7).

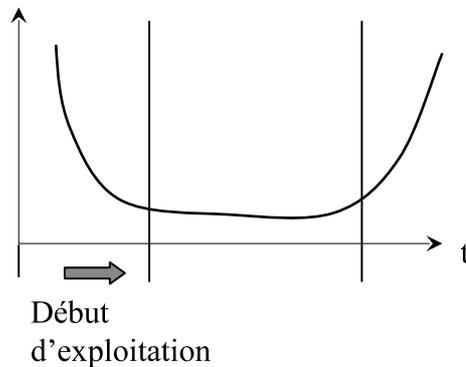


Figure 3.7 – Objectif du déverminage

Un produit est caractérisé par son seuil de résistance aux stress (température, vibration, ...) définie par une distribution normale. Aussi, le déverminage consiste à tronquer cette distribution de sa "queue gauche" afin d'obtenir une marge fonctionnelle optimale (voir figure 3.8).

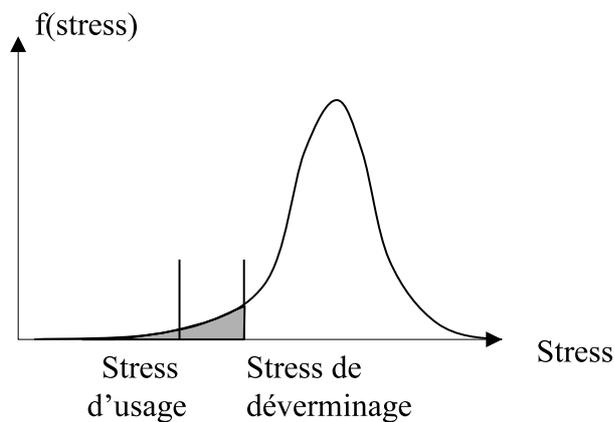


Figure 3.8 – Objectif du déverminage

Il existe de nombreuses techniques d'essai de déverminage dont : Burn in, ESS⁶, HASS⁷, HASA⁸, ...

3.5 Conclusions

Comme nous l'avons précisé précédemment, ces essais s'inscrivent dans une démarche de croissance de fiabilité en recherchant une plus grande rapidité par leur accélération.

⁶Environmental Stress Screen

⁷Highly Accelerated Stress Screen

⁸Highly Accelerated Stress Audit

Ainsi, les essais HALT et HASS ont été proposés par Greg Hobbs ([Lean, 1998], [McLean, 2000], [Motor, 2000]) pour lesquels aucune étude statistique avait été réalisé. Aussi, nous nous sommes intéressés à cette étude.

Pour augmenter l'efficacité des essais d'estimation, deux voies de recherche ont été développées au sein du LASQUO:

1. les essais bayésiens qui ont pour objectif d'intégrer dans le plan d'essai toute la connaissance disponible sur la fiabilité du produit permettant de réduire la taille de l'échantillon à tester. Toutefois, nous nous sommes intéressés à deux aspects peu traités qui sont :
 - la modélisation de la distribution a priori à partir de la connaissance disponible
 - la vérification de la compatibilité entre la distribution a priori et les premiers résultats d'essai
2. les essais accélérés qui ont pour objectif d'estimer la fiabilité en sévérant les conditions d'essai par rapport à celles d'usage. Toutefois, les travaux actuels concernent principalement leurs applications aux domaines de l'électronique. Aussi, nous les avons étudiés dans le cas de la mécanique en analysant différents plans d'essai.

CHAPITRE 4

Estimation de la robustesse par les essais aggravés

4.1 Introduction

Parmi les différents essais aggravés, l'essai HALT, proposé par Greg Hobbs, est le plus couramment utilisé dans l'industrie. L'objectif de cet essai est de soumettre le produit à des stress en escalier de température et de vibration, cycle de température et stress combinés (température et vibration), à des niveaux élevés afin de faire apparaître rapidement les faiblesses du produit (voir figure 4.1).

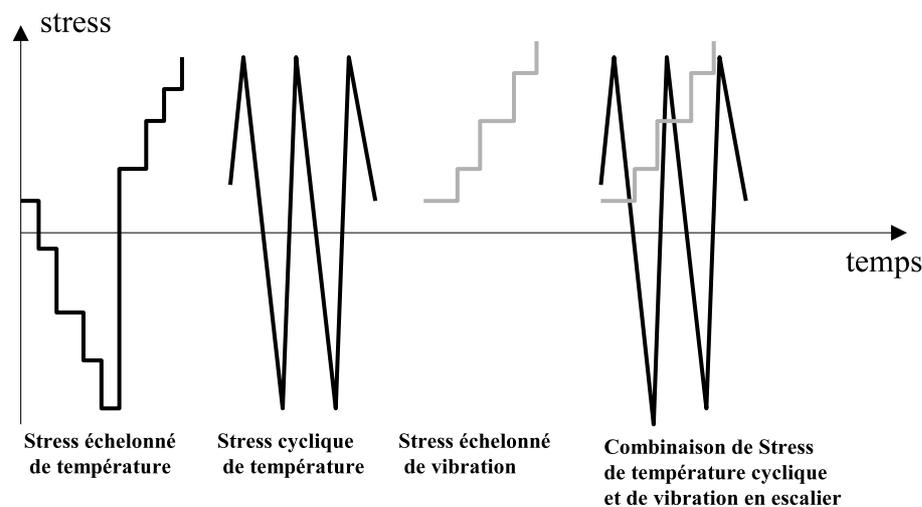


Figure 4.1 – Profil type d'un essai HALT

Les particularités de l'essai HALT par rapport aux autres (ESS, STRIFE, ...) concernent la combinaison de la température et de la vibration ainsi que les niveaux de stress atteints. A l'issue de chaque défaillance, une analyse technologique est menée afin de déterminer la cause exacte. S'il est nécessaire une modification de conception est réalisée et l'essai est poursuivi avec le ou les produits modifiés jusqu'à atteindre les marges de conception suffisantes.

Connaissant précisément ces marges, il est possible de définir un profil de déverminage (HASS) avec des niveaux de stress plus élevés que classiquement (Burn in, ESS, ...) afin de précipiter plus rapidement les défauts de jeunesse dus à la fabrication.

Les travaux publiés sur ces essais ([Lean, 1998], [McLean, 2000], [Motor, 2000], [Crowe and Feinberg, 2001], [O'Connor, 2003], [Yang and Yang, 1998], [Masotti and Morelli, 1998]) présentent la méthodologie, les résultats d'analyse de défaillance et les études financières concernant les gains obtenus par son utilisation. Aussi, devant le peu d'études statistiques, nous nous sommes intéressés à cette problématique.

4.2 Analyse statistique des essais HALT

Si on considère un seul axe de la figure en radar (Figure 4.2), les différentes zones caractéristiques du produit peuvent se décrire par le schéma suivant (dans le cas où le stress se caractérise par des limites inférieures et supérieures comme par exemple la température) :

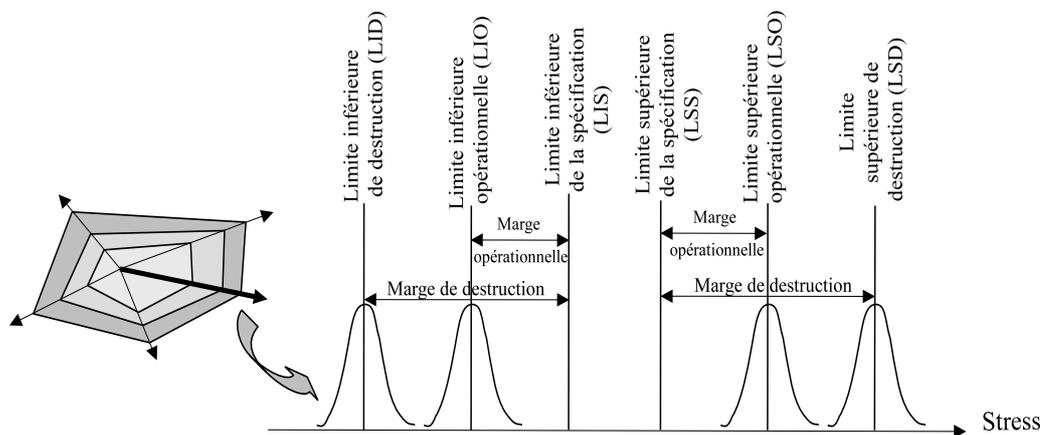


Figure 4.2 – Définition statistique des zones caractéristiques du produit

Chaque limite intrinsèque au produit sera entachée d'une certaine variabilité que l'on peut caractériser par une loi normale. Ainsi, au cours d'une campagne d'essai HALT, l'objectif est de définir le plus précisément ces différentes lois normales.

4.3 Définition des limites statistiques de zone

Dans cette première étude, nous nous sommes intéressés aux essais réalisés selon 2 stress indépendants : la température et la vibration.

4.3.1 Limites opérationnelles dans le cas de la température

Pour déterminer les limites opérationnelles supérieure et inférieure d'un produit sous l'effet de la température, on procède par des essais en contrainte échelonnée (Figure 4.3) où progressivement on diminue le niveau de température (échelon de 1 à 10°C et durée de palier de 1 à 10 min) jusqu'à constater le dysfonctionnement du produit (performance dégradée mais réversible si l'on augmente la température)

en affinant la recherche de la valeur critique par des échelons plus petits. Ainsi, on obtient la limite inférieure de fonctionnement $LIO(T)$. On opère de la même manière pour déterminer la limite supérieure $LSO(T)$ avec le même produit puisque le phénomène associé aux limites opérationnelles est réversible. Cette opération est répétée pour l'ensemble de l'échantillon afin de définir les lois normales associées aux limites.

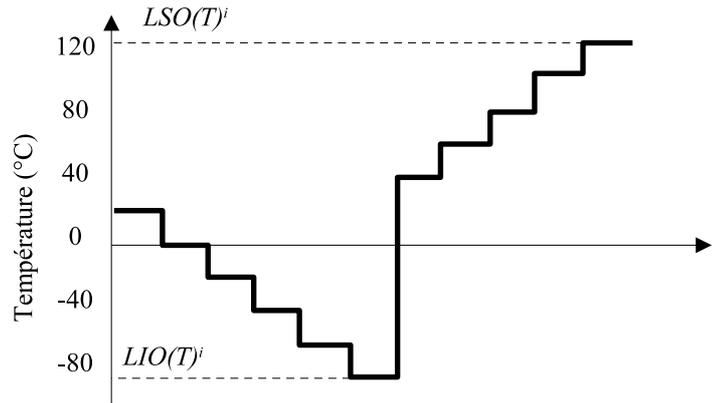


Figure 4.3 – Cycle de température pour estimer LIO et LSO

Nous déduisons les paramètres des lois normales (moyenne et écart-type) :

$$\mu_{LIO(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LIO(T)^i \quad (4.1)$$

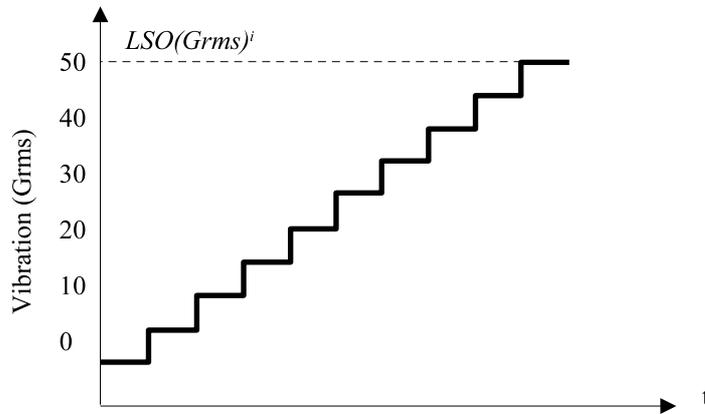
$$\sigma_{LIO(T)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (LIO(T)^i - \mu_{LIO(T)})^2} \quad (4.2)$$

$$\mu_{LSO(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LSO(T)^i \quad (4.3)$$

$$\sigma_{LSO(T)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (LSO(T)^i - \mu_{LSO(T)})^2} \quad (4.4)$$

4.3.2 Limite opérationnelle dans le cas de la vibration

Pour déterminer la limite opérationnelle supérieure sous l'effet de la vibration on procède de la même façon que pour la température par des essais en contrainte échelonnée (Figure 4.4) où progressivement on augmente le niveau de vibration (échelon de 1 à 10 Grms et durée de palier de 1 à 10 min) jusqu'à constater le dysfonctionnement du produit permettant d'obtenir la limite supérieure de fonctionnement $LSO(Grms)$ en affinant la recherche de la valeur critique par des échelons plus petits.

Figure 4.4 – Cycle de vibration pour estimer LSO

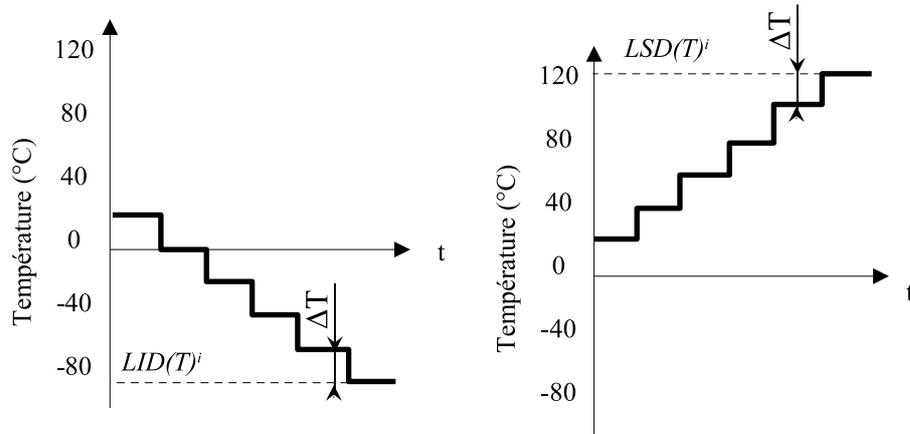
Les paramètres de la loi normale $LSO(Grms)$ sont définis par :

$$\mu_{LSO(Grms)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LSO(Grms)^i \quad (4.5)$$

$$\sigma_{LSO(Grms)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (LSO(Grms)^i - \mu_{LSO(Grms)})^2} \quad (4.6)$$

4.3.3 Limites de destruction dans le cas de la température

Pour estimer les limites de destruction supérieure et inférieure d'un produit sous l'effet de la température, on réalise un essai identique au cas de l'évaluation des limites opérationnelles (Figure 4.5) mais on augmente le niveau de température jusqu'à destruction du produit (état irréversible). Pour tester l'irréversibilité de la défaillance, la température est ramenée dans la zone de spécification pour vérifier le non fonctionnement définitif du produit. La limite supérieure de destruction $LSD(T)$ est obtenue en considérant que la vraie valeur se trouve entre l'avant dernier et dernier échelon. Nous opérons pour la prise en compte de la valeur médiane. On opère de la même manière pour déterminer la limite inférieure $LID(T)$


 Figure 4.5 – Cycles de température pour estimer LID et LSD

Les paramètres des lois normales $LID(T)$ et $LSD(T)$ sont obtenus par :

$$\mu_{LID(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(LID(T)^i + \frac{\Delta T}{2} \right) \quad (4.7)$$

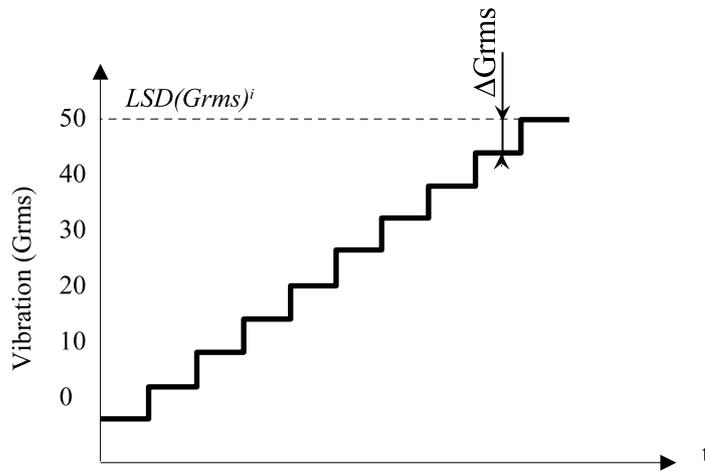
$$\sigma_{LID(T)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(LID(T)^i + \frac{\Delta T}{2} - \mu_{LID(T)} \right)^2} \quad (4.8)$$

$$\mu_{LSD(T)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(LSD(T)^i - \frac{\Delta T}{2} \right) \quad (4.9)$$

$$\sigma_{LSD(T)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(LSD(T)^i - \frac{\Delta T}{2} - \mu_{LSD(T)} \right)^2} \quad (4.10)$$

4.3.4 Limite de destruction dans le cas de la vibration

L'estimation de la limite supérieure de destruction $LSD(Grms)$ se fait selon l'essai défini par la Figure 4.6.

Figure 4.6 – Cycle de vibration pour estimer LSD

Les paramètres de la loi normale $LSD(Grms)$ sont définis par :

$$\mu_{LSD(Grms)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(LSD(Grms)^i - \frac{\Delta Grms}{2} \right) \quad (4.11)$$

$$\sigma_{LSD(Grms)} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(LSD(Grms)^i - \frac{\Delta Grms}{2} - \mu_{LSD(Grms)} \right)^2} \quad (4.12)$$

4.4 Définition des marges

Connaissant les distributions des différentes limites, il est possible de définir les marges que nous avons entre les spécifications et les limites opérationnelles (Figure 4.7).

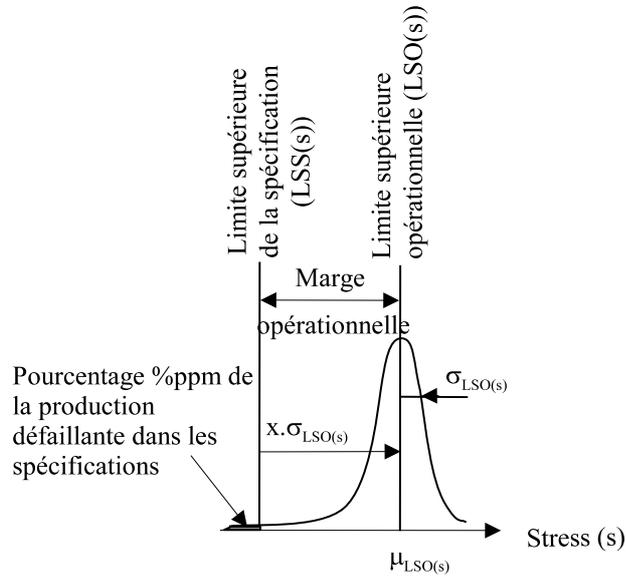


Figure 4.7 – Définition de la marge opérationnelle

Ainsi, pour le cas d'un stress, la marge opérationnelle entre la spécification supérieure et la limite supérieure opérationnelle (définie par une loi normale) s'écrit :

$$Marge\ opérationnelle = \mu_{LSO(s)} - LSS(s) \tag{4.13}$$

Nous pouvons également déduire une autre caractéristique associée à la marge qui est la proportion %ppm de produits défectueux dans la zone de spécification :

$$\%ppm = prob(LSO(s) \leq LSS(s)) = \phi\left(\frac{LSS(s) - \mu_{LSO(s)}}{\sigma_{LSO(s)}}\right) \tag{4.14}$$

avec $\phi(u)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

(Nota : On déduit de la même manière les autres marges opérationnelles)

Lors d'un essai HALT, nous recherchons les modifications nécessaires pour obtenir une marge suffisante. C'est ainsi que l'on peut se fixer un objectif de proportion de défaut %ppm et de déduire la marge nécessaire exprimée en nombre x d'écart type $\sigma_{LSO(s)}$. Ainsi, la relation 4.14 devient :

$$\%ppm = \phi\left(\frac{LSS(s) - x \cdot \sigma_{LSO(s)} - LSS(s)}{\sigma_{LSO(s)}}\right) = \phi(-x) \tag{4.15}$$

De cette dernière équation, nous pouvons déduire le pourcentage %ppm en fonction de la marge exprimée par x (voir le tableau 4.1)

x	%ppm
1	158655,26
1,5	66807,23
2	22750,06
2,5	6209,68
3	1349,97
3,5	232,67
4	31,69
4,5	3,40
5	0,29

Table 4.1 – ppm en fonction de la marge x

4.5 Définition des niveaux de stress pour le déverminage de type HASS

Les résultats des essais HALT peuvent également servir à définir les essais de déverminage HASS réalisés lors de la production (voir [McLean, 2000] et [Motor, 2000]). Pour cela, on considère les lois normales des limites opérationnelles (Figure 4.8) définies lors de l'essai HALT. Le cycle de température de l'essai HASS est défini par 2 valeurs extrêmes estimées pour un niveau de confiance donné $(1-\gamma)$.

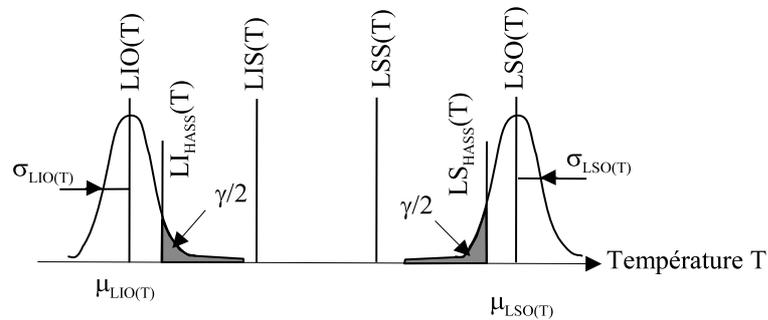


Figure 4.8 – Définition du cycle de température pour l'essai HASS

Les 2 températures inférieure et supérieure du cycle HASS sont définies par :

$$LI_{HASS}(T) = \mu_{LIO}(T) + u_{1-\gamma/2}\sigma_{LIO}(T) \quad (4.16)$$

$$LS_{HASS}(T) = \mu_{LSO}(T) - u_{1-\gamma/2}\sigma_{LSO}(T) \quad (4.17)$$

Les valeurs $u_{1-\gamma/2}$ sont tirées du tableau 4.2:

$1-\gamma/2$	$1-\gamma$	$u_{1-\gamma/2}$	$u_{1-\gamma}$
0.95	0.95	1.64	1.64
0.96	0.96	1.75	1.75
0.97	0.97	1.88	1.88
0.98	0.98	2.05	2.05
0.99	0.99	2.33	2.33
0.999	0.999	3.09	3.09
0.9999	0.9999	3.72	3.72

Table 4.2 – valeurs de $u_{1-\gamma/2}$ et $u_{1-\gamma}$

Le cycle de vibration se déduit de la même manière, en considérant la loi normale de la limite supérieure opérationnelle LSO(Grms) (Figure 4.9).

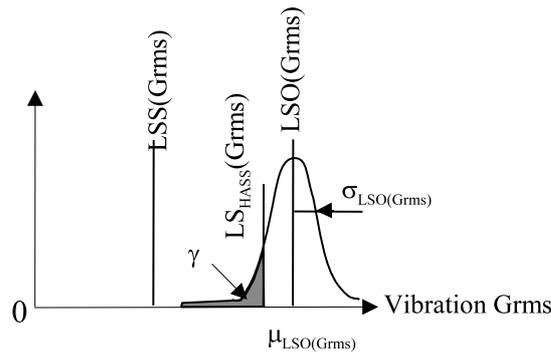


Figure 4.9 – Définition du cycle de vibration pour l'essai HASS

Le niveau de vibration du cycle HASS est défini par :

$$LS_{HASS}(Grms) = \mu_{LSO}(Grms) - u_{1-\gamma}\sigma_{LSO}(Grms) \tag{4.18}$$

avec les valeurs $u_{1-\gamma}$ tirées du tableau 4.2

4.5.1 Exemple simulé

Nous considérons un échantillon de 21 produits soumis à un essai sous stress échelonnés en température et vibration. Les spécifications du produit en température et vibration sont :

- limite supérieure en température : $LSS(T) = 55^{\circ}C$
- limite inférieure en température : $LIS(T) = -25^{\circ}C$
- limite supérieure en vibration : $LSS(Grms) = 15$ Grms

Les résultats de d'essai seront simulés selon les lois normales suivantes :

- limite supérieure opérationnelle en température : $LSO(T) \sim N(\mu_{LSO}(T), \sigma_{LSO}(T)) = N(80^{\circ}C, 5^{\circ}C)$

- limite inférieure opérationnelle en température : $LIO(T) \sim N(\mu_{LIO(T)}, \sigma_{LIO(T)}) = N(-45^\circ C, 5^\circ C)$
- limite supérieure opérationnelle en vibration : $LSO(Grms) \sim N(\mu_{LSO(Grms)}, \sigma_{LSO(Grms)}) = N(35Grms, 5Grms)$
- limite supérieure de destruction en température : $LSD(T) \sim N(\mu_{LSD(T)}, \sigma_{LSD(T)}) = N(120^\circ C, 6^\circ C)$
- limite inférieure de destruction en température : $LID(T) \sim N(\mu_{LID(T)}, \sigma_{LID(T)}) = N(-80^\circ C, 6^\circ C)$
- limite supérieure de destruction en vibration : $LSD(Grms) \sim N(\mu_{LSD(Grms)}, \sigma_{LSD(Grms)}) = N(50Grms, 6Grms)$

Le plan d'essai sera conduit de la manière suivante (Figure 4.10) :

1. dans un premier temps, nous simulons les données correspondant aux différentes limites opérationnelles ($LIO(T)$, $LSO(T)$ et $LSO(Grms)$) des 21 produits,
2. ensuite l'échantillon de 21 produits est réparti en 3 sous-échantillons de 7 produits afin de simuler les différentes limites de destruction $LID(T)$, $LSD(T)$ et $LSD(Grms)$

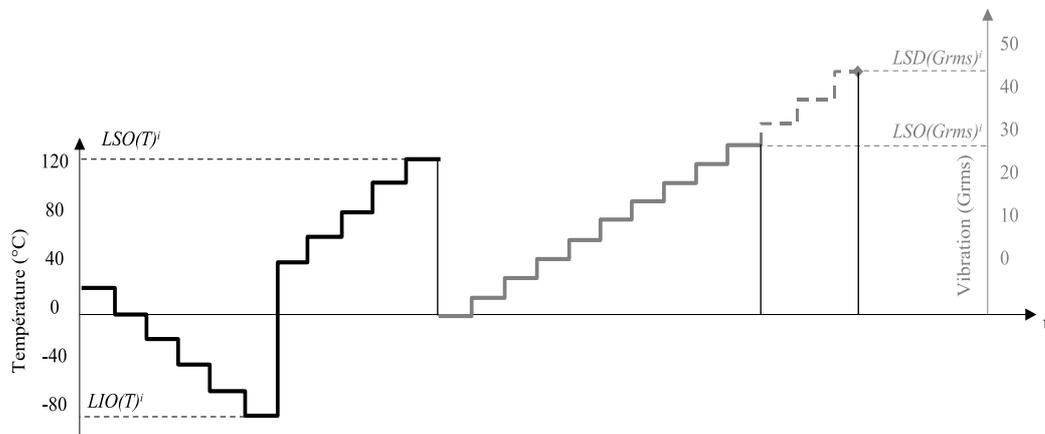


Figure 4.10 – Conduite de l'essai HALT simulé

Nous obtenons pour l'échantillon complet les résultats suivants :

Produit i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$LSO(T)^i$	80	85	80	85	80	85	70	75	75	85	70	80	80	80	80	70	80	75	75	75	85
$LIO(T)^i$	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	40	45	50	45	40	50	50	35	45	45	45	40	50	50	40	45	35	45	45	45	35
$LSO(Grms)^i$	30	35	25	30	25	35	30	40	35	30	30	40	35	40	40	35	35	40	35	25	40

Table 4.3 – Données simulées de $LSO(T)^i$, $LIO(T)^i$ et $LSO(Grms)^i$ pour l'ensemble de l'échantillon

De ces données, nous pouvons déduire les paramètres des lois normales (moyenne μ et écart-type σ) caractérisant les différentes limites opérationnelles $LSO(T)$, $LIO(T)$ et $LSO(Grms)$:

- $LSO(T) \sim N(\mu_{LSO(T)}, \sigma_{LSO(T)}) = N(78.57^\circ C, 5.03^\circ C)$
- $LIO(T) \sim N(\mu_{LIO(T)}, \sigma_{LIO(T)}) = N(-43.80^\circ C, 4.97^\circ C)$
- $LSO(Grms) \sim N(\mu_{LSO(Grms)}, \sigma_{LSO(Grms)}) = N(33.8Grms, 5.22Grms)$

Ensuite, nous simulons les données de limites de destruction en température haute (produits de 1 à 7), température basse (produits de 8 à 14) et en vibration (produits de 15 à 21) :

produit i	1	2	3	4	5	6	7
$LSD(T)^i$	130	115	110	120	125	125	130

Table 4.4 – Données simulées de $LSD(T)^i$ pour le sous-échantillon 1(produits 1 à 7)

produit i	8	9	10	11	12	13	14
$LID(T)^I$	-85	-85	-75	-90	-75	-80	-85

Table 4.5 – Données simulées de $LSD(T)^i$ pour le sous-échantillon 2 (produits 8 à 14)

produit i	15	16	17	18	19	20	21
$LSD(Grms)^I$	45	50	60	55	60	45	50

Table 4.6 – Données simulées de $LSD(Grms)^i$ pour le sous-échantillon 3 (produits 15 à 21)

De ces données, nous pouvons déduire les paramètres des lois normales (moyenne μ et écart-type σ) caractérisant les différentes limites de destruction $LSD(T)$, $LID(T)$ et $LSD(Grms)$:

- $LSD(T) \sim N(\mu_{LSD(T)}, \sigma_{LSD(T)}) = N(119.64^\circ C, 7.56^\circ C)$
- $LID(T) \sim N(\mu_{LID(T)}, \sigma_{LID(T)}) = N(-79.64^\circ C, 5.67^\circ C)$
- $LSD(Grms) \sim N(\mu_{LSD(Grms)}, \sigma_{LSD(Grms)}) = N(49.64Grms, 6.36Grms)$

La simulation montre la démarche à conduire lors d'une campagne d'essais HALT. Plus particulièrement, nous constatons que la taille de l'échantillon est importante dans la précision des résultats.

De ceux-ci, nous pouvons réaliser des analyses plus évoluées et en particulier des estimations de proportions de produits défectueux dans la zone de spécification :

1-Proportion de produits défectueux en deçà de la limite supérieure de spécification en température :

$$\%ppm = prob(LSO(T) \leq LSS(T)) = \phi\left(\frac{LSS(T) - \mu_{LSO(T)}}{\sigma_{LSO(T)}}\right) = \phi\left(\frac{55 - 78.57}{5.03}\right) = 1.4 ppm$$

2-Proportion de produits défectueux au delà de la limite inférieure de spécification en température :

$$\%ppm = prob(LIO(T) \leq LIS(T)) = 1 - \phi\left(\frac{LIS(T) - \mu_{LIO(T)}}{\sigma_{LIO(T)}}\right) = 1 - \phi\left(\frac{-25 + 43.8}{4.97}\right) = 77.6 ppm$$

3-Proportion de produits défectueux en deçà de la limite supérieure de spécification en vibration :

$$\%ppm = prob(LSO(Grms) \leq LSS(Grms)) = \phi\left(\frac{LSS(Grms) - \mu_{LSO(Grms)}}{\sigma_{LSO(Grms)}}\right)$$

soit

$$\%ppm = prob(LSO(Grms) \leq LSS(Grms)) = \phi\left(\frac{15 - 33.8}{5.22}\right) = 158.2 ppm$$

Nous pouvons également préciser les 2 températures inférieure et supérieure ainsi que le niveau de vibration du cycle HASS définis pour le niveau de confiance 98% :

$$LI_{HASS}(T) = \mu_{LIO(T)} + u_{99\%}\sigma_{LIO(T)} = -43.8 + 2.33 \times 4.97 = -32.2^\circ C$$

$$LS_{HASS}(T) = \mu_{LSO(T)} - u_{99\%}\sigma_{LSO(T)} = 78.57 - 2.33 \times 5.03 = 66.8^\circ C$$

$$LS_{HASS}(Grms) = \mu_{LSO(Grms)} - u_{98\%}\sigma_{LSO(Grms)} = 33.8 - 2.05 \times 5.22 = 23.1 Grms$$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité les aspects statistiques des essais aggravés et plus particulièrement des essais HALT. Rappelons qu'ils permettent :

- d'éliminer les points faibles de conception en les décelant et en les corrigeant
- de définir les limites opérationnelles et de destruction
- d'évaluer les marges opérationnelles et de destruction

Lors de notre recherche bibliographique, nous avons trouvé très peu de littérature sur le sujet et sans de réelle approche théorique. Aussi, nous proposons des estimateurs des paramètres de distributions normales caractéristiques des limites opérationnelles et de destruction en température et vibration. Cette hypothèse de normalité est communément admise dans la littérature comme dans [McLean, 2000] et [Crowe and Feinberg, 2001]. A partir de ces distributions, nous donnons des estimateurs des marges opérationnelles et de destruction. Et pour finir, nous avons indiqué une nouvelle méthodologie pour définir le profil de déverminage HASS en considérant la marge de destruction et en se fixant un niveau de risque acceptable de détruire des produits sains au cours de l'opération. En effet, dans la littérature le profil de déverminage est défini en considérant 80% des limites de destruction.

Ces travaux sont synthétisés dans l'article publié dans une revue nationale [Guerin et al., 2004c].

Avec l'arrivée d'une enceinte climatique à l'ISTIA (permettant de réaliser des essais aggravés, accélérés et déverminages) nous allons analyser expérimentalement les essais aggravés, vérifier leur efficacité et poursuivre les analyses statistiques des résultats d'essai en :

- vérifiant la corrélation entre robustesse (aptitude du produit à fonctionner au delà des spécifications) et fiabilité (aptitude du produit à fonctionner dans les limites de spécification)
- étendant aux autres types de stress (température cyclique, stress combinés, ...)
- étudiant le problème de l'échantillonnage (puisque dans la réalité peu de prototypes sont disponibles)
- proposant des méthodes d'estimation de la fiabilité à partir des défaillances imputables à des problèmes de fiabilité à l'aide des modèles de vie accélérée abordées dans le paragraphe suivant (voir l'application dans l'article en annexe B.3 intitulé "Applying accelerated life models to HALT testing.")

Estimation de la fiabilité par les essais bayésiens

5.1 Introduction

Comme nous l'avons montré précédemment, les essais d'estimation sont coûteux en temps. Ainsi, il est indispensable d'optimiser les campagnes d'essai en sachant que les niveaux de performances souhaitées à valider sont élevés (probabilité de défaillances et taux de défaillance très faibles) et que la taille des échantillons est telle que l'on a peu de chance d'observer des défaillances.

Dans cette optique, l'approche bayésienne s'impose puisqu'elle va permettre :

1. d'utiliser le maximum de connaissances disponibles en exploitant les résultats des essais sur des produits similaires et les données issues de l'expertise,
2. de définir un plan d'essais limité, après intégration de la connaissance disponible, afin de valider un objectif de "fiabilité" à un niveau de confiance donné,
3. d'intégrer à la connaissance les résultats des séries d'essais au fur et à mesure du développement du produit, elle est ainsi capitalisée automatiquement,
4. d'exploiter le cas du "zéro" défaillance difficile à traiter avec une approche statistique classique qui demanderait une taille d'échantillons très importante.

Il existe de nombreux travaux traitant les techniques bayésiennes. Nous pouvons citer les travaux fondamentaux : [Robert, 1992], [Robert, 2001], [Congdon, 2001], [Ibrahim et al., 2001]... et les travaux concernant les applications à la fiabilité : [Ringler, 1979], [Procaccia et al., 1992], [Procaccia and Morilhat, 1996], [Lannoy and Procaccia, 1994], [Lannoy and Procaccia, 2001], [Sander and Badoux, 1991], [Marts and Walter, 1982], [Ross, 2003].... Le problème difficile à résoudre dans le cadre des techniques bayésienne reste la modélisation de la connaissance a priori (connaissance initialement disponible). Pourtant, il existe de nombreuses sources de données de fiabilité (des études de sûreté de fonctionnement, étude d'évaluation de risques, d'avis d'expert, du retour d'expérience et des recueils de données).

Aussi, nous avons proposé dans le cadre de la thèse d'Emmanuel Usureau ([Usureau et al., 2004], [Usureau et al., 2003] et [Guerin et al., 2003b]) des outils permettant de construire la distribution a priori, de vérifier sa compatibilité avec les premiers résultats d'essai (la vraisemblance) et la pondérer, si nécessaire, pour atténuer son effet lorsqu'elle est mauvaise.

Dans la suite du document, nous présentons une synthèse des travaux réalisés par l'équipe.

5.2 Rappel du principe bayésien

Considérons un échantillon de résultats d'essai $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ d'une distribution (loi de mortalité donnée), dont la fonction de vraisemblance $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$ est caractérisée par le paramètre inconnu

θ , de densité de probabilité a priori $g(\theta)$, la densité de probabilité a posteriori $g(\theta|X)$ sera :

$$g(\theta|X) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(x_1, x_2, \dots, x_n|\theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta} \quad (5.1)$$

La figure 5.1 montre un exemple de représentation de ces différentes distributions.

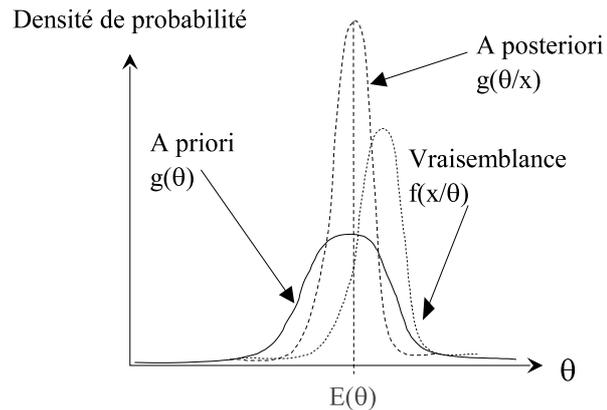


Figure 5.1 – Représentation des distributions a priori, vraisemblance et a posteriori

L'application du théorème de Bayes à l'estimation de la fiabilité d'un système consiste à appliquer l'inférence bayésienne représentée dans la figure 5.2.

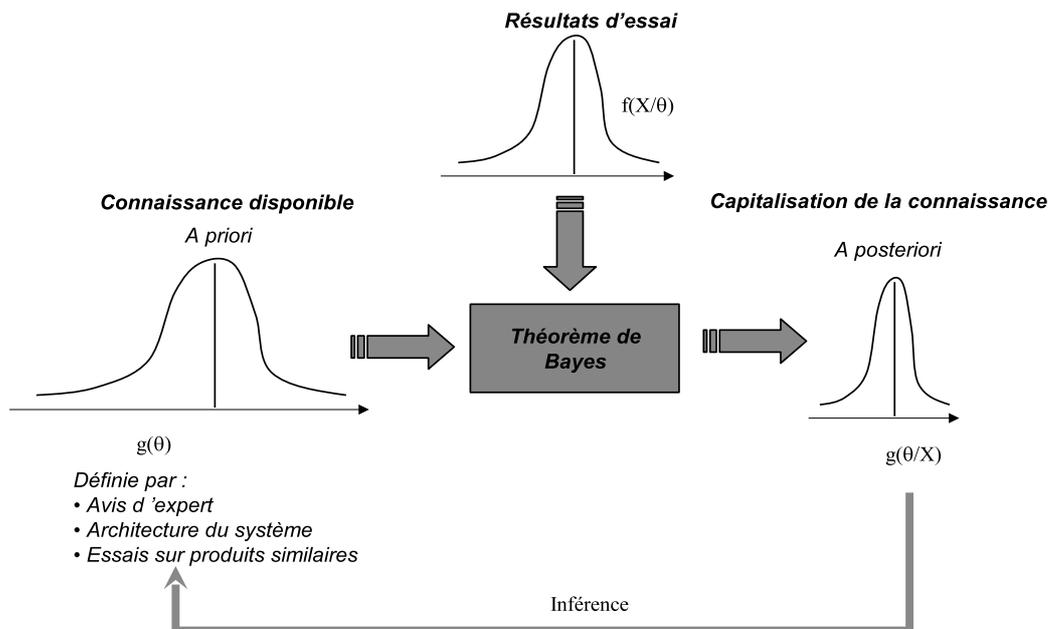


Figure 5.2 – Inférence bayésienne

Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter aux ouvrages suivants : [Procaccia et al., 1992], [Lannoy and Procaccia, 1994], [Sander and Badoux, 1991], [Usureau et al., 2004]. Dans les sections suivantes nous allons montrer l'application de l'inférence bayésienne dans les cas des systèmes à mortalité exponentielle, binômiale et normale (ou lognormale).

5.3 Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité exponentielle

5.3.1 Définition de la vraisemblance

La fiabilité est caractérisée par une distribution exponentielle ; la probabilité d'obtenir k défaillances pendant un temps cumulé de test T est proportionnelle à :

$$f(k|\lambda) = \lambda^k e^{-\lambda T} \quad (5.2)$$

λ : taux de défaillance, paramètre inconnu à estimer

5.3.2 Définition de la connaissance a priori

Deux cas se présentent : soit nous ne disposons d'aucune information sur le niveau de fiabilité du système soit une connaissance est disponible.

Cas où aucune connaissance est disponible

Dans ce cas, toutes les valeurs de taux de défaillance λ ont exactement la même chance d'apparaître caractérisant l'ignorance totale. Cet état de la connaissance est modélisé par une loi uniforme non informative (hypothèse de Laplace) :

$$g(\lambda) = \frac{1}{K} \quad \lambda \in [0, K] \text{ avec } K \rightarrow \infty$$

Remarque : on peut aussi utiliser l'information de Fisher et prendre l'a priori de Jeffreys : $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$

Ainsi, le théorème de Bayes s'écrit :

$$g(\lambda|k) = \frac{e^{-\lambda T} \lambda^k T^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \quad (5.3)$$

Soit une distribution Gamma $G(\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = k + 1 \\ \beta = T \end{cases}$

L'estimateur ponctuel du taux de défaillance λ est la valeur moyenne de la distribution Gamma a posteriori.

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= \hat{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k+1}{T} \\ V(\lambda) &= \frac{\alpha}{\beta^2} = \frac{k+1}{T^2} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Il est également possible de calculer un intervalle de confiance de λ pour un niveau de confiance $(1-\gamma)$ donné par :

$$\begin{aligned} 1 - \gamma &= Prob(\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\max}) \\ 1 - \gamma &= F(\lambda_{\max}) - F(\lambda_{\min}) \end{aligned}$$

où $F(\lambda)$ est la fonction de répartition de la loi gamma a posteriori. Cet intervalle est défini par des valeurs minimum et maximum de l'estimation de λ à un niveau de confiance bilatéral symétrique $(1-\gamma)$, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} &= \int_0^{\lambda_{\min}} G(k+1; T).d\lambda \Rightarrow \text{valeur de } \lambda_{\min} \\ 1 - \frac{\gamma}{2} &= \int_0^{\lambda_{\max}} G(k+1; T).d\lambda \Rightarrow \text{valeur de } \lambda_{\max} \end{aligned} \quad (5.5)$$

NB : Dans le cas où il n'y a aucune défaillance, il est nécessaire d'utiliser un intervalle unilatéral.

Cas où il existe une connaissance disponible

La distribution Gamma $G(\alpha_0; \beta_0)$, conjuguée bayésienne de la distribution exponentielle, est utilisée pour modéliser la connaissance a priori :

$$g(\lambda) = \frac{\beta_0^{\alpha_0} \lambda^{\alpha_0-1} e^{-\beta_0 \lambda}}{\Gamma(\alpha_0)}. \quad (5.6)$$

Ainsi, le théorème de Bayes s'écrit :

$$g(\lambda/k) = \frac{(\beta_0 + T)^{\alpha_0+k}}{\Gamma(\alpha_0 + k)} \cdot \lambda^{\alpha_0+k-1} \cdot e^{-(\beta_0+T)\lambda} \quad (5.7)$$

soit une distribution Gamma de paramètres : $G(\alpha, \beta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \alpha_0 + k \\ \beta = \beta_0 + T \end{cases}$

L'estimateur ponctuel du taux de défaillance λ est la valeur moyenne de la distribution Gamma a posteriori.

$$E(\lambda) = \hat{\lambda} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{k + k_0 + 1}{T + T_0} = \frac{k + \alpha_0}{T + \beta_0} \quad (5.8)$$

Comme dans le cas précédent, il est possible de déterminer un intervalle de confiance sur l'estimation λ .

5.3.3 Exemple d'application

Considérons que l'on cherche à estimer la fiabilité d'une carte électronique. Trois séries de tests ont été réalisées :

- 1^{ère} série de tests ($k_1 = 3$; $T_1 = 10000$ h)
- 2^{ième} série de tests ($k_2 = 0$; $T_2 = 8500$ h) cas avec 0 défaillance
- 3^{ième} série de tests ($k_3 = 5$; $T_3 = 12000$ h)

- Si on considère que l'on a aucune connaissance, la distribution a priori est uniforme sur l'intervalle $[0, \infty]$ et nous obtenons les estimations suivantes :

$$\hat{\lambda} = E(\lambda) = 2.9510^{-4} h^{-1}$$

$$1.3410^{-4} h^{-1} \leq \lambda_{95\%} \leq 5.6110^{-4} h^{-1}$$

avec les paramètres de la loi gamma a posteriori $\alpha = 9$ et $\beta = 30500$.

- Si maintenant nous considérons le cas où nous disposons de la connaissance a priori, fournie par des experts, matérialisée par une loi gamma de paramètres $\alpha_0=20$ et $\beta_0=78000$. Les estimations deviennent :

$$\hat{\lambda} = E(\lambda) = 2.5810^{-4}h^{-1}$$

$$1.7110^{-4}h^{-1} \leq \lambda_{95\%} \leq 3.6210^{-4}h^{-1}$$

avec les paramètres de la loi gamma a posteriori $\alpha=28$ et $\beta=1.09 \cdot 10^5$.

Remarques :

1. Dans les deux cas, la distribution a posteriori est une loi Gamma, conjuguée bayésienne de la distribution exponentielle. Cela permet de simplifier les calculs en se limitant, dans la pratique, à des additions sur les paramètres de la distribution de Gamma.
2. Lorsque l'on dispose de la connaissance a priori traduite en une distribution Gamma de paramètres α_0 et β_0 , cela revient à considérer une campagne d'essai équivalente à (α_0-1) défaillances et de temps cumulé d'essai β_0
3. l'intervalle de crédibilité, à un niveau de confiance donné, est moins large dans le deuxième cas, la fonction de distribution est moins dispersée. La quantité d'informations étant plus importante et plus riche, il est normal que les résultats soient plus précis. Dans la pratique, la forme des distributions pourra fournir une information qualitative sur la richesse des données utilisées.

5.4 Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité binômiale

5.4.1 Définition de la vraisemblance

La probabilité de défaillance est caractérisée par une loi Binômiale [2], [3], [4] :

$$f(k|p) = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \quad (5.9)$$

avec :

- N : nombre d'essais de la série
- k : nombre de non fonctionnements observés identique à la variable x
- p : probabilité de défaillance à la sollicitation (probabilité de non fonctionnement du système), c'est le paramètre que l'on cherche à estimer

5.4.2 Définition de la connaissance a priori

Cas où il n'existe pas de connaissance

Dans ce cas, il faut que toutes les valeurs possibles de la probabilité aient autant de chances d'être vraies, ceci caractérise l'ignorance totale. Cet état de la connaissance se modélise par une loi uniforme non informative (hypothèse de Laplace) :

$$g(p) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq p \leq 1 \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases} \quad (5.10)$$

Remarque : on peut aussi utiliser l'information de Fisher et prendre l'a priori de Jeffreys $g(p) = \frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}$ ou l'a priori d'Haldane $g(p) = \frac{1}{p(1-p)}$

Ainsi, le théorème de BAYES nous permet de déduire la fonction a posteriori correspondant à un échantillon équivalent de N essais dont k défectueux :

$$g(p|k) = \frac{(N+1)!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} \quad (5.11)$$

soit une loi beta de paramètres : $B(a; b) \Rightarrow \begin{cases} a = k + 1 \\ b = N - k + 1 \end{cases}$

L'estimateur ponctuel bayésien de la probabilité de non fonctionnement p est l'espérance mathématique de la loi beta a posteriori :

$$E(p) = \hat{p} = \frac{a}{a+b} = \frac{k+1}{N+2} \quad (5.12)$$

Il est également possible de calculer un intervalle de crédibilité de p à un niveau de confiance $(1-\gamma)$ tel que :

$$1 - \gamma = \text{Prob}(p_{\min} \leq p \leq p_{\max}) = F(p_{\max}) - F(p_{\min})$$

où $F(p)$ est la fonction de répartition de la loi beta a posteriori.

Ceci permet d'encadrer par des valeurs minimum et maximum l'estimation de p au niveau de confiance $(1-\gamma)$ bilatéral symétrique, soit :

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{2} &= \int_0^{p_{\min}} B(k+1; N-k+1).dp \Rightarrow p_{\min} \\ 1 - \frac{\gamma}{2} &= \int_0^{p_{\max}} B(k+1; N-k+1).dp \Rightarrow p_{\max} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Cas où il existe une connaissance disponible

Toute la connaissance disponible doit être modélisée par une distribution de probabilité. On utilise principalement des lois de probabilité paramétrées qui, en fonction de la valeur de leurs paramètres, peuvent prendre un très grand nombre d'allures. La loi beta($a_0; b_0$), conjuguée de la loi binômiale est utilisée :

$$g(p) = \frac{\Gamma(a_0 + b_0)}{\Gamma(a_0)\Gamma(b_0)} \cdot p^{a_0-1} \cdot (1-p)^{b_0-1} \quad (5.14)$$

Nous verrons comment l'établir à partir de plusieurs sources de données dans la partie suivante. Le théorème de BAYES s'écrit :

$$g(p|k) = \frac{(a_0 + b_0 + N - 1)!}{(a_0 + k - 1)!(b_0 + N - k - 1)!} \cdot p^{a_0+k-1} \cdot (1-p)^{b_0+N-k-1} \quad (5.15)$$

soit une loi beta(a, b) $\Rightarrow \begin{cases} a = a_0 + k \\ b = b_0 + N - k \end{cases}$

L'estimateur bayésien de la probabilité de non fonctionnement p est l'espérance mathématique de la loi beta a posteriori :

$$E(p) = \hat{p} = \frac{a}{a+b} = \frac{k+a_0}{a_0+b_0+N} \quad (5.16)$$

De même qu'au paragraphe précédent., il est possible de calculer un intervalle de crédibilité de p à un niveau de confiance $(1-\gamma)$ bilatéral symétrique.

5.4.3 Exemple d'application

Prenons l'exemple fictif où l'on cherche à évaluer la fiabilité d'un AIR-BAG (dans ce cas la probabilité de défaillance à la sollicitation correspond à un non fonctionnement de l'AIR-BAG lors d'une simulation de chocs).

Supposons que l'on dispose des résultats des trois séries d'essais suivantes :

1. Série 1 ($N_1 = 20$; $k_1 = 3$)
2. Série 2 ($N_2 = 10$; $k_2 = 0$) cas du zéro défaillance
3. Série 3 ($N_3 = 50$; $k_3 = 1$)

Si l'on considère la loi a priori uniforme non informative ($U(0,1)$), les résultats sont :

$$\hat{p} = E(p) = 0.060976$$

$$0.024635 \leq p_{95\%} \leq 0.109448$$

avec pour paramètres de la loi beta a posteriori $a=5$ $b=77$

Si maintenant l'on considère une loi beta(1 ; 70), définie à partir d'avis d'experts, comme a priori, les résultats deviennent :

$$\hat{p} = E(p) = 0.033113$$

$$0.013224 \leq p_{95\%} \leq 0.059981$$

avec pour paramètres de la loi beta a posteriori $a=5$ $b=146$

On peut remarquer que :

1. dans les deux cas, la distribution a posteriori est une loi beta, conjuguée de la loi binômiale. Ceci va permettre de simplifier les calculs en se limitant, dans la pratique, à des additions sur les paramètres a et b .
2. l'estimateur bayésien de p est plus faible dans le deuxième cas, la connaissance a priori a été intégrée dans le calcul comme un équivalent à une série d'essais supplémentaire.
3. l'intervalle de crédibilité, à un niveau de confiance donné, est moins large dans le deuxième cas, la fonction de distribution est moins dispersée. La quantité d'informations étant plus importante et plus riche, il est normal que les résultats soient plus précis. Dans la pratique, la forme des distributions pourra fournir une information qualitative sur la richesse des données utilisées.

5.5 Application de l'approche bayésienne à la fiabilité des matériels à mortalité normale ou lognormale

La distribution normale est importante pour décrire les durées de vie de nombreux systèmes et en particulier mécaniques. De nombreux chercheurs ont étudié l'estimation des paramètres de la loi en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance ou les techniques bayésiennes (voir [Congdon, 2001], [Guerin and Dumon, 1998], [Guerin and Dumon, 1999]). Nous nous sommes intéressés à l'application des techniques bayésiennes aux essais.

5.5.1 Définition de la vraisemblance

Les temps de défaillances x de la plupart des systèmes mécaniques sont caractérisés par une distribution normale ou lognormale (lorsque l'on a une variable x qui suit une loi lognormale alors la variable $\log(x)$ suit une loi normale). La fonction de densité de probabilité est définie par :

$$g(x|\mu, \theta) = \frac{\theta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{\theta(x-\mu)^2}{2}\right)} \quad (5.17)$$

pour $(-\infty < x < +\infty)$, $(\theta > 0)$ et $(-\infty < \mu < +\infty)$

où x est la variable étudiée, μ la moyenne et θ l'inverse de la variance ($\theta = 1/\sigma^2$).

Dans le cas d'une distribution à 2 paramètres inconnus, le théorème de Bayes s'écrit :

$$g(\mu, \theta|x) = \frac{f(x|\mu, \theta) \cdot g(\mu, \theta)}{\int_{D(\mu)} \int_{D(\theta)} f(x|\mu, \theta) \cdot g(\mu, \theta) \cdot d\mu d\theta} \quad (5.18)$$

ou

- μ et θ : les paramètres à estimer
- $x = \{x_i\}$: les données observées
- $g(\mu, \theta)$: distribution a priori
- $f(x|\mu, \theta)$: la vraisemblance
- $g(\mu, \theta|x)$: la distribution a posteriori
- $D(\mu)$ et $D(\theta)$: les domaines de variation des paramètres μ et θ .

5.5.2 Définition de la connaissance a priori

cas où il n'existe pas de connaissance

Dans un premier temps, nous considérons aucune information a priori sur les paramètres μ et θ . Aussi, nous considérons 2 distributions uniformes non-informatives (voir 5.3) :

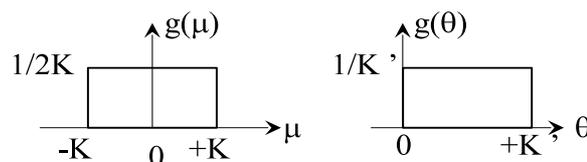


Figure 5.3 – lois uniformes non-informatives avec $K, K' \rightarrow \infty$

La vraisemblance, pour un échantillon de taille n , est donnée par :

$$f(x|\mu, \theta) = \frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (5.19)$$

Alors, le théorème de Bayes s'écrit :

$$g(\mu, \theta|x) = \frac{f(x|\mu, \theta)g(\mu)g(\theta)}{\int_{-K}^{+K} \int_0^{+K'} f(x|\mu, \theta)g(\mu)g(\theta)d\mu d\theta} \quad (5.20)$$

avec $K \text{ et } K' \rightarrow \infty$

Finalement, nous obtenons la relation suivante (voir annexe A.5) :

$$g(\mu, \theta|x) = \frac{\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} \theta^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} e^{-\frac{1}{2}\theta n(\mu - \bar{x})^2}}{2^{\frac{n+1}{2}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (5.21)$$

qui est une combinaison de distributions Gamma et Normal.

$$f(\mu, \theta|x) = \underbrace{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}}_{G(\theta|a,b)} \underbrace{\sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu-c)^2}}_{N(\mu|a,c,\theta)} \quad (5.22)$$

où

$$\begin{cases} a = \frac{n+1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ c = \bar{x} \end{cases}$$

Cas où il existe de la connaissance a priori sur les paramètres inconnus μ et θ

Si on considère une distribution a priori avec la même forme que la relation (5.21), caractérisée par 3 paramètres a , b et c (définis par des experts), et les résultats de test $x = \{x_i\}$ (avec x_i le résultat d'un test, \bar{x} la moyenne des résultats et n la taille de l'échantillon). Alors la distribution a posteriori s'écrit (voir l'annexe A.6 pour la démonstration) :

$$f(\mu, \theta|x) = \frac{\theta^{\left(\frac{n-1}{2}+a\right)} e^{-\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b\right] \theta}}{\sqrt{2\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}+a\right)} \times e^{-\frac{1}{2}\theta(n+2a-1)(\mu-M)^2} \times \theta^{-\frac{1}{2}} \left[n\bar{x}^2 + (2a-1)c^2 - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)^2}{n+2a-1} \right] \times \sqrt{n+2a-1} \left(\frac{n}{2}+a\right) \times \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b + \frac{n(2a-1)(\bar{x}-c)^2}{n+2a-1} \right] \quad (5.23)$$

où $M = \frac{n\bar{x} + (2a-1)c}{n+2a-1}$

qui est une combinaison de distributions Gamma et Normale :

$$f(\mu, \theta|x) = \underbrace{\frac{b'^{a'}}{\Gamma(a')} \theta^{a'-1} e^{-b'\theta}}_{G(\theta/a', b')} \underbrace{\sqrt{\frac{(2a'-1)\theta}{2\pi}} e^{-\frac{(2a'-1)\theta}{2}(\mu-c')^2}}_{N(\mu/a', c', \theta)} \quad (5.24)$$

où

$$\begin{cases} a' = \frac{n}{2} + a \\ b' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b + \frac{n(2a-1)(\bar{x}-c)^2}{2(n+2a-1)} \\ c' = M = \frac{n\bar{x} + (2a-1)c}{n+2a-1} \end{cases}$$

Nous constatons une forme identique au cas sans connaissance.

5.5.3 Détermination des estimateurs bayésiens

Une fois la distribution a posteriori construite, nous pouvons déterminer les estimations des paramètres μ et θ par les distributions marginales associées à μ et θ .

La distribution marginale de θ s'écrit :

$$\begin{aligned} f(\theta|x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu, \theta|x) d\mu \\ f(\theta/x) &= G(a, b) \int_{-\infty}^{+\infty} N\left(c, \frac{1}{\theta(2a-1)}\right) d\mu \\ f(\theta|x) &= \frac{b^a \theta^{a-1} e^{-b\theta}}{\Gamma(a)} = G(a, b) \end{aligned} \quad (5.25)$$

L'estimateur ponctuel $\hat{\theta}$ de θ est défini par le mode de $f(\theta/x)$:

$$\hat{\theta} = \frac{b' - 1}{a'} \quad (5.26)$$

Alors la variance est définie par :

$$\hat{s}^2 = \frac{a'}{b' - 1} \quad (5.27)$$

Nous déduisons l'intervalle de confiance (défini par θ_{min} ; θ_{max}]) en résolvant :

$$\begin{cases} \gamma = \int_0^{\theta_{min}} f(\theta|x) d\theta \\ 1 - \gamma = \int_0^{\theta_{max}} f(\theta|x) d\theta \end{cases} \quad (5.28)$$

avec $(1-\gamma)$ le niveau de confiance désirée.

La distribution marginale de μ s'écrit :

$$f(\mu|x) = \int_0^{+\infty} f(\mu, \theta) d\theta = \frac{b^a \sqrt{2a-1} \Gamma(a + \frac{1}{2})}{\alpha^{a+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \Gamma(a)} \quad (5.29)$$

avec : $\alpha = b + \frac{1}{2}(2a-1)(\mu-c)^2$

Cette distribution marginale est symétrique par rapport à c .

L'estimateur ponctuelle $\hat{\mu}$ de μ est donné par le mode de $f(\mu/x)$

$$\hat{\mu} = c' \quad (5.30)$$

Nous déduisons l'intervalle de confiance (défini par $[\mu_{min}; \mu_{max}]$) en résolvant :

$$\begin{cases} \gamma = \int_0^{\mu_{min}} f(\mu|x) d\mu \\ 1 - \gamma = \int_0^{\mu_{max}} f(\mu|x) d\mu \end{cases} \quad (5.31)$$

avec $(1-\gamma)$ le niveau de confiance désiré.

Dans le cas où aucune connaissance est disponible, les estimateurs $\hat{\mu}$ et \hat{s}^2 sont définis par les relations connues suivantes :

$$\hat{s}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (5.32)$$

$$\hat{\mu} = \bar{x} \quad (5.33)$$

5.5.4 Exemple d'application

L'exemple suivant consiste à déterminer la valeur de durée de vie L_{10} d'un roulement à billes (valeur pour laquelle 10% des roulements sont défectueux) en considérant une distribution des $\log(N)$ normale (avec N le nombre de rotations). Dans cet exemple, nous nous intéressons à la comparaison des méthodes classique et bayésienne.

Méthode classique :

Dans le cas classique, les estimateurs ponctuels et les intervalles de confiance sur la moyenne et l'écart-type sont donnés par :

$$\bar{x} - t_{1-\gamma/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{1-\gamma/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (5.34)$$

où $t_{1-\gamma/2, n-1}$ est déduit de la loi de student t pour le niveau de confiance $(1-\gamma/2)$ et le degré de liberté $n-1$.

L'intervalle de confiance bilatéral symétrique sur l'écart-type est donné par :

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\gamma/2, n-1}^2}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\gamma/2, n-1}^2}} \quad (5.35)$$

où $\chi_{1-\gamma/2, n-1}^2$ est déduit de la loi de χ^2 pour le niveau de confiance $(1-\gamma/2)$ et le degré de liberté $n-1$.

Méthode bayésienne

Avec la méthode bayésienne, il est possible de donner les estimateurs ponctuels de μ et σ et les intervalles de confiance associés pour un niveau de confiance donné ($1-\gamma = 90\%$).

Les estimateurs ponctuels de μ et σ sont respectivement c' (le mode de $f(\mu/x)$) et $a'/(b'-1)$ (le mode de $f(\theta/x)$).

Simulation

Pour nous permettre de comparer les deux approches, nous allons simuler les résultats d'essai en tirant aléatoirement des valeurs de logarithmes de nombre de cycles de rotation à défaillance $\log(N)$ selon une loi normale théorique suivante : $N(\mu, \sigma^2) = N(4.16, 0.2971)$

Nous considérons une distribution a priori définie par les paramètres suivants :

$$a = 17.72$$

$$b = 4.48$$

$$c = 4.1$$

A chaque test, nous déterminons les estimations de μ et σ et les intervalles de confiance associés (au niveau de confiance 90%). Nous pouvons tracer leurs évolutions en fonction de l'indice de tirage (voir les figures 5.4 et 5.5).

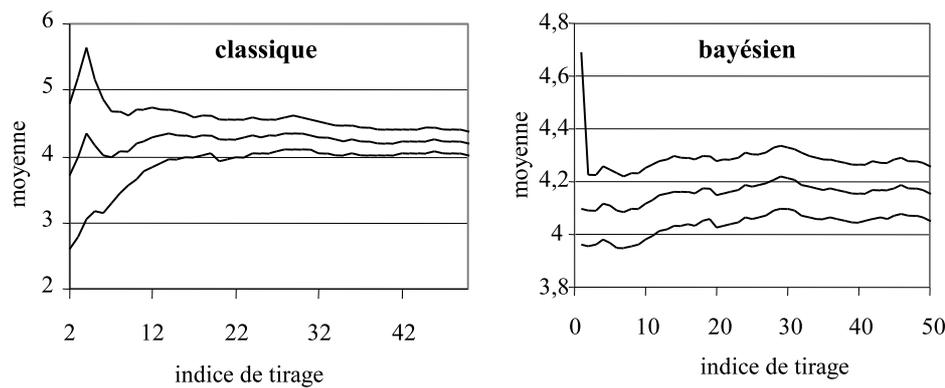


Figure 5.4 – Estimation de la moyenne par les méthodes classique et bayésienne

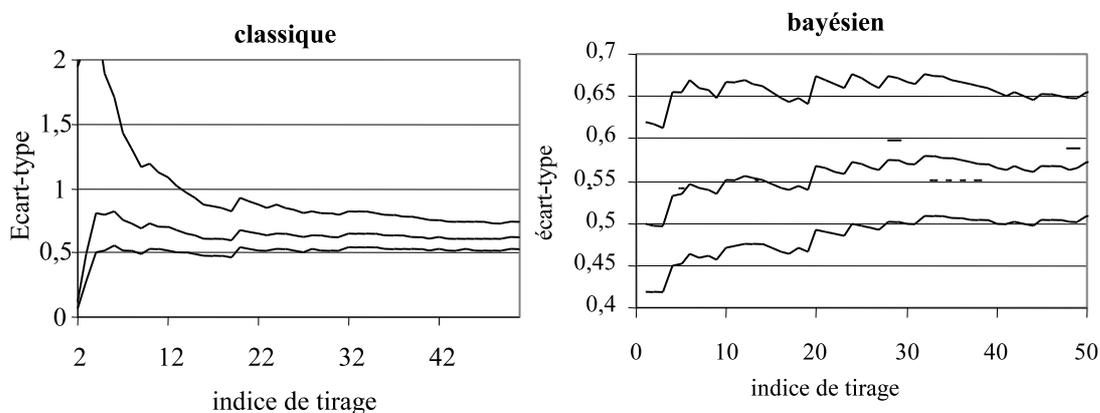


Figure 5.5 – Estimation de l'écart-type par les méthodes classique et bayésienne

Sur cet exemple, nous pouvons voir la convergence plus rapide des estimateurs bayésiens vers les valeurs de simulation. Cela s’explique par la bonne adéquation de l’a priori.

Pour estimer la valeur L_{10} du roulement, nous allons considérer les résultats d’essai à l’issue de la dixième simulation (indice de tirage = 10). Les résultats sont donnés dans le tableau .

	Méthode Bayésienne	Méthode classique
Estimateur ponctuel	$\hat{\mu} = 4.118$ $\hat{\sigma} = 0.550$	$\hat{\mu} = 4.186$ $\hat{\sigma} = 0.726$
Intervalle de confiance	$3.982 \leq \mu_{90\%} \leq 4.254$ $0.470 \leq \sigma_{90\%} \leq 0.667$	$3.667 \leq \mu_{90\%} \leq 4.705$ $0.529 \leq \sigma_{90\%} \leq 1.194$
Paramètres de la distribution a posteriori	a=22.722 b=6.883 c=4.118	

Table 5.1 – Estimations de la moyenne et écart-type à l’issue de la dixième simulation

La valeur de L_{10} est déduite de la fiabilité par :

$$L_{10} = R^{-1}(0.9)$$

La fiabilité est donnée par la relation suivante :

$$R(x'|\mu, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} R(x' / \mu, \theta) f(\mu, \theta/x') d\mu d\theta \tag{5.36}$$

soit

$$R(x|\mu, \theta) = 1 - \int_0^x \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} N(x' / \mu, \sqrt{1/\theta}) G(\theta/a, b) N(\mu/a, c, \theta) dx' d\mu d\theta \tag{5.37}$$

Nous pouvons tracer les fonctions de fiabilité estimées par les différentes méthodes (voir figure 5.6).

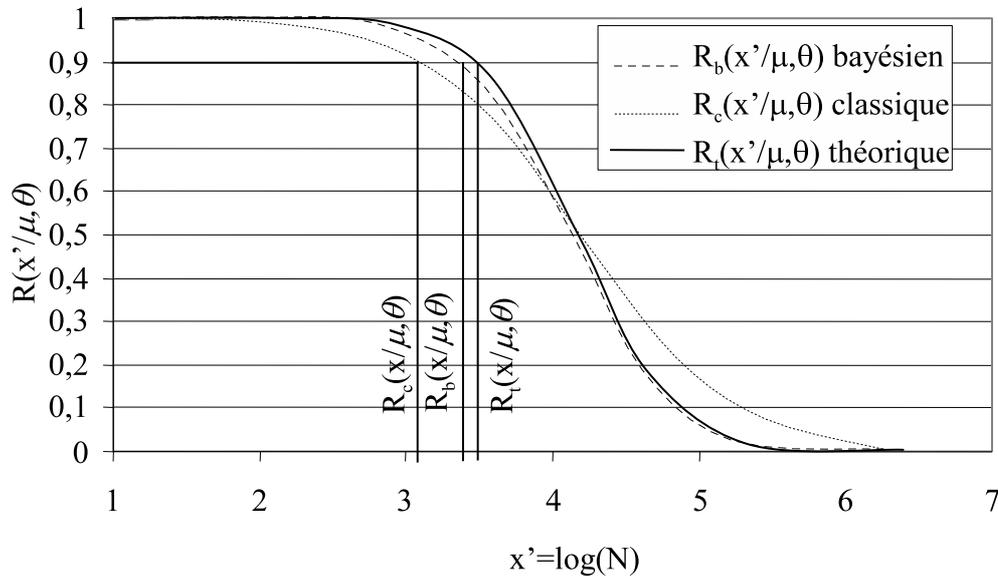


Figure 5.6 – Lois de fiabilité estimées par les différentes méthodes

De ces courbes, nous pouvons déduire les différentes estimations de L_{10} (voir tableau 5.2).

	Niveau de fiabilité	x	L_{10} en nombre de cycles
théorique	$R_t(x \mu, \theta)=0.9$	3.461	$31.862 \cdot 10^6$
classique	$R_c(x \mu, \theta)=0.9$	3.075	$21.650 \cdot 10^6$
bayésienne	$R_b(x \mu, \theta)=0.9$	3.365	$28.963 \cdot 10^6$

Table 5.2 – Estimations de L_{10} par les différentes méthodes

Remarque : nous avons appliqué également cette méthode à l'estimation de la limite d'endurance lors d'un essai en escalier (voir [Guerin and Dumon, 1998] et [Guerin and Dumon, 1999]).

5.6 Modélisation de la connaissance a priori issue d'avis d'experts

Les différents exemples précédents montrent que l'approche bayésienne, lorsque la distribution a priori est bien choisie, permet une estimation correcte d'une caractéristique de fiabilité avec une taille d'échantillon faible. Nous nous sommes intéressés alors à la construction de la distribution a priori à partir d'avis d'experts (abordée partiellement dans [Lannoy and Procaccia, 2001] et [Cooke, 1991]). En effet, il est toujours possible de recueillir un avis sur la fiabilité d'un système auprès d'un ou plusieurs experts. Leur connaissance se traduit par la définition d'intervalles dans lesquels se trouvent les caractéristiques de fiabilité. Nous avons étudié les trois cas suivants :

- le taux de défaillance pour les systèmes à mortalité exponentielle
- la probabilité de défaillance (ou la fiabilité) pour les systèmes à mortalité binômiale

– la moyenne et la variance pour les systèmes à mortalité normale ou lognormale

5.6.1 Cas des systèmes à mortalité exponentielle

On cherche à définir la loi gamma a priori décrivant le taux de défaillance. Les experts ont plus l'habitude de décrire la fiabilité par le MTTF. Aussi, nous considérons les avis d'experts exprimés par des intervalles de MTTF (temps moyen avant la première défaillance d'un système).

Ainsi, chaque expert donne son avis sur un intervalle du MTTF :

$$MTTF \in [MTTF_{min}^i, MTTF_{max}^i]$$

Il s'agit de convertir l'opinion d'expert i en un essai équivalent tronqué de temps cumulé T_{eq}^i et de nombre de défaillances observées x_{eq}^i . De plus, on considère que l'intervalle donné par l'expert est un intervalle bilatéral symétrique au niveau de confiance γ .

D'après A. Pages et M. Gondran ([Pages and Gondran, 1980]) nous pouvons écrire que le MTTF

$$\frac{2T_{eq}^i}{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i + 2)} \leq MTTF \leq \frac{2T_{eq}^i}{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i)} \quad (5.38)$$

Par conséquent, il est possible de déduire les paramètres en résolvant le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} MTTF_{min}^i = \frac{2T_{eq}^i}{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i + 2)} \\ MTTF_{max}^i = \frac{2T_{eq}^i}{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i)} \end{array} \right\} \Rightarrow (x_{eq}^i, T_{eq}^i) \quad (5.39)$$

A partir de ces 2 expressions, il est possible de déduire les valeurs x_{eq}^i, T_{eq}^i de la loi Gamma connaissant le niveau de confiance $(1-\gamma)$, $MTTF_{min}^i$ et $MTTF_{max}^i$. Pour cela nous utilisons une méthode d'optimisation mathématique. Le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

Rechercher les valeurs x_{eq}^i, T_{eq}^i telles que :

$$\text{Minimiser l'erreur quadratique totale } \left(MTTF_{min}^i - \frac{2T_{eq}^i}{\chi_{1-\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i + 2)} \right)^2 + \left(MTTF_{max}^i - \frac{2T_{eq}^i}{\chi_{\frac{\gamma}{2}}^2(2x_{eq}^i)} \right)^2$$

Ensuite, cette opération est répétée pour l'ensemble des avis d'expert. La distribution a priori est définie par :

$$f(\lambda / \{x_{eq}^i, T_{eq}^i\}) = \frac{e^{-\lambda \sum_1^n T_{eq}^i} \lambda^{\sum_1^n x_{eq}^i}}{\int_0^\infty e^{-\lambda \sum_1^n T_{eq}^i} \lambda^{\sum_1^n x_{eq}^i} d\lambda}$$

Ainsi, la loi Gamma a priori aura les paramètres suivants:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_{eq}^1 + \dots + x_{eq}^n + 1 \\ \beta_0 &= T_{eq}^1 + \dots + T_{eq}^n \end{aligned}$$

Exemple :

Nous interrogeons un expert sur le MTTF d'un matériel. Il nous donne un intervalle :

$$MTTF \in [2000, 2370]$$

Cet intervalle est fourni pour un niveau de confiance donné 90%. Nous en déduisons un nombre d'échec équivalent et temps équivalent par la procédure d'optimisation précisée auparavant :

$$\begin{aligned}x_{eq} &= 550 \\T_{eq} &= 2393648,46\end{aligned}$$

Ainsi, la loi Gamma a priori aura les paramètres suivants :

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 551 \\ \beta_0 &= 2393648,46\end{aligned}$$

5.6.2 Cas des systèmes à mortalité binômiale

Dans le cas des systèmes à mortalité binômiale, la connaissance a priori est définie par une distribution beta. Nous nous sommes intéressés à la définition de la distribution beta a priori en interrogeant des experts sur la fiabilité d'un système. Pour ce faire, nous traiterons deux cas de figure selon le nombre d'expert s'exprimant :

- Un seul expert
- Plusieurs experts

Un seul avis d'expert

Nous interrogeons un expert sur la fiabilité d'un système. Il nous donne un intervalle :

$$R \in [R_{\min}, R_{\max}]$$

Cet intervalle, choisi bilatéral symétrique, est fourni pour un niveau de confiance donné $(1-\gamma)$. Aussi, on peut écrire les 2 relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\gamma}{2} &= \frac{\Gamma(a_0+b_0+2)}{\Gamma(a_0+1)\Gamma(b_0+1)} \int_0^{R_{\min}} R^{a_0}(1-R)^{b_0} dR \\ 1 - \frac{\gamma}{2} &= \frac{\Gamma(a_0+b_0+2)}{\Gamma(a_0+1)\Gamma(b_0+1)} \int_0^{R_{\max}} R^{a_0}(1-R)^{b_0} dR\end{aligned}\tag{5.40}$$

A partir de ces 2 expressions, il est possible de déduire les valeurs α et β de la loi beta connaissant γ , R_{\min} et R_{\max} . Pour cela, nous utilisons une méthode d'optimisation mathématique. Le problème d'optimisation à résoudre est le suivant :

Rechercher les valeurs a_0 et b_0 telles que :

$$\text{Minimiser l'erreur quadratique totale : } \left(\frac{\gamma}{2} - \int_0^{R_{\min}} B(a_0, b_0) dR \right)^2 + \left(1 - \frac{\gamma}{2} - \int_0^{R_{\max}} B(a_0, b_0) dR \right)^2$$

Exemple :

Un expert donne un intervalle sur la fiabilité d'un matériel soit pour une période d'utilisation donnée, soit pour un nombre de sollicitations données (systèmes monocoups).

$$\text{Expert 1 : } R \in [0.95, 0.99]$$

Nous considérons un niveau de confiance $(1-\gamma)$ de 90%.

Nous obtenons les paramètres a_0 et b_0 de la loi beta par la procédure d'optimisation précisée au dessus :

$$\begin{aligned} a_0 &= 162.78 \\ b_0 &= 4.48 \end{aligned}$$

Plusieurs avis d'experts

Nous interrogeons n experts sur la fiabilité d'un matériel. Ils nous donnent des intervalles de la valeur :

$R \in [R_{\min}^i, R_{\max}^i]$ donné par le i ème expert qui peut donner aussi une valeur déterministe

Nous pouvons, en considérant des lois uniformes, déduire la fonction générale de densité de probabilité de R .

$$g(R) = \frac{1}{n} (f_1(R) + f_2(R) + \dots + f_n(R)) \quad (5.41)$$

La moyenne et la variance sont définies par :

$$E(R) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(R_{i \max} + R_{i \min})}{2} \quad (5.42)$$

et

$$\sigma(R)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(R_{i \max} - R_{i \min})^2}{12} + \frac{(R_{i \max} + R_{i \min})^2}{4} \right] - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(R_{i \max} + R_{i \min})}{2} \right)^2 \quad (5.43)$$

Il est ensuite possible de déduire les paramètres de la loi beta, caractérisant la probabilité d'occurrence p , par les relations suivantes :

$$a_0 = \frac{E^2[R]}{\sigma^2[R]} \cdot (1 - E[R]) - E[R] \quad (5.44)$$

$$b_0 = \frac{E[R]}{\sigma^2[R]} \cdot (1 - E[R])^2 + E[R] - 1$$

Exemple : Deux experts donnent des intervalles sur la fiabilité d'un matériel.

Expert 1 : $R \in [0.95, 0.99]$

Expert 2 : $R \in [0.9, 0.99]$

La moyenne et l'écart-type sont égaux à :

$$\begin{aligned} E(R) &= 0.9575 \\ \sigma(R) &= 0.02367 \end{aligned}$$

D'où les paramètres a_0 et b_0 de la loi beta :

$$\begin{aligned} a_0 &= 68.56 \\ b_0 &= 3.04 \end{aligned}$$

5.6.3 Cas des systèmes à mortalité normale ou lognormale

Nous demandons à un expert d'estimer la moyenne (μ) par la valeur la plus probable et l'écart-type s :

$$[\mu] \text{ et } \left[\theta_{\min} = \frac{1}{s_{\max}^2}, \theta_{\max} = \frac{1}{s_{\min}^2} \right]$$

Nous avons montré précédemment que la distribution a priori $f(\mu, \theta/x)$ est une combinaison de distributions Gamma et Normale :

$$f(\mu, \theta|x) = G(a, b) N\left(c, \frac{1}{\theta(2a-1)}\right) \quad (5.45)$$

Pour construire cette distribution, il est nécessaire d'estimer les paramètres a , b et c .

Evaluation de a et b

La distribution marginale de θ est donnée par :

$$f(\theta|x) = \frac{b^a \theta^{a-1} e^{-b\theta}}{\Gamma(a)} = G(a, b) \quad (5.46)$$

L'intervalle $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ définit une loi uniforme de moyenne et de variance données par :

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{\theta_{\min} + \theta_{\max}}{2} \\ V(\theta) &= \frac{(\theta_{\max} - \theta_{\min})^2}{12} \end{aligned} \quad (5.47)$$

D'autre part, nous connaissons les expressions de la moyenne et de la variance pour une distribution Gamma $G(a, b)$:

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \frac{a}{b} \\ V(\theta) &= \frac{a}{b^2} \end{aligned} \quad (5.48)$$

et $V(\theta) = \frac{a}{b^2}$

Par correspondance des moyennes et variances, nous déduisons les paramètres a et b :

$$a = \frac{3(\theta_{\min} + \theta_{\max})^2}{(\theta_{\max} - \theta_{\min})^2} \quad (5.49)$$

$$b = \frac{6(\theta_{\min} + \theta_{\max})}{(\theta_{\max} - \theta_{\min})^2} \quad (5.50)$$

Evaluation de c

La distribution marginale de μ s'écrit :

$$f(\mu|x) = \frac{b^a \sqrt{2a-1} \Gamma(a + \frac{1}{2})}{\alpha^{a+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Gamma(a)} \quad (5.51)$$

avec : $\alpha = b + \frac{1}{2}(2a-1)(\mu - c)^2$

Cette distribution marginale est symétrique par rapport à la valeur c (a et b étant déjà définis). Alors, le paramètre c prend pour valeur μ donnée par l'expert.

Exemple : Un expert donne un intervalle sur l'écart-type et la valeur la plus probable de la moyenne :

$$\begin{aligned}\mu &= 4.1 \\ \theta &\in [2.32; 5.58]\end{aligned}$$

La moyenne et la variance sont égales à :

$$\begin{aligned}E(\theta) &= 3.95 \\ V(\theta) &= 0.88\end{aligned}$$

De ces valeurs, nous pouvons déduire les paramètres a , b et c :

$$\begin{aligned}a &= 17.72 \\ b &= 4.48 \\ c &= 4.1\end{aligned}$$

5.7 Modélisation de la connaissance a priori issue de l'expertise à partir de l'étude sûreté de fonctionnement

Lors de la conception d'un nouveau système, de nombreuses études de Sûreté de fonctionnement sont effectuées (Analyse fonctionnelle, AMDEC, Arbre de défaillances, Diagramme de fiabilité, ...). Ces analyses sont conduites par des groupes de travail réunissant l'ensemble des experts. Toute l'information nécessaire pour la modélisation de l'a priori se trouve incluse dans ces études et notamment dans la fonction structure (Arbre de défaillances et Diagramme de fiabilité). Dans les paragraphes suivants, nous présentons la méthodologie élaborée dans le cadre de la thèse d'Emmanuel USUREAU pour les systèmes à mortalité binômiale ([Usureau et al., 2004], [Guerin et al., 2003b]).

5.7.1 Modèles d'architecture de système

La fonction structure est couramment utilisée pour modéliser la fiabilité. Celle-ci est construite à l'aide des diagrammes de fiabilité ou des arbres de défaillance.

5.7.1.1 Diagramme de fiabilité

La méthode des Diagrammes de Fiabilité permet de modéliser simplement la logique de fonctionnement d'un système ([Pages and Gondran, 1980], [Biolini, 1997], [Cocozza-Thivent, 1997] et [Villemeur, 1988]). C'est notamment une représentation proche du schéma fonctionnel (figure 5.7).

Dans cette représentation, les blocs représentent des matériels, des événements ou des fonctions pouvant défaillir. Les principaux cas de modélisation sont les suivants :

- lorsque la défaillance de l'une des entités du système entraîne la défaillance du système, les blocs sont placés en série,
- lorsque la défaillance d'une entité du système ne peut entraîner à elle seule la défaillance du système, mais seulement en combinaison avec d'autres blocs, les blocs sont placés en parallèle, ce type de système est aussi appelé " redondance active ".

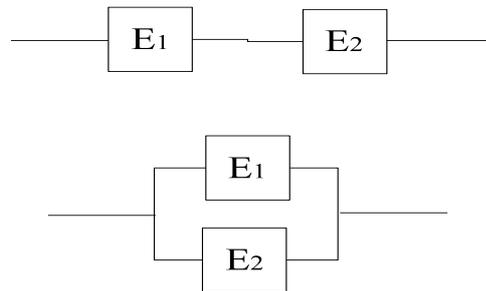


Figure 5.7 – Diagrammes de fiabilité

5.7.1.2 Arbre de défaillances

La méthode permet principalement :

- de déterminer les diverses combinaisons possibles d'événements qui entraînent la réalisation d'un événement redouté (*ER*)
- de représenter graphiquement ces combinaisons au moyen d'une structure arborescente
- de déterminer les coupes (combinaisons simples d'événements entraînant l'apparition de l'événement redouté)
- de calculer le risque (notamment la probabilité) que l'événement redouté se produise.

On trouvera les principes de construction d'un tel arbre, ainsi que les combinaisons logiques utilisables dans [Pages and Gondran, 1980], [Biorolini, 1997], [Cocozza-Thivent, 1997]. En résumé, l'analyse est réalisée de manière déductive en partant de l'événement indésirable et en déduisant la combinaison des causes conduisant à son apparition (voir figure 5.8).

Ces causes deviennent ensuite des événements dont il faut rechercher la combinaison de causes conduisant à leur apparition.

On procède ainsi jusqu'au moment où les événements obtenus sont considérés élémentaires. Ce type d'événement est appelé " Événement de base ".

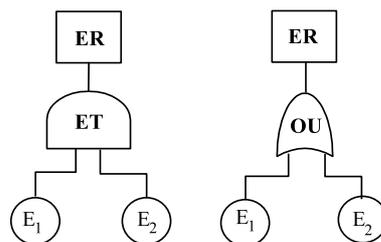


Figure 5.8 – Arbre de défaillances : portes ET et OU

L'analyse qualitative de l'arbre de défaillance consiste à rechercher les chemins les plus courts (appelés coupes minimales) entre les événements élémentaires et l'événement redouté.

L'analyse quantitative permet de déterminer la probabilité d'occurrence de l'événement redouté à partir des coupes minimales et des probabilités d'occurrence des événements élémentaires. La probabilité de défaillance p d'un système est simplement la probabilité que tous les événements de base d'une ou plusieurs coupes minimales apparaissent :

$$p = \text{prob}(\text{défaillance du système}) \leq \text{prob}\left(\bigcup_i C_i\right) \quad (5.52)$$

où les C_i sont les coupes minimales pour le système.

5.7.1.3 Fonction structure

Pour cette analyse, les systèmes étudiés sont supposés cohérents ce qui veut dire :

L'état du système dépend des états de ses composants (Le système est opérationnel si tous ses composants le sont).

Si le système est défaillant, une nouvelle défaillance d'un composant ne doit pas entraîner l'opérationnalité du système (monotonie).

L'état cohérent du système peut être décrit par une fonction structure qui est une fonction booléenne :

$$\psi = \psi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{pour système opérationnelle} \\ 0 & \text{pour système défaillant} \end{cases}$$

La fiabilité du système est définie par :

$$P[\psi = 1] = E(\psi(r_1, \dots, r_n)) \quad (5.53)$$

avec r_i la fiabilité du composant i .

5.7.2 Modélisation de la connaissance a priori

Les composants du système sont supposés indépendants et définis par leur fiabilité (ou par leur probabilité de défaillance). Ces fiabilités peuvent être décrites par des distributions statistiques (par exemple une distribution uniforme lorsque l'on dispose d'un intervalle fourni par un expert).

De ces informations, il est possible de construire la distribution a priori par 3 méthodes :

- Algèbre des variables aléatoires .
- Monte-Carlo
- FORM

Ces méthodes consistent à évaluer les deux premiers moments de la probabilité de défaillance (la moyenne $E(\psi)$ et la variance $V(\psi)$) et de déduire les paramètres de la distribution a priori par la méthode des moments :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{E[\psi]^2}{\sigma[\psi]^2} \cdot (1 - E[\psi]) - E[\psi] \\ b_0 &= \frac{E[\psi]}{\sigma[\psi]^2} \cdot (1 - E[\psi])^2 + E[\psi] - 1 \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.7.2.1 Algèbre des variables aléatoires

Les deux premiers moments de la fiabilité ou de la probabilité de défaillance du système (définie par la fonction structure) sont évalués en considérant ceux des composants (variable de base x_i qui peut être décrite par diverse distribution) (voir [Ayyub and Mccuen, 1997], [Dodson and Nolan, 1999]). La moyenne et la variance sont évaluées par :

$$E[\psi] = \psi(\mu) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left(\frac{\delta^2 \psi}{\delta x_i \delta x_j} \right)_{\mu} COV(x_i, x_j) \quad (5.55)$$

$$\sigma^2[\psi] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\delta \psi}{\delta x_i} \right)_{\mu} \left(\frac{\delta \psi}{\delta x_j} \right)_{\mu} COV(x_i, x_j) + \dots \quad (5.56)$$

avec $(\mu) = (\mu_{x_1}, \dots, \mu_{x_m})$, μ_{x_i} la moyenne de la variable x_i (voir annexe A.7),

5.7.2.2 Monte-Carlo

La simulation de Monte-Carlo consiste à générer aléatoirement des variables x_i selon leur distribution de description et de déduire la fiabilité ou la probabilité de défaillance du système par la fonction structure (Ψ^i) (voir [Ayyub and Mccuen, 1997], [Villemeur, 1988]). Après n simulations, les deux premiers moments sont estimés par :

$$\begin{aligned} E[\psi] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi^i \\ \sigma^2[\psi] &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\psi^i - E[\psi])^2 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Les résultats sont d'autant plus précis que le nombre de simulation n est important (voir [Ayyub and Mccuen, 1997]).

5.7.2.3 Méthode FORM

La méthode FORM (First Order Reliability Method) transforme l'ensemble des variables initiales x_i en un ensemble multi-normal et utilise une approximation linéaire pour éviter des intégrations numériques complexes (voir [Ayyub and Mccuen, 1997], [Madsen et al., 1986], [Castillo et al., 1999]).

Supposons que nous ayons une variable aléatoire Ψ définie par la fonction structure $\Psi = \Psi(x_1, \dots, x_n)$. Les variables aléatoires de description $X = (x_1, \dots, x_n)$ représentent les fiabilités (ou la probabilité de défaillances) des composants. Supposons également que nous connaissions les fonctions de densité de probabilité $f_x(x)$, de X , et que nous sommes intéressés par les valeurs de percentiles extrêmes de Ψ ou aux queues de la fonction de répartition $F_{\Psi}(z)$.

$F_{\Psi}(z)$ est évalué par la méthode FORM en transformant l'ensemble X en celui U (par la transformation de Rosenblatt par exemple) tel que U devienne une variable aléatoire multi-normale (centrée et réduite) $N(0, I)$ et $\Psi = \Psi_X(X) = \Psi_U(U)$, alors $\Psi_U(U)$ est remplacé par une approximation linéaire $h(u)$. $F_{\Psi}(z)$ est transformée en :

$$F_{\Psi}(z) = \text{prob}(\Psi \leq z) = \text{prob}(\Psi_X(X) \leq z) = \text{prob}(\Psi_U(U) \leq z) \approx \text{prob}(h(U) \leq z) \quad (5.58)$$

où

$$h(U) = \sum_{i=1}^n a_i U_i \quad (5.59)$$

est une variable aléatoire normale puisqu'elle est issue d'une combinaison de variables aléatoires normales. Plus précisément, $h(U)$ est définie par :

$$N \left(\sum_{i=1}^n a_i \mu_i A A^T \right) \quad (5.60)$$

où $A=(a_1, \dots, a_n)$ et l'approximation finale est :

$$\hat{F}_\Psi(z) = Prob(h(U) \leq z) = \phi \left(\frac{z - \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}} \right) = \phi(\beta) \quad (5.61)$$

où

$$\beta = \frac{z - \sum_{i=1}^n a_i \mu_i}{\sqrt{\sum_i a_i^2}} \quad (5.62)$$

est la distance minimale de z à la moyenne, mesurée en écart-type, et F est la fonction de répartition de la loi normale standard.

Alors, $F_\Psi(z)$ est approximée par la fonction de répartition de la variable $h(U)$ et le problème est facilement résolvable. Pour déterminer $h(U)$, la limite $\Psi_U(U) = z$ est remplacée par un hyperplan $h(U)=z$ tangent au point U^* avec la vraisemblance maximale. Puisque que U est décrite par une distribution normale standard, les contours deviennent des hypersphères centrées à l'origine. Le point U^* est facilement obtenu puisqu'il doit satisfaire :

$$u_i^* = a_i(u)\beta \quad (5.63)$$

où β est la distance minimale de l'origine à la surface $\Psi_U(U)=z$ et

$$\alpha_i(U) = \left(\frac{\partial \Psi_U(U) / \partial u_i}{|\nabla \Psi_U(U)|} \right) \quad (5.64)$$

est le vecteur unitaire du gradient.

Par changement de variable z , La fonction de répartition de la fiabilité du système (ou la probabilité de défaillance) est construite progressivement (figure 5.9). Une distribution beta (hypothèse considérée) est ajustée sur les points obtenus par FORM.

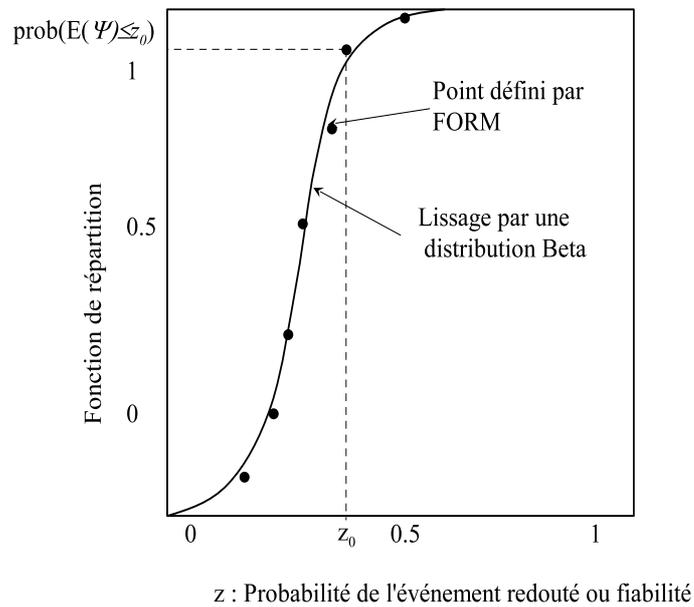


Figure 5.9 – Définition de la loi beta a priori par la méthode FORM

5.7.3 Exemple : Événement indésirable défini par un arbre de défaillances

L'événement indésirable est défini par l'arbre de défaillances suivant :

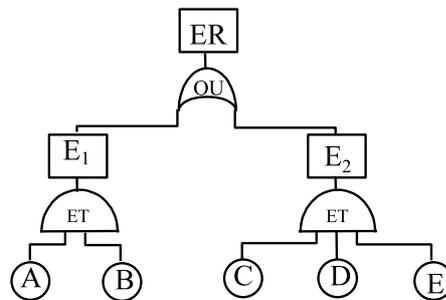


Figure 5.10 – Arbre de défaillances du système étudié

Supposons que les événements élémentaires A, B, C, D et E sont indépendants et caractérisés par des probabilités d'occurrence définies par une grille AMDEC (voir la table 5.3) :

- A : catégorie 3
- B : catégorie 2
- C : catégorie 3
- D : catégorie 3
- E : catégorie 3

Categorie	intervalle de Probabilité d'Occurrence
4	$10^{-3} \leq PO \leq 1$
3	$10^{-6} \leq PO < 10^{-3}$
2	$10^{-9} \leq PO < 10^{-6}$
1	$PO \leq 10^{-9}$

Table 5.3 – Grille de cotation AMDEC

Des lois uniformes sont tirées de ces intervalles (voir annexe A).

La fonction structure est :

$$\psi = p = (x_A \cdot x_B) + (x_C \cdot x_D \cdot x_E) - (x_A \cdot x_B \cdot x_C \cdot x_D \cdot x_E)$$

Les deux premiers moments de la probabilité d'occurrence de l'événement indésirable sont déterminés par l'algèbre des variables aléatoires et par simulation de Monte-Carlo (Tableau 5.4).

	Algèbre des variables aléatoires	Monte-Carlo (1000 tirages)
les deux premiers moments	$E[p] = 1.92 \cdot 10^{-4}$ $\sigma^2[p] = 1.1 \cdot 10^{-8}$	$E[p] = 1.9515 \cdot 10^{-4}$ $\sigma^2[p] = 1.2 \cdot 10^{-8}$
Paramètres a_0 et b_0 de la distribution Beta a priori	$a_0 = 3.24$ $b_0 = 1.69 \cdot 10^4$	par la relation (5.54) $a_0 = 3.18$ $b_0 = 1.63 \cdot 10^4$

Table 5.4 – Résultats par les méthodes de l'algèbre des variables aléatoires et de Monte Carlo

Le Tableau 5.5 présente les différentes valeurs $prob(p \leq z)$ obtenues par la méthode FORM et l'approximation par une distribution beta.

z	β	Probabilité par FORM $Prob(p \leq z)$	Probabilité par la distribution beta $Prob(p \leq z)$ avec $a_0 = 2,54$ $b_0 = 1,17 \cdot 10^4$
5,00E-05	-1,6195	0,05266986	0,04901702
1,00E-04	-0,802	0,21127641	0,19208787
1,50E-04	-0,31945	0,37469272	0,36876932
0,000192	0,000218	0,50008697	0,50996173
2,00E-04	0,0625	0,52491774	0,53479207
2,50E-04	0,387	0,65062185	0,67128201
3,00E-04	0,7	0,75803642	0,77493163
3,50E-04	1,239	0,89232719	0,8496096
0,0004	1,3739	0,91526358	0,9014373

Table 5.5 – probabilités $prob(p \leq z)$ résultant de la méthode FORM et de la distribution beta a priori

La figure 5.11 représente graphiquement les résultats du tableau précédent 5.5.

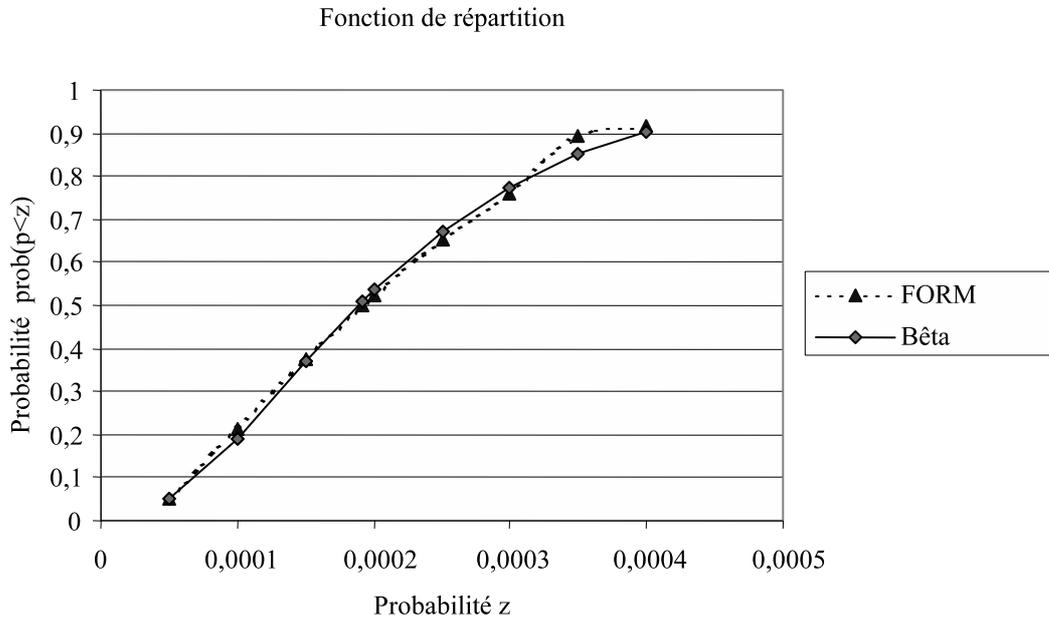


Figure 5.11 – Construction de la fonction de répartition de la loi beta a priori par la méthode FORM

Finalement, la distribution beta a priori est obtenue en l'ajustant aux points obtenus par la méthode FORM. Les paramètres de la distribution sont :

$$a_0 = 2,543$$

$$b_0 = 1,1710^4$$

Des intervalles de confiance de p peuvent être estimés à partir des distributions a priori obtenues par les trois méthodes sans qu'il ait eu d'essai (tableau 5.6).

Méthode utilisée	Intervalle de confiance au niveau de confiance $(1-\gamma) = 90\%$
Algèbre des variables aléatoires	$5.61 \cdot 10^{-5} \leq \hat{p} \leq 3.93 \cdot 10^{-4}$
Monte-Carlo :	
par la méthode des moments	$5.62 \cdot 10^{-5} \leq \hat{p} \leq 4.02 \cdot 10^{-4}$
par le maximum de vraisemblance	$5.14 \cdot 10^{-5} \leq \hat{p} \leq 3.98 \cdot 10^{-4}$
FORM	$5.07 \cdot 10^{-5} \leq \hat{p} \leq 4.77 \cdot 10^{-4}$

Table 5.6 – Intervalles de confiance par les différentes méthodes sur p

Nous pouvons noter que les résultats par l'algèbre des variables aléatoires et Monte Carlo sont similaires. Par contre, les différences de résultats par la méthodes FORM s'expliquent par la transformation de rosenblatt permettant de passer de l'espace des variables physiques à celui normales centrées réduites. C'est particulièrement vrai lorsque l'on transforme une variable décrite par une loi uniforme. Le lecteur peut trouver une autre application dans l'article intitulé "Reliability estimation by Bayesian method :

definition of prior distribution using dependability study" de l'annexe B.1 où le problème de fiabilité est défini par une diagramme de fiabilité.

5.8 Vérification de la compatibilité de l'a priori avec la vraisemblance et pondération

5.8.1 Problématique

Une fois la modélisation a priori réalisée, il reste un point à optimiser. En effet, comment savoir et vérifier que la loi a priori déterminée est la plus pertinente et, notamment, qu'elle n'influence pas la vraisemblance de manière à dégrader le résultat. Cette partie constitue un élément peu étudié à ce jour. Les connaissances sur le sujet sont faibles ([Lannoy and Procaccia, 1994], [Peruggia, 1997], [Ringler, 1979]), peu robustes, et il n'existe pas de démarche standard connue.

Aussi, dans le cadre de la thèse d'Emmanuel Usureau, nous avons proposé une méthode de vérification des lois a priori modélisées en étudiant compatibilité avec la vraisemblance ([Usureau et al., 2004], [Guerin et al., 2003a], [Guerin et al., 2004a]). Nous avons défini un indicateur évaluant la pertinence de la loi a priori et une méthode permettant une meilleure utilisation de celle-ci par rapport à la distribution de vraisemblance.

5.8.2 Objectifs d'un facteur de pondération normalisé K

Rappelons que l'un des intérêts des méthodes bayésiennes est de permettre de limiter les plans de validation de Sécurité et/ou de Fiabilité d'un nouveau produit en intégrant la connaissance disponible à l'estimation de ces deux caractéristiques. Cette intégration est symbolisée par la distribution a priori. En conséquence, et par comparaison à un plan d'essais classique, souvent inexploitable dans le cas de la démonstration de la fiabilité élevée (nombre et temps d'essais à réaliser trop grand), deux cas peuvent se présenter si cette distribution a priori est mal évaluée :

- la modélisation est trop optimiste (figure 5.12), ceci conduira à valider a priori une Sécurité/Fiabilité du produit sans que le niveau d'exigence soit réellement obtenu ; il serait même possible dans ce cas que l'analyste pense avoir démontré la performance recherchée sans devoir, a priori, réaliser un seul essai, alors qu'en réalité la performance réelle est bien moindre.
- la modélisation est trop pessimiste (figure 5.13), ceci conduira à définir un plan d'essais de validation de la Sécurité/Fiabilité du produit beaucoup plus important que dans le cas classique ; l'intérêt de l'utilisation des méthodes bayésiennes devient ici caduque et les résultats sont même plus contraignants que dans le cas fréquentiel puisqu'il faudra réaliser plus d'essais pour démontrer la fiabilité du produit.

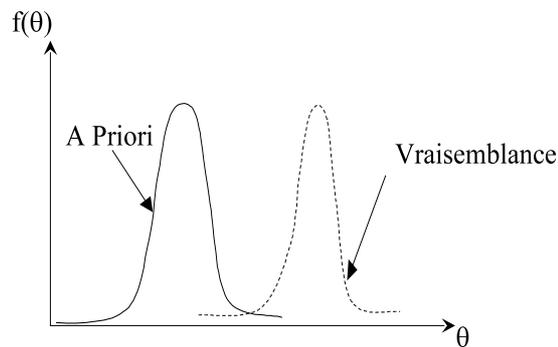


Figure 5.12 – Exemple de distribution a priori trop optimiste par comparaison à la distribution de vraisemblance

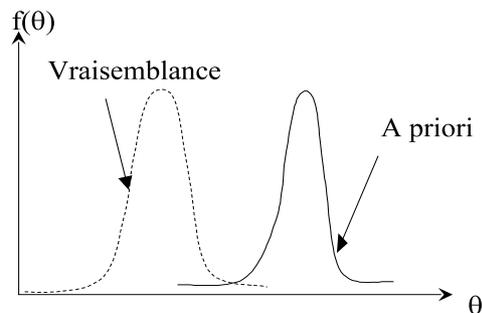


Figure 5.13 – Exemple de distribution a priori trop pessimiste par comparaison à la distribution de vraisemblance

Il est donc indispensable de pouvoir vérifier que la modélisation a priori est compatible avec les données observées. Dans le cas contraire, l'analyste pourrait être amené à prendre des décisions lourdes de conséquences :

- sur le plan de la maîtrise de la Sécurité/Fiabilité dans le cas optimiste,
- sur le plan économique au niveau du coût du développement du nouveau produit dans le cas pessimiste.

De plus, une fois que cette modélisation a été vérifiée et qu'il est prouvé que celle-ci n'est pas compatible, trois solutions peuvent être envisagées :

- revenir à l'utilisation des méthodes classiques, ce qui signifie perdre l'intérêt des méthodes bayésiennes, soit se priver d'une partie de l'information et se pénaliser sur le plan économique,
- recommencer la modélisation de la connaissance a priori, ce qui peut se révéler long et coûteux en terme d'analyse de données ou d'interrogation des experts,
- pondérer la connaissance a priori pour la rendre compatible avec les résultats réellement obtenus (vraisemblance) et donc ne retenir qu'une partie des informations a priori. En effet, même mal modélisée, la connaissance a priori est en partie basée sur des données correctes qui peuvent être exploitées dans le cadre de l'inférence bayésienne.

Les paragraphes suivants apportent une solution à ce problème crucial. Une méthodologie y sera présentée permettant de déterminer un facteur K de pondération normalisé compris entre 0 et 1 qui

permet :

- de déterminer le degré de compatibilité de la modélisation de la connaissance a priori avec les données réelles
- de pondérer la distribution a priori afin de la rendre compatible avec les données observées et pour ne pas biaiser les résultats de l’analyse

Y seront également définies les conditions d’utilisation de cette nouvelle démarche que nous illustrerons par des exemples d’application.

5.8.3 Principe de calcul d’un facteur de pondération normalisé K

Un tel facteur de pondération doit pouvoir être utilisé dans le cas général, exploitable et efficace dans tous les cas extrêmes possibles.

Ce facteur doit mesurer la similitude entre la distribution a priori initiale modélisée à partir des avis d’experts, des données et/ou simulations sur produits similaires et la fonction de vraisemblance représentant, elle, les données réelles observées.

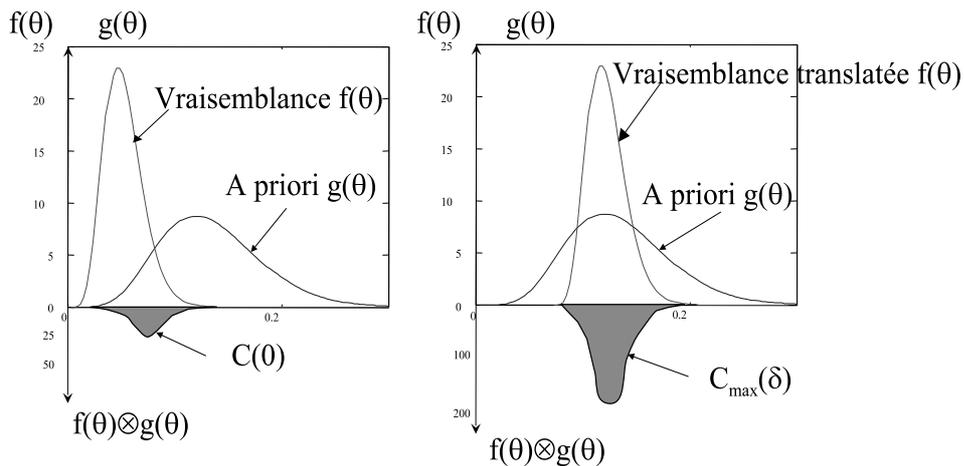


Figure 5.14 – Principe de détermination du coefficient de pondération normalisé

Cette similitude est proportionnelle au produit de convolution (voir Figure 5.14) entre l’a priori $g_0(\theta)$ et la vraisemblance $f(\theta)$. Il est ainsi possible de définir le réel $C(\delta)$ par le produit de convolution $g_0(\theta) \otimes f(\theta)$, soit

$$C(\delta) = \int_{D(\theta)} g_0(\theta) f(\theta - \delta) d\theta \tag{5.65}$$

On peut bien sûr procéder d’une autre manière en écrivant $C(\delta) = \int_{D(\theta)} g_0(\theta - \delta) f(\theta) d\theta$, cela ne change en rien le calcul.

La valeur de $C(\delta)$ évolue bien avec la similitude entre la distribution a priori $g_0(\theta)$ et la distribution de vraisemblance $f(p)$ puisque plus les deux fonctions se recoupent et plus $C(\delta)$ est élevée. Dans le cas contraire, plus les deux fonctions ne sont pas similaires et plus $C(\delta)$ est faible.

Il reste maintenant à trouver une solution pour réaliser la pondération de la distribution a priori. Pour ce faire, il suffit de définir une valeur cohérente avec $C(\delta)$ qui évolue entre 0 et 1 uniquement. L'expression normalisée de $C(\delta)$ suffit à répondre à ce problème, notons la K :

$$K = \frac{C(0)}{C_{\max}(\delta)} \quad (5.66)$$

avec

- $C(0)$ obtenue pour $\delta = 0$
- $C_{\max}(\delta)$ représentant la valeur maximum de $C(\delta)$, c'est-à-dire pour simplifier le maximum de l'aire qui se trouve sous la courbe produit des deux fonctions $g_0(\theta)$ et $f(\theta)$ quand on fait glisser les deux courbes l'une sur l'autre (voir figure 5.14).

Finalement, K n'est autre qu'un facteur de compatibilité normalisé entre la distribution a priori et la distribution de vraisemblance.

5.8.4 Calcul pratique du facteur K

Le principe de calcul du facteur de pondération K est maintenant défini dans le cas général et sur le domaine de définition $D(\theta)$. L'expression de $C(\delta)$ est complexe nécessitant de la calculer numériquement. La valeur de K est donc obtenue selon le processus suivant

- Calculer numériquement $C(\delta)$,
- Déterminer les valeurs spécifiques de $C(\delta)$, à savoir $C_{\max}(\delta)$ et $C(0)$,
- Calculer le facteur de pondération $K = \frac{C(0)}{C_{\max}(\delta)}$.

Les figures suivantes montrent quelques exemples de calcul du facteur de pondération K dans les cas de systèmes à mortalité exponentielle (à gauche) et binômiale (à droite) dans différentes positions relatives des distributions a priori et de vraisemblance.

La figure 5.15 présente le cas où les distributions de l'a priori et de la vraisemblance sont différentes et décalées (moyennes éloignées et écart-types différents). Cela se traduit par une valeur de K proche de 0 indiquant l'incompatibilité.

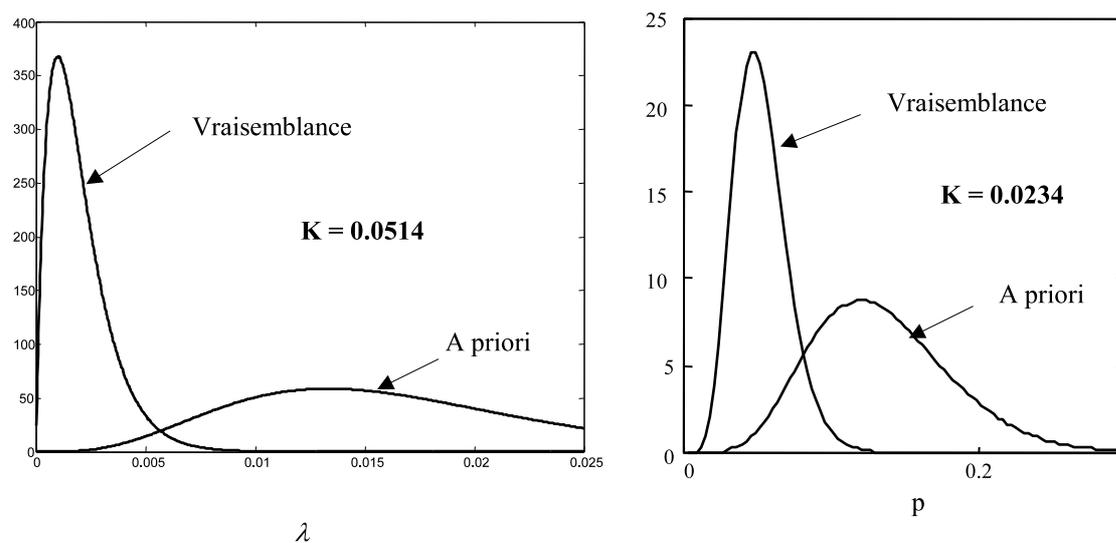


Figure 5.15 – Distribution a priori totalement décalée de la vraisemblance

La figure 5.16 présente le cas où les distributions sont semblables mais décalées. Cela se traduit par une valeur de K proche de 0,5 indiquant une compatibilité partielle.

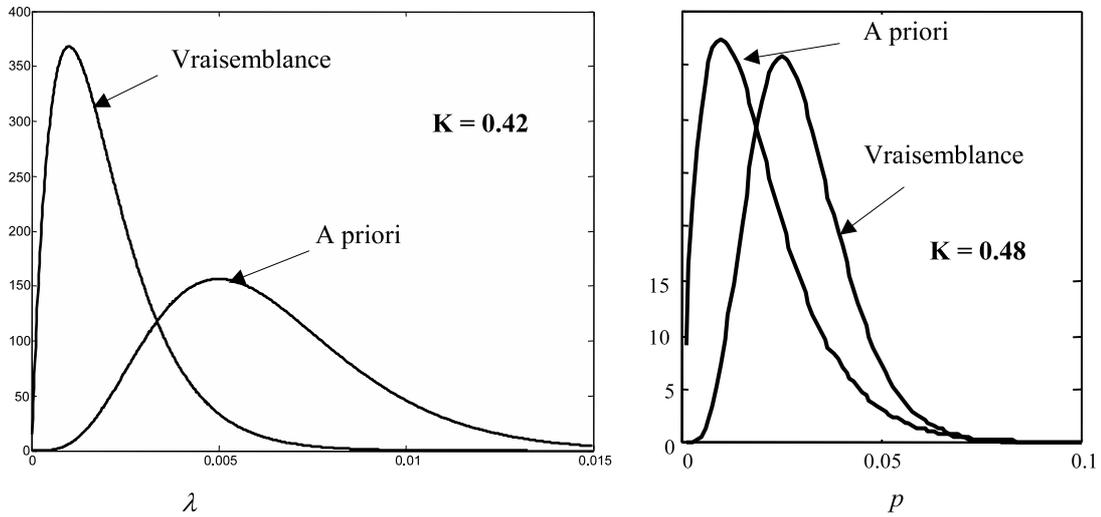


Figure 5.16 – Distribution a priori partiellement décalée de la vraisemblance

La figure 5.17 présente le cas où la distribution de l'a priori est large et intègre le domaine de la vraisemblance. Cela se traduit par une valeur de K proche de 1 indiquant une compatibilité forte.

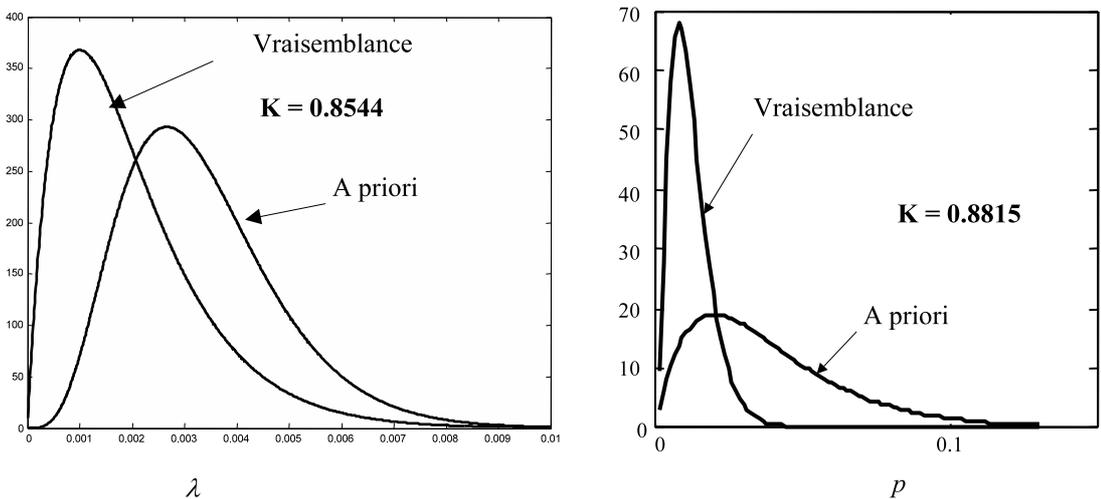


Figure 5.17 – Distribution a priori rapprochée de la vraisemblance

La figure 5.18 présente le cas où les distributions sont presque confondues. Cela se traduit par une valeur de K proche de 1 indiquant une compatibilité parfaite.

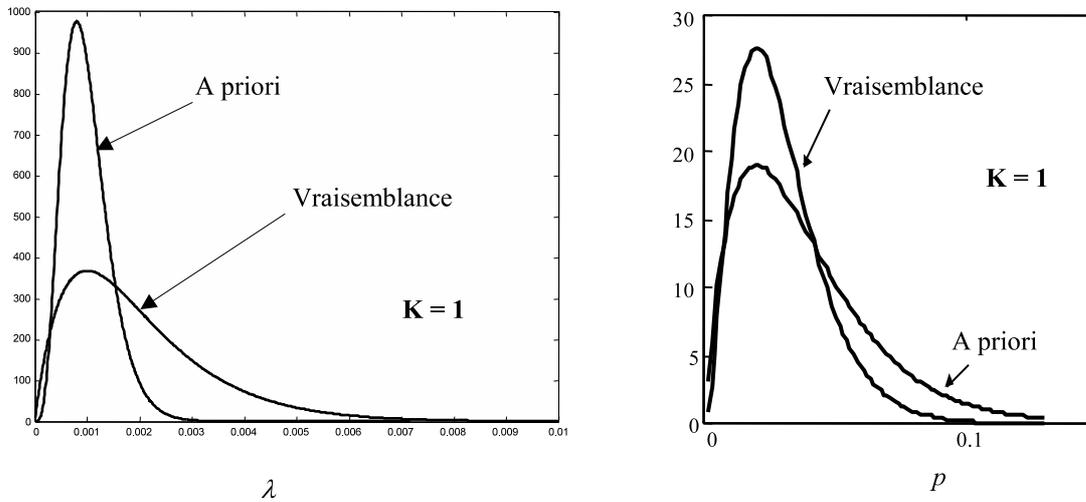


Figure 5.18 – Distribution a priori totalement compatible avec la vraisemblance

5.8.5 Utilisation du facteur de pondération K comme facteur de pondération de l'a priori

Nous disposons maintenant d'un facteur K de pondération qui permet de statuer sur la bonne cohérence entre la modélisation a priori et les essais réels symbolisés par la vraisemblance. Bien entendu, le facteur K est déjà utile dans le sens où il va permettre de statuer sur la pertinence de l'a priori.

Il est tout de même possible d'aller plus loin dans la démarche. En effet, quel que soit l'état de la distribution a priori, le facteur K peut être utilisé pour pondérer cette connaissance afin d'améliorer la compatibilité avec la vraisemblance.

Plus K sera proche de 1, et plus la connaissance a priori originale sera intégrée, permettant ainsi d'exploiter au mieux l'un des intérêts des méthodes bayésiennes, à savoir de réaliser des gains substantiels sur les plans d'essais de Sécurité/Fiabilité.

Plus K sera proche de 0 et moins la connaissance a priori initiale sera intégrée dans l'inférence bayésienne, évitant ainsi de prendre des décisions pouvant être lourdes de conséquences sur le plan de la Sécurité ou sur le plan économique ; ceci sur la base de résultats faux.

Pour ce faire, rappelons que la connaissance a priori est de type beta $B(a_0 ; b_0)$ pour les systèmes à mortalité binômiale avec a_0 et b_0 tels que :

$$\begin{cases} a_0 = k_0 + 1 \\ b_0 = N_0 - k_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = a_0 - 1 \\ N_0 = a_0 + b_0 - 2 \end{cases} \quad (5.67)$$

Et la connaissance a priori est de type Gamma $G(\alpha_0, \beta_0)$ pour les systèmes à mortalité exponentielle avec α_0 et β_0 tels que :

$$\begin{cases} \alpha_0 = k_0 + 1 \\ \beta_0 = T_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k_0 = \alpha_0 - 1 \\ T_0 = \beta_0 \end{cases} \quad (5.68)$$

Tout se passe comme si la définition de l'a priori était équivalente à une série d'essais fictifs. Afin de pondérer l'impact de cette série d'essais fictive sur les résultats du retour d'expérience réel, il suffit d'utiliser le facteur de pondération K en opérant le changement de variable suivant pour la distribution

beta :

$$\begin{cases} k'_0 = K.k_0 \\ N'_0 = K.N_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a'_0 = K.k_0 + 1 \\ b'_0 = K.N_0 - K.k_0 + 1 \end{cases} \quad (5.69)$$

et pour la distribution Gamma :

$$\begin{cases} k'_0 = K.k_0 \\ T'_0 = K.T_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha'_0 = K.k_0 + 1 \\ \beta'_0 = K.T_0 \end{cases} \quad (5.70)$$

Le résultat est qu'on ne modifie pas le mode de la distribution a priori, par contre la variance devient plus importante affaiblissant cette distribution. Le facteur de pondération K évoluant avec le niveau de pondération entre a priori et vraisemblance, la modélisation a priori initiale sera bien d'autant plus intégrée dans l'inférence bayésienne qu'elle est compatible de la vraisemblance. Il en sera de même en cas d'incompatibilité entre a priori et vraisemblance car le facteur K sera proche de 0. Le poids de la vraisemblance dans l'inférence bayésienne sera donc prépondérant. Aussi, la modélisation a priori incompatible au départ sera très peu exploitée.

A titre d'illustration, les figures suivantes présentent des exemples d'inférence bayésienne utilisant une distribution a priori pondérée dans la construction de celle correspondant à l'a posteriori en considérant les systèmes à mortalité exponentielle (à gauche) et binômiale (à droite).

Distributions a priori très pessimiste ou optimiste => K très faible

Dans les figures ci-dessous, que la distribution a priori soit très optimiste (figure 5.19) ou bien très pessimiste (figure 5.20), le facteur de pondération K est très faible. La pondération, par ce facteur, de la distribution a priori permet de donner un maximum de poids à la vraisemblance. La distribution a posteriori est donc modélisée principalement en exploitant les résultats de la vraisemblance puis, à beaucoup moindre échelle, par les données cohérentes de l'a priori. Les résultats sont donc au plus proche de la réalité et l'inférence bayésienne a été optimisée au mieux.

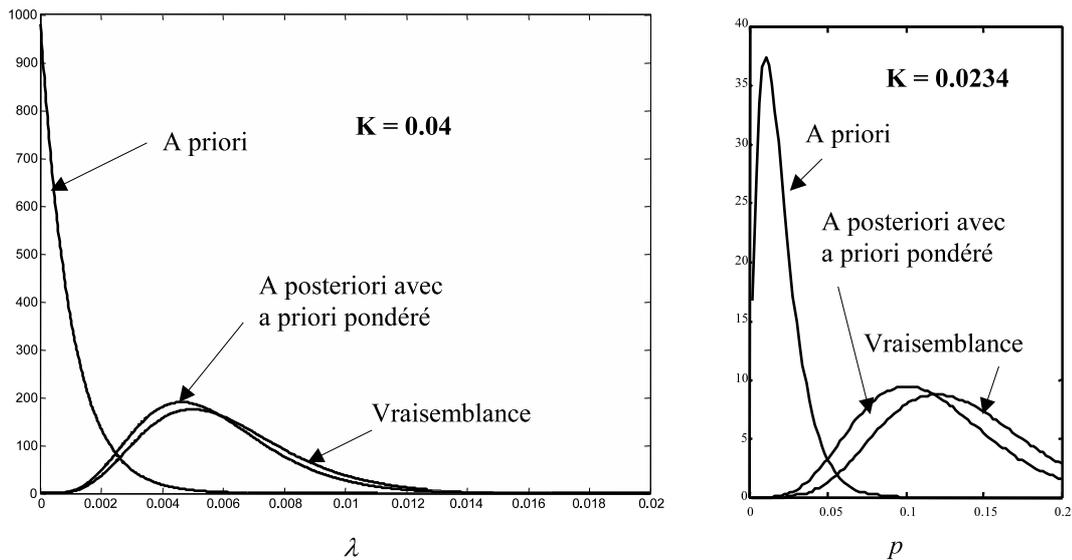


Figure 5.19 – Distribution a priori décalée et trop optimiste

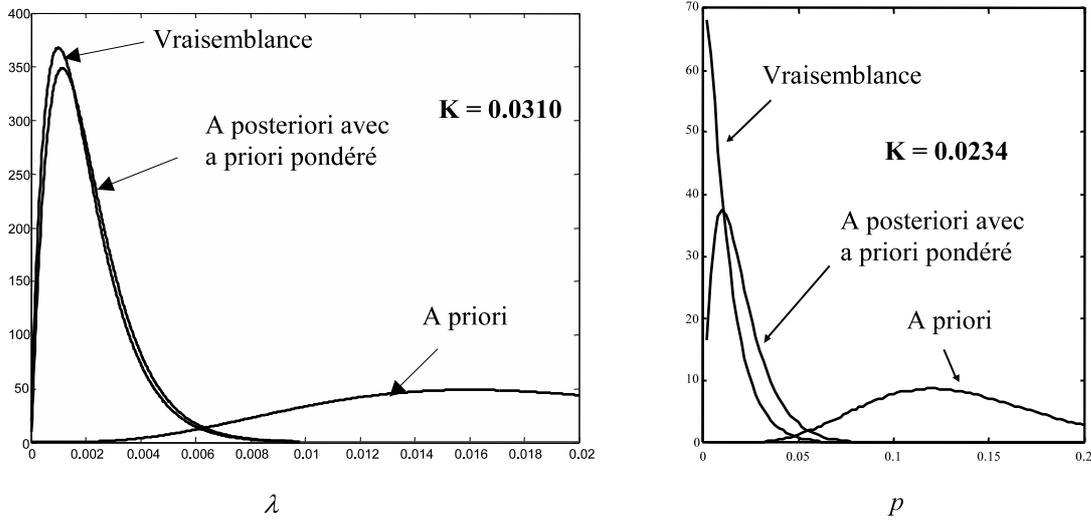


Figure 5.20 – Distribution a priori décalée et trop pessimiste

Distribution a priori non cohérente => K minimum

Dans le cas de la figure 5.21, la distribution a priori n'est absolument pas cohérente et beaucoup trop optimiste. La pondération par K , qui cette fois-ci est nul, permet de ne pas prendre du tout en compte l'erreur liée à l'a priori. La distribution a posteriori est identique à la distribution de vraisemblance, ce cas correspond au cas des essais classiques.

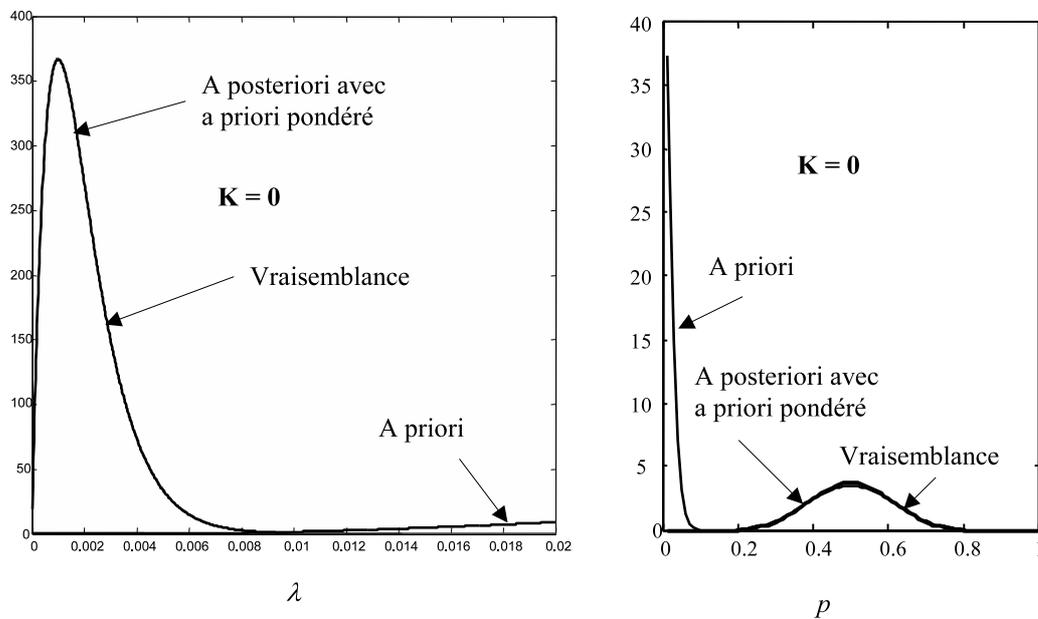


Figure 5.21 – Distribution a priori incohérente

Distribution a priori cohérente => K maximum

Dans le cas de la figure 5.22, la pondération entre a priori et la vraisemblance est maximale. La pondération par le facteur K égal à 1 n'a aucun effet sur l'a posteriori.

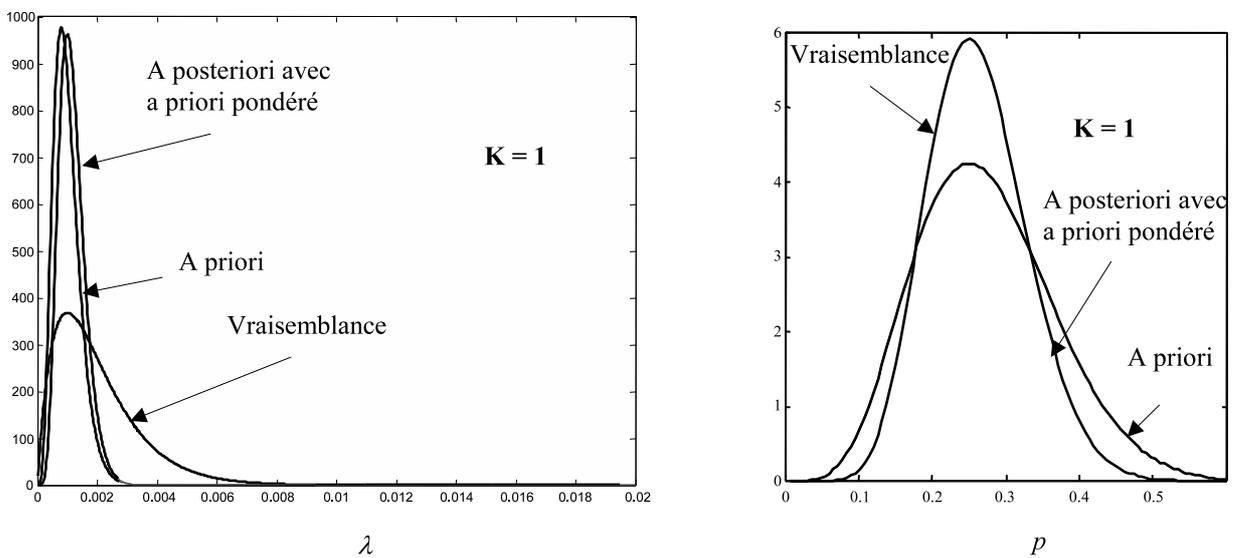


Figure 5.22 – Distribution a priori cohérente

Distribution a priori en partie cohérente => 0 < K < 1

Le cinquième cas (figure 5.23) est une illustration de toutes les éventualités comprises lorsque K n'est ni minimum, ni maximum. Dans ce cas, seule la partie cohérente de l'a priori est prise en compte dans l'inférence bayésienne, laissant plus ou moins de poids à la vraisemblance en fonction de la similitude des deux fonctions. Ceci permet d'inhiber les erreurs liées à la première modélisation a priori et de fournir des résultats fiables à l'analyste et au décideur.

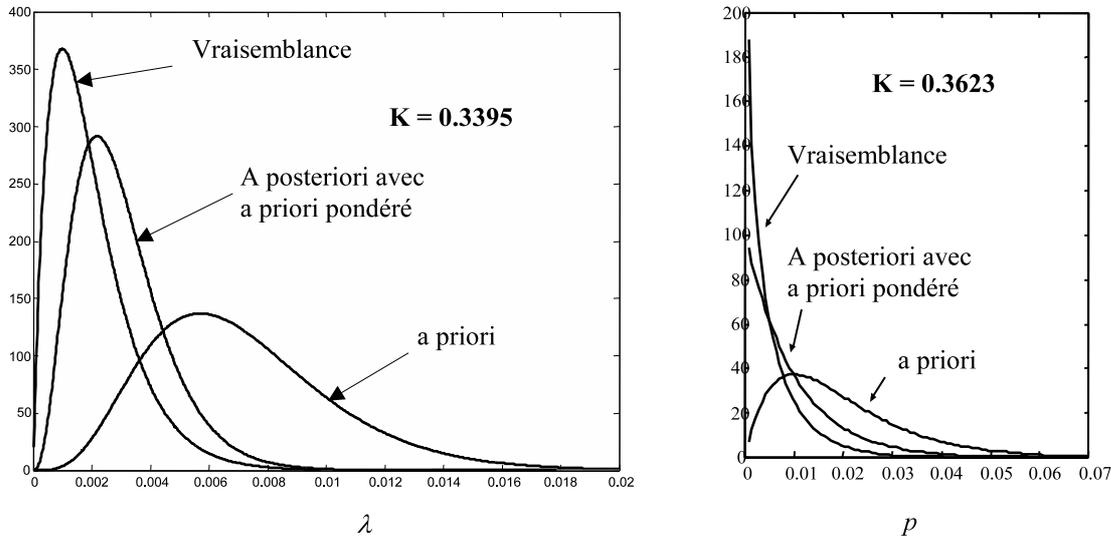


Figure 5.23 – Distribution a priori partiellement cohérente

Synthèse :

En résumé, et sur la base des exemples présentés ci-dessus, la pondération par le facteur de pondération K présente un intérêt évident, ceci quelle que soit la situation à analyser. En effet, dans le cas extrême d'a priori non cohérent, il permet de ne pas utiliser du tout la loi a priori. Ce cas revient à utiliser les méthodes classiques en évitant à l'analyste de s'engager inutilement sur des plans d'essais trop importants et sans aucune justification réelle. A l'opposé, même si l'a priori est parfaitement cohérent, la pondération n'a aucun impact, ce qui revient à réaliser une inférence bayésienne normale, permettant ainsi d'exploiter au mieux l'intérêt de ces méthodes. Enfin, entre ces deux cas, la pondération par K apporte le fait de n'exploiter que la partie utile de la modélisation a priori, ce qui permet de ne pas biaiser les résultats.

5.8.6 Interprétation de la pondération par le facteur de pondération K

Plus K est proche de 1 et plus la distribution a priori doit être prise en considération. Cela se manifestera par la quasi conservation du nombre de défaillances équivalent k_0 et du nombre d'essais équivalent N_0 (dans le cas de systèmes à mortalité binômiale) ou du temps cumulé d'essai équivalent T_0 (dans le cas de systèmes à mortalité exponentielle) obtenus à partir des données du retour d'expériences sur des produits similaires, des résultats d'études de conception, des avis d'experts, ...

Par contre si le facteur K est inférieur à 1, on peut décider soit de rejeter l'a priori pour une valeur de K inférieure à une valeur limite, soit pour "affaiblir" l'a priori multiplier k_0 , N_0 et T_0 par le facteur de pondération calculé et retenir $k'_0 = K.k_0$ (pour les systèmes à mortalité binômiale et exponentielle), $N'_0 = K.N_0$ (pour les systèmes à mortalité binômiale) et $T'_0 = K.T_0$ (pour les systèmes à mortalité exponentielle).

On admet alors que l'on retient des informations moins "riches" pour l'a priori qui se manifeste par un nombre de défaillances réduit, une taille d'échantillon (dans le cas de système à mortalité binômiale), un temps cumulé d'essai (dans le cas de système à mortalité exponentielle) et sans pour autant modifier le maximum de la distribution a priori toujours égal à $\frac{k_0}{N_0} = \frac{k'_0}{N'_0}$ pour beta et à $\frac{k_0}{T_0} = \frac{k'_0}{T'_0}$ pour Gamma.

Seul l'écart type de la distribution est affecté, il est d'autant plus important que la taille d'échantillon ou le temps cumulé diminue. En première approximation on peut admettre, lorsque k_0 , N_0 et T_0 ne sont

pas trop petits, que les variances des distributions a priori avant et après pondération sont liées par la relation $V'_0 = \frac{V_0}{K} > V_0$.

A la limite, lorsque K se rapproche de 0, c'est admettre que $k'_0 = N'_0 = T'_0 = 0$, c'est-à-dire qu'on ne retient aucune information, et l'a priori se ramène à une fonction uniforme sur $[0,1]$ (essai classique).

A l'inverse, si $K=1$, il n'existe aucune raison de rejeter l'a priori et l'essai réel à réaliser sera réduit.

Au fur et à mesure que l'on va enrichir les essais réels, on va "renforcer" la vraisemblance et l'on peut s'attendre à ce que K diminue.

A la limite, quand la taille de l'échantillon d'essais réels ou le temps cumulé d'essais réels tend vers l'infini, on retrouve le résultat des essais classiques car $K \rightarrow 0$ (on ne tient plus compte de l'a priori).

5.8.7 Exemples d'application - comparaison avec les essais classiques et bayésiens pondérés ou non

Nous allons illustrer la méthodologie par 2 exemples, dans le cas de systèmes à mortalité binômiale, en montrant l'évolution des estimateurs de probabilités de défaillance définis en classique, bayésien et bayésien pondéré. Pour cela, nous effectuons des tirages aléatoires de k selon une loi binômiale de probabilité réelle de 0.1 en modifiant la taille de l'échantillon n variant de 1 à 50.

Pour le premier exemple (Figure 5.24), nous considérons un a priori pessimiste puisque l'estimateur de la probabilité de défaillance est :

$$\hat{p} = \frac{k_0}{N_0} = \frac{80}{100} = 0.8$$

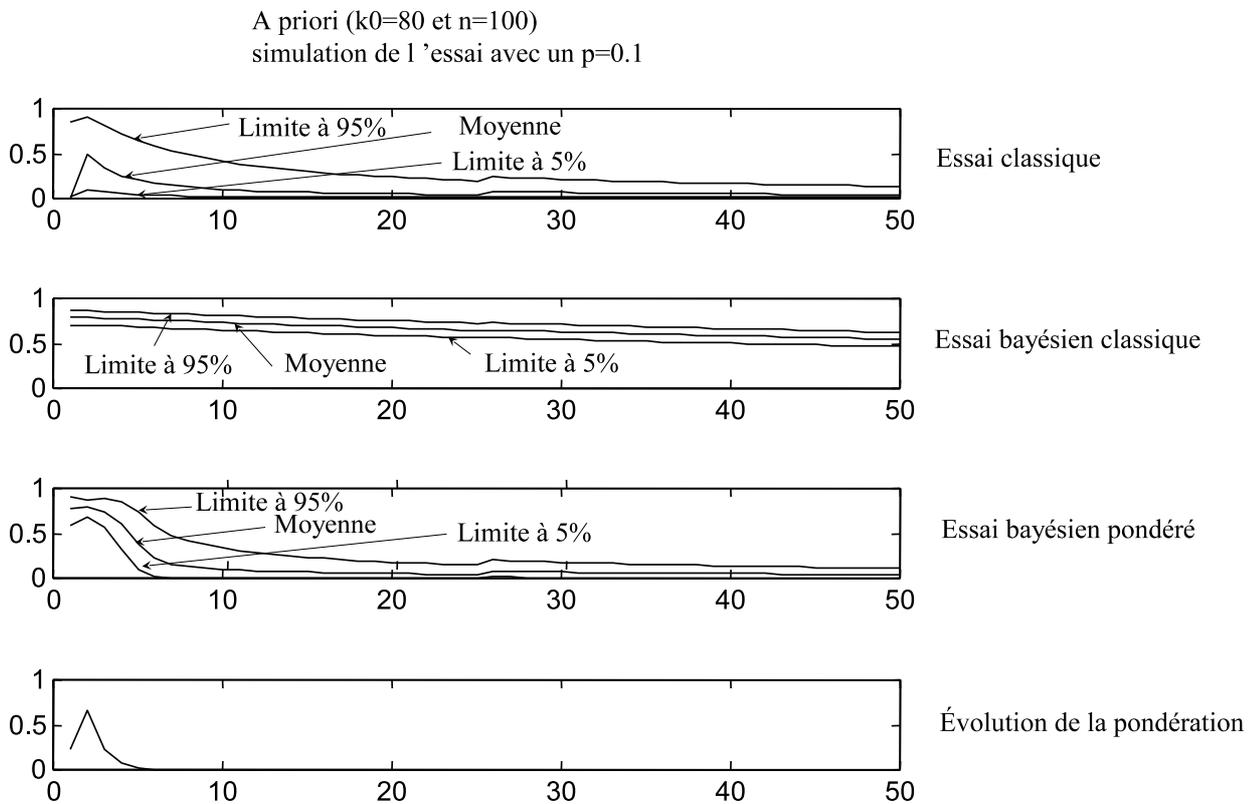


Figure 5.24 – Exemple avec un a priori erronné

Sur la figure 5.24, la pondération permet de donner peu de poids à l'a priori initial lors de la première inférence. Ceci permet à l'inférence bayésienne pondérée de converger beaucoup plus rapidement vers le résultat par comparaison à la méthode bayésienne sans pondération, qui, celle-ci, converge plus lentement compte tenu de l'a priori erronné de départ.

Pour le deuxième exemple (Figure 5.25), nous considérons un a priori cohérent puisque l'estimateur de la probabilité de défaillance est

$$\hat{p} = \frac{k_0}{N_0} = \frac{12}{100} = 0.12$$

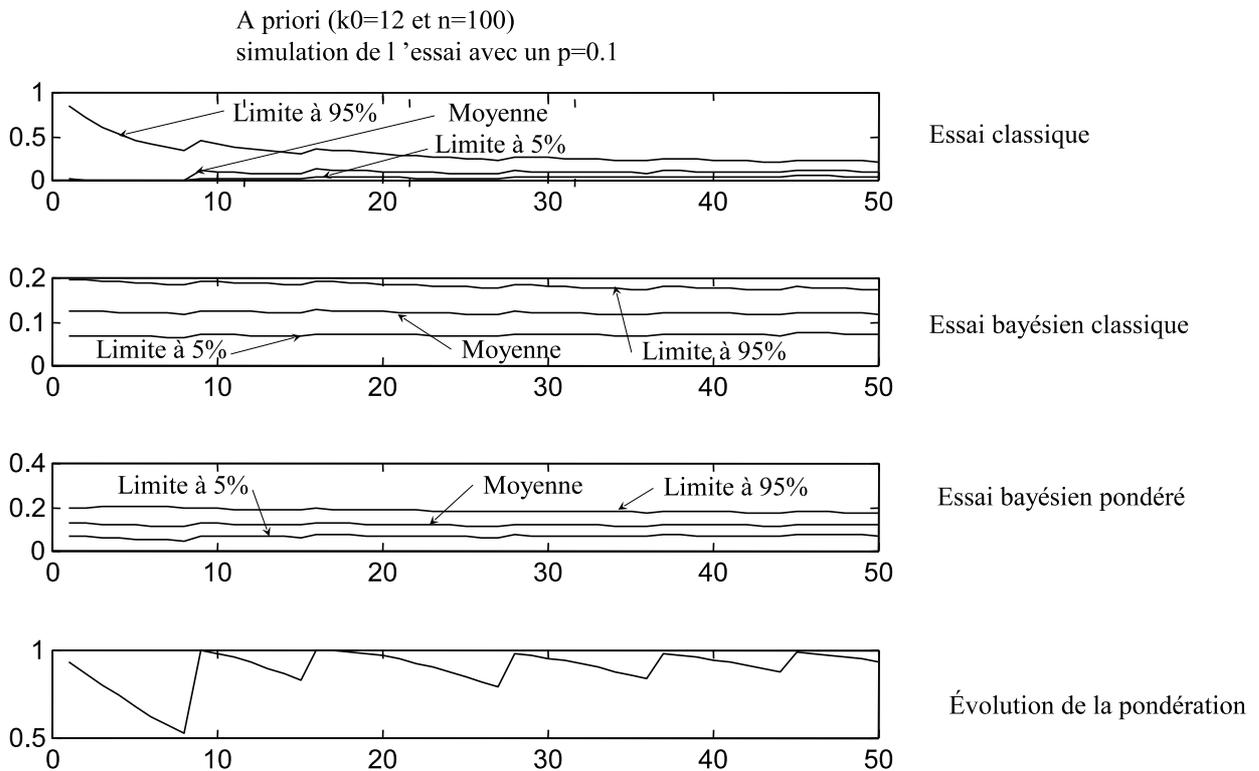


Figure 5.25 – Exemple avec un a priori correct

Sur la figure 5.25, l'estimation bayésienne pondérée converge aussi plus rapidement. En revanche, compte tenu de la cohérence avec la vraisemblance, la convergence du résultat par les méthodes classiques est également très rapide et les résultats des deux méthodes sont très rapidement identiques.

5.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les travaux sur les essais bayésiens, permettant de réduire la taille d'échantillon de systèmes à tester, réalisés en partie dans le cadre de la thèse d'Emmanuel USUREAU. Après avoir rappelé le principe de l'inférence bayésienne, nous avons montré trois applications d'estimation de la fiabilité en considérant les mortalités suivantes :

- Binômiale (caractéristique des systèmes fonctionnant à la sollicitation comme les air-bags, munitions, interrupteurs (ON/OFF), ... ou de la fiabilité des systèmes continus au bout d'un temps donné)
- Exponentielle (utilisée dans le cas des systèmes dont le taux de défaillance est constant comme les cartes électroniques ou certains systèmes complexes)
- Lognormale ou normale (descriptif des systèmes mécaniques soumis à des phénomènes d'usure ou de vieillissement)

Le cas lognormale est très peu étudié et nous sommes les premiers à l'avoir appliqué à la fiabilité. Cette application a fait l'objet d'une communication [Guerin and Dumon, 1999].

Pour être exhaustif, il nous reste à étudier le cas de Weibull pour lequel il n'existe "a priori" aucune distribution conjuguée bayésienne (la forme de la distribution a posteriori est identique de celle a priori)

imposant aujourd'hui à faire appel aux calculs numériques.

Ensuite, nous avons traité un aspect important dans la démarche bayésienne en proposant des méthodologies de construction de la distribution a priori à l'aide :

- d'avis d'experts
- d'études préliminaires de SdF

C'est cette distribution qui, si elle est bien définie, permet de réduire la taille d'échantillon à tester. La méthode basée sur les études préliminaires de SdF, est tout à fait originale et a fait l'objet de deux publications majeures [Guerin et al., 2003b] et [Usureau et al., 2004].

Pour finir, nous avons abordé un aspect peu étudié qui est la compatibilité entre l'a priori (fiabilité présumée du système et son incertitude) et la vraisemblance (données réelles de fiabilité). Ainsi, nous avons proposé un indicateur de compatibilité, noté K et compris entre 0 et 1, permettant par la suite de pondérer l'a priori. Nous avons étudié principalement les cas binomial et exponentiel. Les nombreux exemples traités montrent l'efficacité de la méthode proposée. Cette méthode originale a fait l'objet de deux publications majeures [F. Guerin and Usureau, 2002] et [Usureau et al., 2004]. Ce travail doit permettre une diffusion plus large de la démarche bayésienne en fiabilité.

Des études complémentaires sont nécessaires pour d'une part analyser d'autres approches de mesure de compatibilité et de pondération et d'autre part les appliquer à d'autres types de distribution comme celles de Weibull et Lognormale avec la difficulté qu'elles sont définies par deux paramètres.

CHAPITRE 6

Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

En parallèle des études sur les essais bayésiens, permettant de réduire la taille de l'échantillon à tester, nous nous sommes intéressés aux essais accélérés qui réduisent les temps d'essai. Brièvement, ces essais consistent à sévérer les conditions d'essais en stressant le produit (fonctionnement à haute température, niveau d'humidité élevé, fréquence des sollicitations plus importante, ...) pour précipiter plus rapidement les défaillances (voir [Nelson, 1990], [O'Connor, 2003], [Caruso and Dasgupta, 1998], [Vassilios and Mettas, 2001]). Ainsi, il est possible de construire la fonction de fiabilité dans les conditions sévérées $R_s(t)$ et à l'aide d'une fonction de transfert (appelée également loi d'accélération), déterminée par les résultats d'essai à différents niveaux de stress, de déduire celle dans les conditions normales $R_{s_0}(t)$. Ainsi, les essais permettent de déterminer les paramètres des fonctions de fiabilité et de transfert (voir figure 6.1).

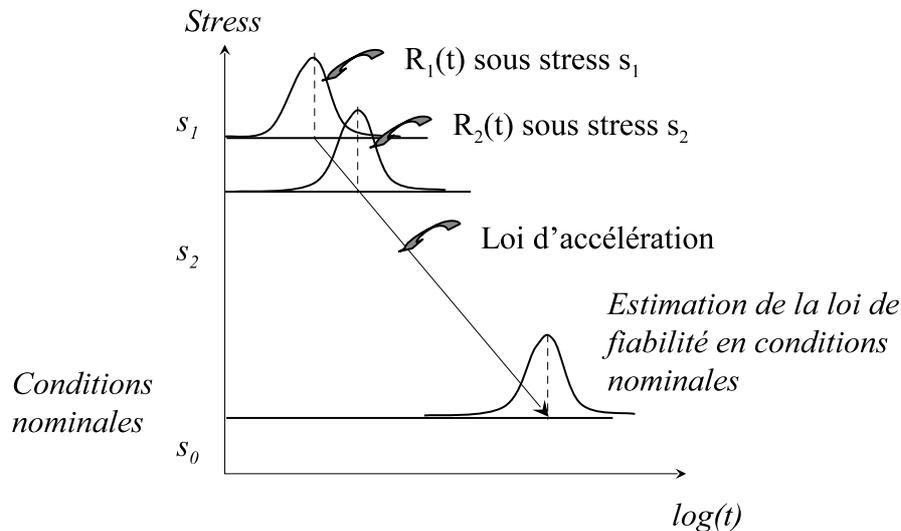


Figure 6.1 – Principe d'un essai accéléré

6.1 Définition d'un plan d'essai accéléré

La conduite d'un essai doit se faire selon un plan de tests qui caractérise :

- la nature des stress de sévérification (accélération le mécanisme de défaillance)
- les niveaux des stress (assurant de conserver le mécanisme de défaillance d'origine tout en accélérant suffisamment l'essai)

- la taille de l'échantillon (donnant la précision des estimations)
- la loi d'accélération (permettant d'analyser les résultats d'essai pour définir la fonction de fiabilité dans les conditions nominales)

Remarque :

Pour construire ce plan d'essai il est nécessaire de connaître les informations suivantes :

- le mode de défaillance (permettant de choisir les stress de sévérisation et une famille de loi d'accélération)
- les conditions nominales d'utilisation (nécessaire pour estimer la fonction de fiabilité dans les conditions nominales à partir des résultats d'essai)
- les limites opérationnelles du produit déterminées par un essai aggravé par exemple (donnant les niveaux de stress extrêmes à ne pas dépasser afin d'éviter les fonctionnements dégradés des produits)

Remarque : dans le cas où le produit est sujet à plusieurs modes de défaillance, il est nécessaire d'estimer la fonction de fiabilité pour chacun d'eux pour construire la fonction de fiabilité globale.

6.1.1 Profils de stress utilisés

Divers profils de stress sont utilisés dans les essais accélérés dont le constant (voir figure 6.2), l'échelonné (voir figure 6.3), le cyclique (voir figure 6.4), ...

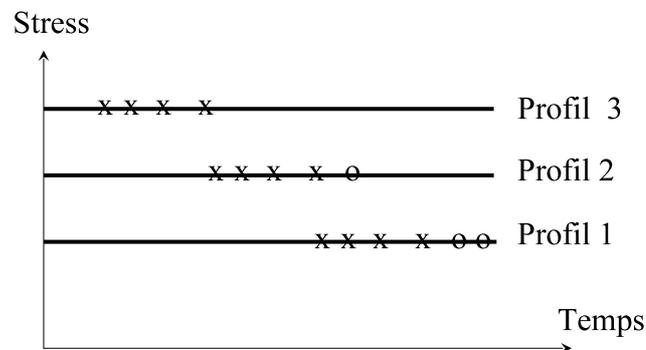


Figure 6.2 – Profil d'essai sous stress constant

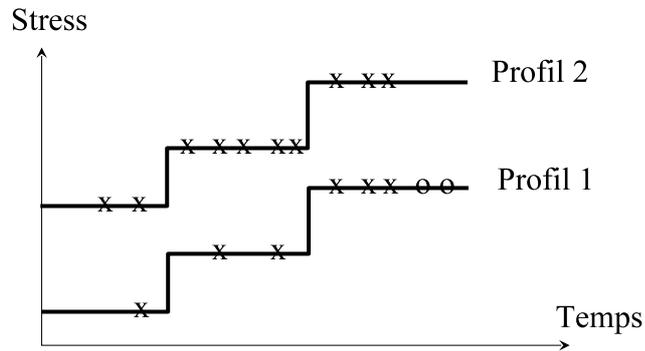


Figure 6.3 – Profil d'essai sous stress échelonné

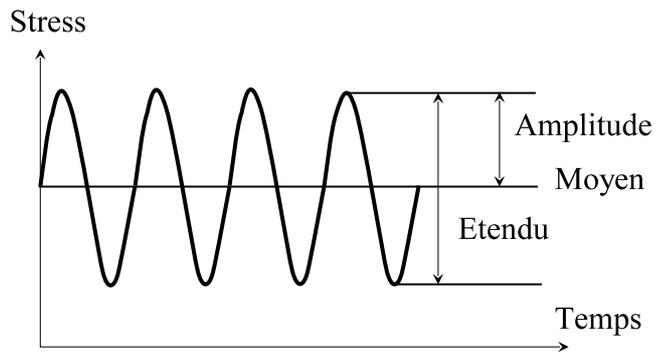


Figure 6.4 – Profil d'essai sous stress cyclique

Le choix du profil de stress dépend des conditions d'utilisation du produit, de ses limitations technologiques (ne pas dépasser ses limites opérationnelles par exemple), conserver le mode de défaillance d'origine (voir figure 6.5), ...

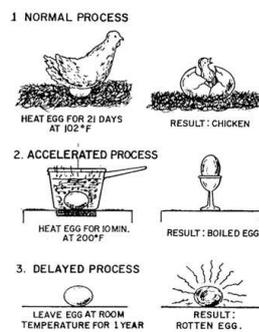


Figure 6.5 – Danger de ne pas reproduire le mode de défaillance d'origine [?]

6.1.2 Types de stress utilisés

Les types de stress appliqués lors d'un essai accéléré dépendent des conditions nominales et des modes de défaillance à reproduire. On peut les classer en trois catégories :

1. **stress mécaniques** : la fatigue est le stress le plus communément utilisé pour les composants mécaniques qui sont testés sur des pots vibrants. Quand ceux-ci sont soumis également à la température on considère le mode de dégradation par fluage.
2. **stress électriques** : cela inclue la tension, l'intensité, l'électromigration, ... La tension est le stress électrique le plus courant puisqu'il génère rapidement des défaillances.
3. **stress environnementaux** : La température et les cycles thermiques sont les stress les plus communément utilisés. Il est nécessaire d'appliquer des niveaux appropriés pour conserver les modes de défaillance d'origine. L'humidité est également un stress utilisé mais il génère des mécanismes de défaillance lents comme la corrosion. D'autres stress peuvent être appliqués comme les ultraviolets, brouillard salin, poussières, ...

6.1.3 Modèles de vie accélérée

Le modèle de vie accélérée permettra de déduire la loi de fiabilité dans les conditions nominales à partir des résultats de l'essai accéléré.

Il existe différentes classes (voir figure 6.6) de modèles de vie accélérée :

1. les modèles expérimentaux déterminés par des plans d'expériences ([Phadke, 1999])
2. les modèles physiques définis à l'aide de ceux de dégradation (chimique, mécanique, ...) ([Guerin et al., 2001], [Lalanne, 1999])
3. les modèles statistiques caractérisés par des approches paramétrique, semi paramétrique et non paramétrique ([Bagdonavicius and Nikulin, 1995b], [Bagdonavicius and Nikulin, 1995a], [Bagdonavicius and Nikulin, 1997], [Nelson, 1990], [O'Connor, 2003], [Bagdonavicius et al., 2000], [Bagdonavicius and Nikulin, 2001], [Bagdonavicius and Nikulin, 2002], [Basu and Ebrahimi, 1982], [Devarajan and Ebrahimi, 1998], [Caruso and Dasgupta, 1998], [Owen and Padgett, 1998], [Vassilios and Mettas, 2001], [Hoang, 2003], [Shyur et al., 1999], ...).

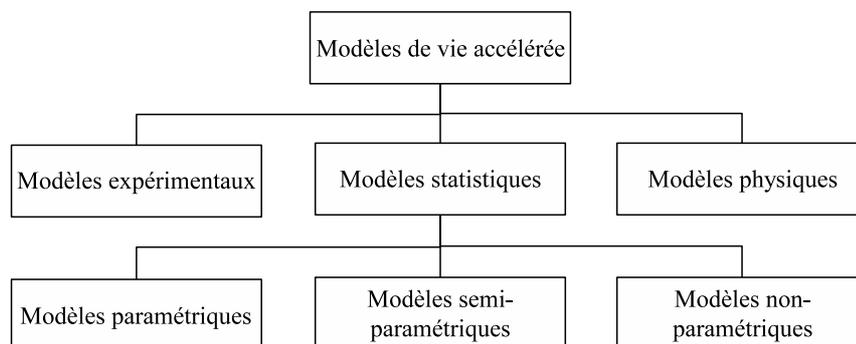


Figure 6.6 – Classification des modèles de vie accélérée

On trouve une littérature abondante d'application des modèles de vie accélérée dans le domaine de l'électronique (voir [Caruso and Dasgupta, 1998], [Nelson, 1990], [O'Connor, 2003],

[Vassilious and Mettas, 2001]) mais moins nombreuse dans celui de la mécanique ([Guerin et al., 2001], [Nelson, 1990], [Augé, 1998], [Tebbi et al., 2004a], [Tebbi et al., 2004c], [Tebbi et al., 2004b], [Zhang, 2002]).

Aussi, nous nous sommes intéressés à l'étude des modèles standard de vie accélérée (SVA) appliqués à la mécanique et plus particulièrement aux composants soumis au dommage par fatigue en considérant plusieurs types de plan d'essai :

- par régression et avec endommagement préalable accéléré (thèse de Ouahiba Tebbi).
- sous stress échelonnés (thèse de Pascal Lantieri)
- sur des systèmes réparables (thèse de Sorin Voiculescu)

6.2 Modèle standard de vie accélérée

Nous allons présenter le modèle standard de vie accélérée (SVA) basé sur la définition d'une fonction de transfert qui a été décrite par Bagdonavicius et Nikulin [Bagdonavicius and Nikulin, 1995b], [Bagdonavicius and Nikulin, 1995a], [Bagdonavicius and Nikulin, 1997], [Bagdonavicius et al., 2000], [Bagdonavicius and Nikulin, 2001], [Bagdonavicius and Nikulin, 2002]).

Supposons que l'on ait des systèmes très fiables ne permettant pas d'observer des défaillances pendant un temps t donné d'essai. Pour permettre la construction d'une loi de fiabilité, il est nécessaire de procéder par des essais accélérés au cours desquels les systèmes subissent des stress supérieurs à ceux qu'ils supportent dans les conditions normales d'utilisation.

Dans le cas général, les stress s peuvent évoluer en fonction du temps et peuvent être multidimensionnels (combinaison de plusieurs stress). Dans le cas unidimensionnel, on a :

$$s = s(\tau), \tau \geq 0 \text{ où } s \in [0, \infty[$$

Supposons que la durée de vie $T_{s(\cdot)}$ d'un produit sous le stress **constant** $s(\cdot)$ soit une variable aléatoire de fonction de survie :

$$R_{s(\cdot)}(t) = \text{prob}(T_{s(\cdot)} > t), t \geq 0 \quad (6.1)$$

Soit R_{s_0} la fiabilité sous le stress usuel : $s_0 \in \varepsilon_0 \subset \varepsilon$ (ε Ensemble de stress), $R_{s_0}^{-1}$ sa fonction inverse. La *fonction de transfert* est définie par :

$$f : [0, +\infty[\times \varepsilon \rightarrow [0, +\infty[$$

$$(t, s(\cdot)) \rightarrow f(t, s(\cdot)) = (R_{s_0}^{-1} \circ R_{s(\cdot)})(t) \quad (6.2)$$

Cette fonction permet d'évaluer la fiabilité d'un produit, sous des stress expérimentalement indisponibles, à partir de la fiabilité du même produit sous des conditions particulières d'utilisation.

La définition de f peut être traduite par l'équation suivante :

$$P(T_{s_0} \geq f_{s(\cdot)}(t)) = \text{Pr ob}(T_{s(\cdot)} \geq t) \quad (6.3)$$

$f_{s(\cdot)}(t)$ est appelée ressource utilisée sous le stress $s(\cdot)$ jusqu'à l'instant t .

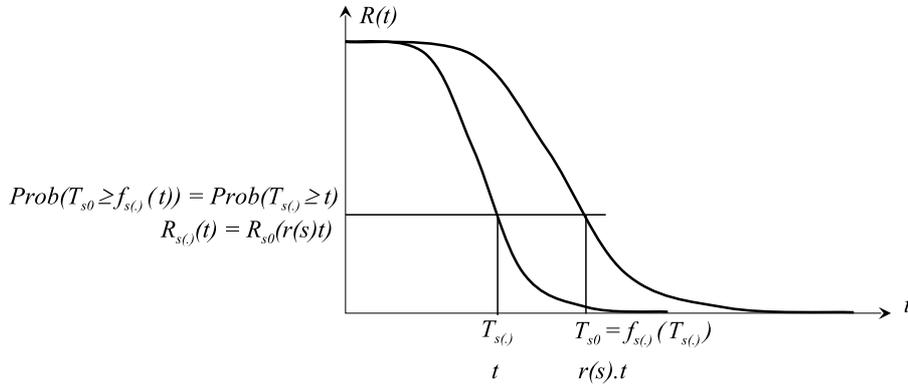


Figure 6.7 – Définition de la fonction de transfert

Le modèle statistique de vie accélérée est défini sur ε s'il existe une fonction $r : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $s(\cdot) \in \varepsilon$:

$$\frac{d}{dt} f_{s(\cdot)}(t) = r[s(t)] \quad (6.4)$$

L'équation 6.4 implique :

$$R_{s(\cdot)}(t) = R_{s_0} \left(\int_0^t r[s(\tau)] d\tau \right) \quad (6.5)$$

Dans le cas où $s(t)$ est constant l'équation 6.5 devient :

$$R_s(t) = R_{s_0}(r(s).t) \quad (6.6)$$

On note que $r(s_0) = 1$

Considérons un plan d'essai classique consistant à utiliser plusieurs niveaux de stress constant $s_1, s_2, \dots, s_k : s_1 < s_2 < \dots < s_k$ et s_0 ($s_0 < s_1$) le stress usuel qui ne sera pas utilisé. Si la fonction r est complètement inconnue alors la fonction de fiabilité R_{s_0} ne peut être déterminée. Donc, il est nécessaire de choisir r dans une certaine classe de fonctions. Nikulin et Bagdonavicius considèrent une forme exponentielle. Si l'équation (6.6) est vérifiée sur un ensemble de stress ε , alors pour tout $s_1, s_2 \in \varepsilon$:

$$R_{s_2}(t) = R_{s_1}(\rho(s_1, s_2)t) \quad (6.7)$$

Où $\rho(s_1, s_2) = r(s_2)/r(s_1)$

Supposons dans un premier temps que le stress $s \in \varepsilon_0 \subset \mathbb{R}$ soit unidimensionnel. Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée :

$$\delta(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\rho(s, s + \Delta s) - \rho(s, s)}{\Delta s} = \frac{d \log(r(s))}{ds} \quad (6.8)$$

Donc pour tout $s \in \varepsilon$

$$r(s) = e^{\int_{s_0}^s \delta(v) dv} \quad (6.9)$$

Supposons que $\delta(s)$ soit proportionnelle à une fonction connue $u(s)$ du stress :

$$\delta(s) = \beta_1 u(s), \beta_1 > 0$$

Alors

$$r(s) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(s)} \quad (6.10)$$

où $z(s)$ est une fonction primitive de $u(s)$, β_0 et β_1 sont des paramètres inconnus

Par exemple, si on considère $\delta(s) = \beta_1/s$ alors on obtient le modèle de puissance inverse (pour plus de détail voir l'annexe A.3) :

$$r(s) = e^{\beta_0 + \beta_1 \log(s)} = \alpha s^{\beta_1} \quad (6.11)$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$

Ce modèle est appliqué dans le cas de système soumis au phénomène mécanique de fatigue.

Ainsi, les expressions (6.5) et (6.6) s'écrivent :

$$R_{s(\cdot)}(t) = R_{s_0} \left(\int_0^t e^{\beta^T z(\tau)} d\tau \right) \quad (6.12)$$

ou

$$R_s(t) = R_{s_0} \left(e^{\beta^T z} \cdot t \right) \quad (6.13)$$

Où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$ est le vecteur de paramètres et $z(t) = (z_0(t), \dots, z_m(t))$ le vecteur de primitives (avec $z_0=1$) de u_1, \dots, u_m , avec $\delta(s) = \beta_1 u_1(s) + \dots + \beta_m u_m(s)$.

Dans les paragraphes suivants, nous allons préciser l'application des modèles SVA à la mécanique et plus particulièrement aux systèmes soumis à l'endommagement par fatigue.

6.3 Application des modèles SVA à la mécanique

6.3.1 Introduction

Les modèles SVA peuvent s'appliquer à plusieurs domaines comme celui du vivant (sciences médicales), de l'électronique, ... et de la mécanique. Ce qui différencie les diverses applications ce sont les lois de fiabilité utilisées, les stress employés pour sévérer les essais et la nature de la fonction r des modèles (6.12) et (6.13).

Ainsi, en mécanique il est courant de définir la loi de fiabilité par une distribution de type Weibull, Log-normale ou Birnbaum-Saunders qui caractérise correctement les durées de vie des systèmes soumis à des dégradations mécaniques (voir [Owen and Padgett, 1998], [Hoang, 2003]). La défaillance constatée est bien souvent une rupture de pièces mais les mécanismes d'endommagement sous jacents peuvent être de nature totalement différente. Cela dépend essentiellement des conditions d'utilisation du système et des stress qui y seront appliqués. En effet, la combinaison de la température, la corrosion, un chargement cyclique, ... agit différemment selon le niveau de chacun des stress en provoquant des mécanismes de dégradation différents (fluage, fatigue-corrosion, fatigue, ...). Aussi, les mécaniciens ont l'habitude de définir des modèles de dégradation en fonction des stress prépondérants pour caractériser la durée de vie des systèmes. Dans le cadre de la thèse de Ouahiba Tebbi, nous avons étudié l'application des modèles SVA à la mécanique en intégrant les spécificités de la mécanique. A titre d'illustration, nous prendrons comme exemple d'application l'endommagement par fatigue.

6.3.2 Rappel sur l'endommagement par fatigue

Description de l'endommagement par fatigue

On appelle *dommage par fatigue* la modification des caractéristiques d'un matériau, tenant essentiellement à la formation de fissures (6.8) et résultant de l'application de cycles de contrainte (chargement cyclique de la contrainte σ , voir Figure (6.9)) conduisant à une rupture ([Bompas-Smith, 1973], [Doyle, 1991], [Kececioglu et al., 1998], [Little and Ekvall, 1979], [Shigley., 1972]).

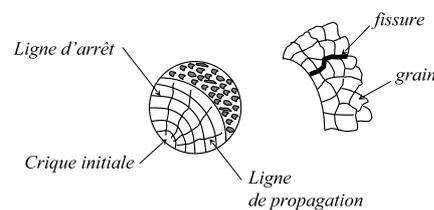


Figure 6.8 – Propagation de la fissuration

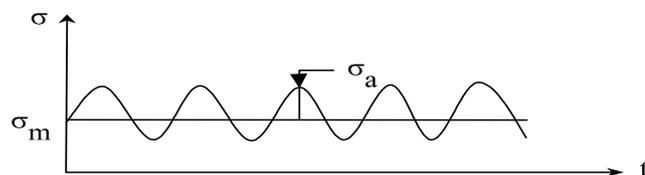


Figure 6.9 – Cycle de contrainte

Une pièce soumise, dans des conditions bien précises, à une contrainte, dont les valeurs extrêmes sont $\pm\sigma_a$ se rompra au bout d'un nombre de cycles N . La courbe qui donne la variation de la contrainte appliquée σ_a en fonction du nombre de cycles à la rupture N est appelée courbe de fatigue ou courbe de Wöhler (Figure 6.10). La courbe partage le plan en deux régions : une région située au-dessus de la courbe dans laquelle les pièces sont rompues et une région située en dessous dans laquelle il n'y a pas de ruptures. La courbe de Wöhler peut être décomposée en 3 domaines de fatigue : oligocyclique, limitée et illimitée.

Le dimensionnement de pièces soumises à la fatigue s'effectue en considérant la limite d'endurance $\sigma_D(N)$ caractérisée par l'amplitude de la contrainte à ne pas dépasser pour éviter une rupture avant un temps donné (nombre N de cycles) correspondant à la durée de vie.

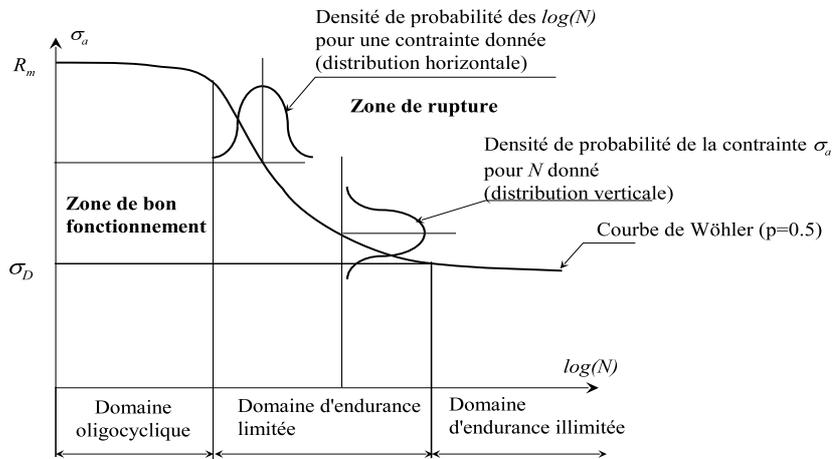


Figure 6.10 – Courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler d’un matériau est tracée en soumettant successivement un échantillon d’éprouvettes à des contraintes cycliques de différentes amplitudes. L’expérience montre qu’il y a une dispersion importante des durées de vie. On montre ainsi qu’en fixant la contrainte d’amplitude on obtient une distribution normale des $\log(N)$ dans le domaine de fatigue limitée et en fixant le nombre de cycles, la contrainte d’amplitude suit une loi normale ([Bompas-Smith, 1973], [Lalanne, 1999], [Shigley., 1972]).

Dans la littérature (voir entre autre [Lalanne, 1999]), on trouve de nombreux modèles caractérisant en partie ou complètement la courbe de Wöhler. Nous pouvons citer :

Nom de modèle	Domaines modélisés	équation
Basquin	endurance limitée	$N\sigma_a^k = A$
Strömeyer	endurances limitée et illimitée	$\sigma_a = \sigma_D + \left(\frac{A}{N}\right)^B$
Bastenaire	Fatigue oligocyclique, endurances limitée et illimitée	$(N + B)(\sigma_a - \sigma_D)e^{A(\sigma_a - \sigma_D)} = C$

Table 6.1 – Modèles usuels de la courbe de Wöhler

Nota : A, B, C et k sont des paramètres dépendant du matériau et des conditions d’essai.

Facteurs influençant la tenue en fatigue

De nombreux facteurs affectent les résultats d’une courbe de fatigue ([Lalanne, 1999], [Lemaitre and Chaboche, 1996], [Sendekyj, 2001]). Le plus significatif est sans doute l’état de surface. En effet, la rupture de fatigue a toujours pour origine l’existence d’une fissure et on a constaté que la plupart des fissures de fatigue commençaient à la surface de l’échantillon. Par conséquent, les rayures d’usinage ou de polissage diminuent la limite de fatigue : une surface rugueuse peut abaisser la résistance à la fatigue de 15 à 20%.

Un autre facteur modifiant la limite de fatigue est la superposition à la contrainte alternée d’une contrainte moyenne σ_m constante (voir figure 6.9). Les diagrammes d’endurance (d’abscisse σ_m et d’or-

donnée σ_a , voir figure 6.11) permettent de prendre en compte les contraintes pour lesquelles σ_m est différente de zéro et sont issues des courbes de Wöhler. Une bonne approximation des points expérimentaux est la droite de Goodman-Smith :

$$\sigma_a = \sigma_D \left[1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right] \quad (6.14)$$

où R_m représente la limite à la rupture

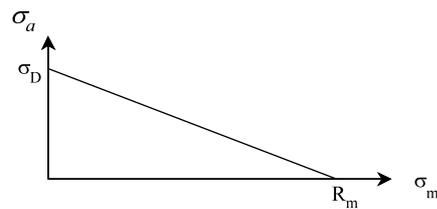


Figure 6.11 – Diagramme d'endurance de Goodman-Smith

La fréquence des contraintes cycliques a relativement peu d'influence sur la limite de fatigue. Les phénomènes de corrosion ou une élévation de la température peuvent également diminuer de façon très importante la limite de fatigue d'un matériau. Ainsi, on trouve des courbes d'évolution des caractéristiques matériaux en fonction de la température T (Figures 6.12).

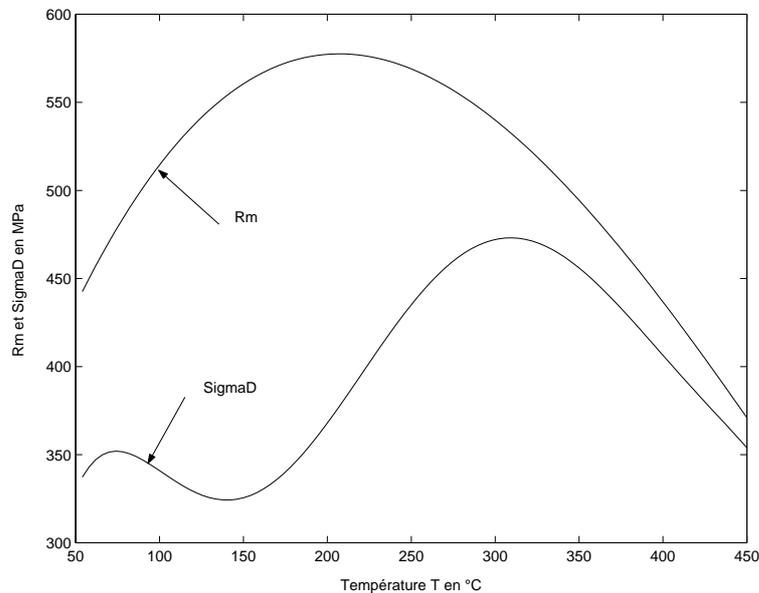


Figure 6.12 – Exemple de diagramme d'évolution des limites de rupture R_m et d'endurance σ_D selon la température

Enfin, d’une façon générale, les impuretés internes ou superficielles, les hétérogénéités locales, les gros grains et les tensions internes abaissent la résistance à la fatigue. Ainsi, dans la problématique des essais accélérés, nous utiliserons ces facteurs influents pour sévérer les conditions d’essai.

Cumul du dommage par fatigue

Toute pièce soumise à des contraintes cycliques subit une altération de ses propriétés mécaniques. Selon le niveau de contrainte et le nombre de cycles effectués, cette altération est partielle ou totale par la rupture de la pièce ([Lalanne, 1999], [Lemaitre and Chaboche, 1996]).

Ainsi, on définit un critère d’endommagement D (voir figure 6.13) représentant le degré de dommage subi par la pièce variant de 0% (à la mise en service) à 100% (correspondant à l’endommagement critique D_R au moment de la rupture). Il existe de nombreuses lois de cumul d’endommagement mais la plus utilisée est celle de Miner.

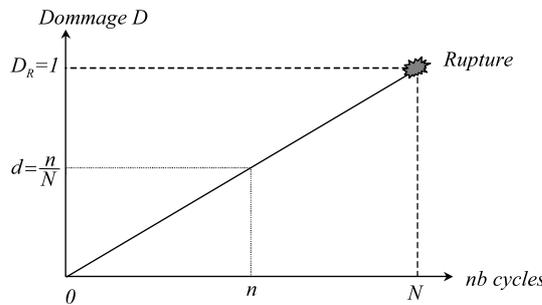


Figure 6.13 – Evolution du dommage jusqu’à rupture

Cette loi définit le dommage emmagasiné par la pièce à chaque cycle dépendant uniquement du niveau de contrainte σ . Pour n cycles, on appelle dommage partiel d au niveau de contrainte σ :

$$d = \frac{n}{N} \tag{6.15}$$

où N représente le nombre de cycles à rupture (voir figure 6.13) au niveau de contrainte σ .

Les dommages partiels d_i s’additionnent linéairement. Si on applique sur une pièce k contraintes σ_i pendant n_i cycles, le dommage cumulé D s’écrit :

$$D = \sum_{i=1}^k d_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \tag{6.16}$$

La figure 6.14 montre une application du cumul d’endommagement à la fatigue en considérant la courbe de Wöhler.

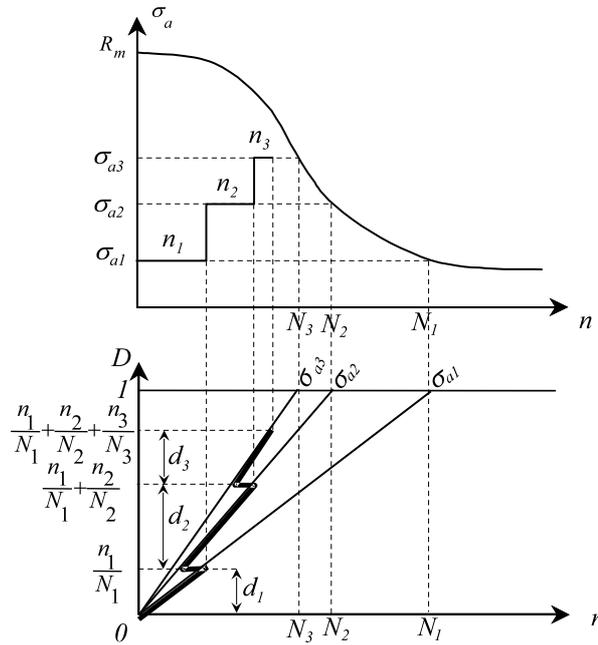


Figure 6.14 – Cumul d'endommagement appliqué à la fatigue

Dans le cas de la fatigue, on montre bien que le nombre de cycles à rupture est une variable aléatoire caractérisée par une loi normale (pour les $\log(N)$). Ainsi, le dommage critique D_R (voir figure 6.13), dépendant du nombre de cycles à rupture, est une variable aléatoire qui suit une loi normale (dans le cas de son application à la fatigue limitée) de moyenne 0,98 et d'écart type 0,3 ([Ford et al., 1961], [Lalanne, 1999]).

6.3.3 Etude des SVA en mécanique

En considérant l'application des SVA à la fatigue, la fonction de fiabilité $R_{s0}(n)$, avec n représentant le nombre de cycles, est définie par la loi suivante :

$$R_{s0}(n) = 1 - \phi \left(\log \left(\left(\frac{n}{\eta} \right)^\nu \right) \right) \quad (6.17)$$

avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale standard, ν et η les paramètres de loi.

Alors, pour un stress constant s , la loi de fiabilité, définie par la relation (6.13), s'écrit compte tenu de (6.17) :

$$R_s(n) = 1 - \phi \left(\log \left(\left(\frac{r(s) \cdot n}{\eta} \right)^\nu \right) \right) = 1 - \phi \left(\log \left(\left(\frac{e^{\beta T z} \cdot n}{\eta} \right)^\nu \right) \right)$$

soit

$$R_s(n) = 1 - \phi \left(\frac{\log(n) - \gamma^T z}{\sigma} \right) \quad (6.18)$$

où $\gamma^T = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)$, $\gamma_0 = \log(\eta) - \beta_0$, $\gamma_i = -\beta_i$ et $\nu = 1/\sigma$.

Nous retrouvons la définition d'une distribution normale. Rappelons que le modèle SVA est vérifié s'il existe une fonction r telle que :

$$\frac{d}{dt} f_{s(\cdot)}(t) = r[s(t)] \text{ avec } t = n \tag{6.19}$$

La fonction r représente physiquement le taux d'accroissement de la vitesse de dégradation. Dans le cas de la fatigue, cette fonction peut être déduite de l'endommagement.

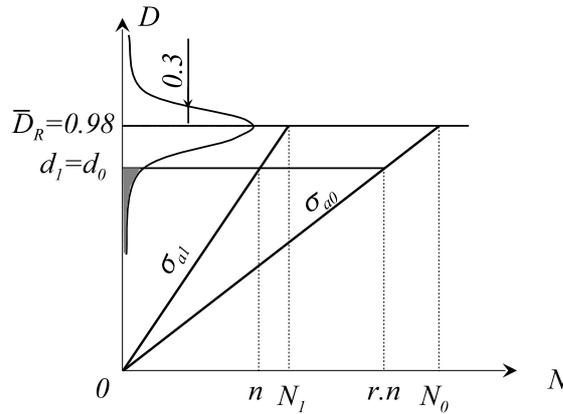


Figure 6.15 – Fonction de transfert dans le cas de la fatigue

Ainsi, considérons un test de 2 pièces à des niveaux de contraintes d'amplitude différents σ_{a0} et σ_{a1} de telle manière qu'à l'issue de celui-ci elles soient endommagées identiquement (respectivement d_0 et d_1 , voir figure 6.15). Pour respecter l'équivalence d'endommagement partiel ($d_1 = d_0$), la fonction r doit vérifier :

$$\frac{n}{N_1} = \frac{r.n}{N_0} \tag{6.20}$$

avec : N_0 et N_1 les nombres de cycles à rupture aux niveaux de contrainte σ_{a0} et σ_{a1} .
d'où

$$r = \frac{N_0}{N_1} \tag{6.21}$$

Si on considère le modèle de Basquin pour caractériser la courbe de Wöhler, l'endommagement partiel $d(\sigma_a)$ s'écrit :

$$d(\sigma_a) = \frac{n}{N} = \frac{n}{A(\sigma_a)^{-k}} \tag{6.22}$$

d'où la vitesse d'endommagement définie par

$$\dot{d}(\sigma_a) = \frac{d}{dn} d(\sigma_a) = \frac{1}{A} (\sigma_a)^k \tag{6.23}$$

Ainsi, la relation (6.21) s'écrit :

$$r(\sigma_{a1}) = \left(\frac{\sigma_{a1}}{\sigma_{a0}}\right)^k = \frac{\dot{d}(\sigma_{a1})}{\dot{d}(\sigma_{a0})} \tag{6.24}$$

Pour faire l'analogie avec ce qu'exprime Nikulin à propos de r , nous pouvons dire que ce terme correspond au taux d'accroissement de la vitesse d'endommagement sous conditions accélérées par rapport aux conditions nominales.

Ainsi, la loi de fiabilité $R_{\sigma_{a1}}(n)$, définie par la relation (6.18), s'écrit :

$$R_{\sigma_{a1}}(n) = 1 - \phi\left(\log\left(\left(\frac{r(\sigma_{a1}) \cdot n}{N_0}\right)^\nu\right)\right) = 1 - \phi\left(\log\left(\left(\frac{n}{N_1}\right)^\nu\right)\right) \tag{6.25}$$

avec $\eta = N_1$ représentant le nombre de cycles moyen à rupture sous la contrainte σ_{a1}

6.3.4 Définition d'un modèle de simulation

Dans la suite de l'article, nous allons appliquer les SVA à la fatigue dans le domaine d'endurance limitée (voir figure 6.10). Pour ce faire, nous avons besoin de simuler des résultats d'essai de fatigue et nous proposons de développer un modèle simplifié de simulation de fatigue. Celui-ci dépendra de 3 stress de sévérisation couramment utilisés : la température, la contrainte d'amplitude σ_a et la contrainte moyenne σ_m .

Le modèle proposé est basé sur celui de Basquin représenté en échelle bi-logarithmique par une droite permettant une construction simplifiée de la courbe de Wöhler à partir de 2 points caractéristiques ([Bompas-Smith, 1973], [Shigley., 1972]) :

Pour les aciers	Pour $N=10^3$ on a $\sigma_a=0,95R_m$	on a	Pour $N=10^7$ on a $\sigma_a=\sigma_D$ (données à recueillir dans les bases de données)
-----------------	---------------------------------------	------	--

Table 6.2 – Points caractéristiques de la courbe de Wöhler

Ainsi, connaissant 2 points de la courbe, on peut déduire les paramètres du modèle de Basquin.

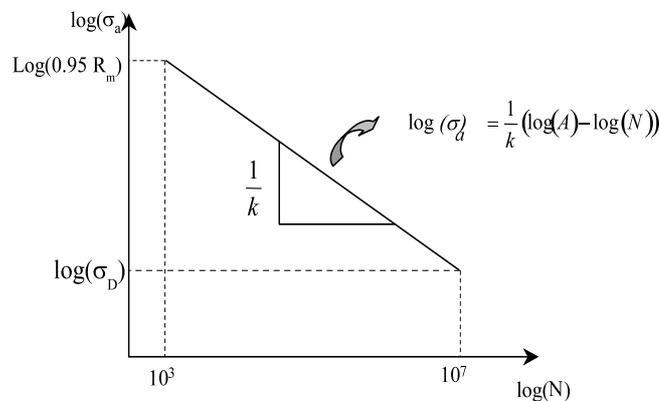


Figure 6.16 – Construction simplifiée de la courbe de Wöhler à partir du modèle de Basquin

Ainsi, cette représentation permet, par exemple pour les aciers, de déterminer le nombre de cycles d'endurance N pour une amplitude de contrainte σ_a choisie :

$$N = 1000 \left[\frac{0.95 Rm}{\sigma_a} \right] \left(\frac{4}{\text{Log}_{10} \left(\frac{0.95 Rm}{\sigma_D} \right)} \right) \quad (6.26)$$

Pour pouvoir intégrer la température dans le modèle, il faut que celle-ci soit inférieure au tiers de la température de fusion du métal afin d'éviter les phénomènes de fluage ([Lemaitre and Chaboche, 1996]).

La limite d'endurance varie selon la température mais également en fonction du profil de mission et plus précisément avec la contrainte moyenne. Ainsi, pour sévérer les essais, nous augmentons la contrainte moyenne σ_m , la contrainte d'amplitude σ_a et la fréquence (voir Figure 6.17).

Cette élévation a pour effet de diminuer la limite d'endurance σ_D . Il est indispensable que les ruptures dans les conditions sévérées soient obtenues pour des nombres de cycles supérieurs à 10^3 cycles (pour des raisons de validité de modèle).

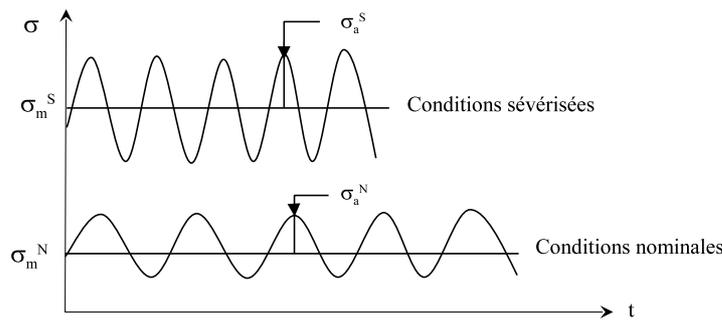


Figure 6.17 – Sévérification du cycle de contrainte

Ainsi, nous obtenons le modèle de simulation suivant permettant d'appliquer les modèles SVA à la fatigue :

$$N(\sigma_a, \sigma_m, T) = 1000 \left[\frac{(0.95 Rm(T)) - \sigma_m}{\sigma_a} \right] \left(\frac{4}{\text{Log}_{10} \left(\frac{0.95 Rm(T)}{\sigma_D(T, \sigma_m)} \right)} \right) \quad (6.27)$$

avec :

– $R_m(T) = 5.69179 \cdot 10^{-6} * T^3 - 8.42136 \cdot 10^{-3} * T^2 + 2.75626 * T + 3.17359 \cdot 10^2$ tirée de la courbe de la figure 6.12

– $\sigma_D(T) = -3.78 \cdot 10^{-12} * T^6 + 6.53 \cdot 10^{-9} * T^5 - 4.36 \cdot 10^{-6} * T^4 + 1.40 \cdot 10^{-3} * T^3 - 2.18 \cdot 10^{-1} * T^2 + 15.51 * T - 49.7$ tirée de la courbe de la figure 6.12

- $\sigma_D(T, \sigma_m) = \sigma_D(T) \left[1 - \frac{\sigma_m}{R_m(T)} \right]$ tirée de la relation (6.14) correspondant à la droite de Goodman-Smith

L'aspect statistique de la courbe de Wöhler sera défini en considérant un écart-type constant de la loi normale des $\log(N)$ sur le domaine de fatigue limitée. Lalanne [Lalanne, 1999] propose de considérer la valeur 0.2 pour les aciers.

6.4 Plan d'essai accéléré par régression

6.4.1 Définition du plan d'essai

Ce plan consiste à déterminer les paramètres de la fonction $r(s)$ à partir de résultats d'essais effectués uniquement dans des conditions sévères et de déduire par régression la loi de fiabilité en conditions nominales (Figure 6.18).

Ainsi, on réalise des essais dans les conditions sévères s_1, s_2, \dots, s_n et on déduit les paramètres β du modèle (6.13) permettant de caractériser la loi de fiabilité $R_{s0}(t)$.

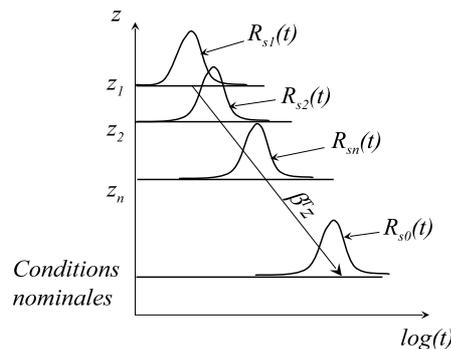


Figure 6.18 – Définition du plan d'essai par régression

Pour illustrer ce premier plan d'essai, nous allons considérer 3 types d'estimation de la fiabilité :

- paramétrique
- semi-paramétrique
- non paramétrique

6.4.2 Application des SVA paramétriques

L'estimation paramétrique d'un modèle SVA consiste à prendre une loi statistique particulière pour caractériser la fiabilité ([Bagdonavicius and Nikulin, 1995a], [Bagdonavicius and Nikulin, 1997], [Bagdonavicius and Nikulin, 2001], [Caruso and Dasgupta, 1998], [Bagdonavicius et al., 2000], [Vassilious and Mettas, 2001], [Hoang, 2003], [Tebbi et al., 2004b], [Tebbi et al., 2004c]).

Dans le cas de la fatigue, la loi plus appropriée pour caractériser la fiabilité est la loi normale (lorsque l'on considère la distribution des $\log(N)$) :

$$R_{s_0}(N) = 1 - \phi\left(\frac{\log(N) - \mu}{\sigma}\right) \quad (6.28)$$

où ϕ représente la fonction de répartition de la loi normale standard
 μ la moyenne
 σ l'écart type

Considérons un essai dans lequel on fixe la durée maximale d'expérience N_i (exprimé en nombre de cycle pour la fatigue) du i ème échantillon (de taille n_i) sous stress sévéré s_i (avec $i=1, \dots, k$ et $z^{(i)} = z_{i0}, \dots, z_{im}$) et m_i le nombre de défaillances.

Donc le modèle (6.13) devient :

$$R_s(N) = 1 - \phi\left(\frac{\log(N) - \gamma^T z}{\sigma}\right) \text{ avec } N > 0 \quad (6.29)$$

où $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_m)$ et $\gamma_0 = \log(\mu) - \beta_0$

La vraisemblance est définie par :

$$L(\gamma, \sigma) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log(N_{ij}) - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma}\right)^2} \times \left(1 - \phi\left(\frac{\log(N_i) - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma}\right)\right)^{n_i - m_i} \quad (6.30)$$

avec N_{ij} les nombres de cycles à rupture sous le stress s_i (j ième défaillance)

N_i le nombre de cycles de la censure sous le stress s_i

Par le maximum de vraisemblance [2], nous déduisons des estimateurs de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$R_{s_0}(N) = 1 - \phi\left(\frac{\log(N) - \hat{\gamma}^T z^{(0)}}{\hat{\sigma}}\right) \quad N > 0 \quad (6.31)$$

où $z^{(0)}$ représente le vecteur de stress dans les conditions nominales

6.4.3 Application des SVA semi paramétriques à la fatigue

La méthode semi-paramétrique consiste à ne faire aucune hypothèse de loi statistique de la fiabilité (voir [Bagdonavicius and Nikulin, 1995b], [Bagdonavicius and Nikulin, 1997], [Hoang, 2003], [Shyur et al., 1999]). Pour construire la fonction de fiabilité, nous considérons le taux de défaillance défini par le modèle de Cox :

$$\lambda(\log(N), z) = \lambda_0(\log(N)) e^{\beta^T z} \quad (6.32)$$

avec $\lambda_0(\log(N))$ le taux de défaillances dans les conditions nominales.

Ainsi, la fiabilité est définie par :

$$R_{s_0}(\log(N)) = e^{-\int_0^{\log(N)} \lambda(\eta, z) e^{-\beta^T z} d\eta} \quad (6.33)$$

L'estimation du vecteur β peut se faire indépendamment de celle de $\lambda_0(\log(N))$. Pour ce faire, on considère la vraisemblance partielle suivante :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^k \frac{e^{\beta^T z_i}}{\sum_{j \in S(\log(N_i))} e^{\beta^T z_j}} \quad (6.34)$$

où $S(\log(N_i))$, représente le nombre d'unités survivantes ou non censurées au moment $\log(N_i)$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons un estimateur $\hat{\beta}$.

Pour estimer le taux de défaillance de base $\lambda_0(N)$, nous considérons la construction de la loi de fiabilité dans les conditions sévériées à l'aide de l'estimateur Kaplan-Meier.

Notons $K_i(\eta)$ le nombre de défaillances observées du i ème échantillon dans l'intervalle $[0, \eta]$, et $S_i(\eta)$ le nombre de survivants avant le nombre de cycles η . N_{i1}, \dots, N_{imi} représentent les nombres de cycles à rupture du i ème échantillon sous stress s_i . (avec $m_i = K_i(\log(N_i))$).

La loi de fiabilité peut être construite par l'estimateur de Kaplan-Meier :

$$R_{s_i}(x, \beta) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\Delta K_i(\eta)}{S_i(\eta)} \right) \quad (6.35)$$

où $\Delta K_i(\eta) = K_i(\eta) - K_i(\eta-)$

Connaissant $R_s(\eta)$, il est possible d'estimer le taux de défaillance sous le stress s_i par :

$$\lambda_i(\eta, \beta) = \left(- \frac{\frac{dR_{s_i}(\eta, \beta)}{d\eta}}{R_{s_i}(\eta, \beta)} \right) \quad (6.36)$$

qui peut être approximée par :

$$\lambda_i(\eta, \beta) = \frac{R_{s_i}(\eta, \beta) - R_{s_i}(\eta - \Delta\eta, \beta)}{\Delta\eta R_{s_i}(\eta, \beta)} \quad (6.37)$$

où $R_{s_i}(\eta, \beta)$ et $R_{s_i}(\eta - \Delta\eta, \beta)$ représentent 2 valeurs successives décalées de $\Delta\eta$.

Finalement, nous pouvons déduire le taux de défaillance de base $\lambda_0(\eta)$:

$$\lambda_0(\log(N)) = \lambda_i(\log(N), z) e^{-\beta^T z^{(i)}} \quad (6.38)$$

Alors, la loi de fiabilité s'écrit

$$R_{s_0}(x, \beta) = e^{\sum_{(i,j):(1,1)}^{N_{ij} \leq x} \lambda_0(\log(N_{ij})) \Delta N_{ij}} \quad (6.39)$$

6.4.4 Application des SVA non paramétriques

Ce dernier cas consiste à ne faire aucune hypothèse de loi de fiabilité ([Basu and Ebrahimi, 1982], [Devarajan and Ebrahimi, 1998], [Bagdonavicius et al., 2000], [Tebbi et al., 2004b]). Pour ce faire, on construit la loi de fiabilité à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier. Notons $K_i(\eta)$ le nombre de défaillances observées du i ème échantillon dans l'intervalle $[0, \eta]$, et $S_i(\eta)$ le nombre de survivants avant le nombre de cycles η . N_{i1}, \dots, N_{imi} représentent les nombres de cycles à rupture du i ème échantillon sous stress s_i (avec $m_i = K_i(\log(N_i))$). Les variables aléatoires :

$$e^{\beta^T z_i} \log(N_{ij}) \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m_i)$$

peuvent être considérées comme des pseudo-ruptures observées dans un essai où $n = \sum_{i=1}^k n_i$ pièces avec la loi de fiabilité R_{s_0} ont été testées et $n_i - m_i$ parmi elles ont été censurées au moment $e^{\beta^T z_i} N_i$.

Soit le nombre total de défaillance dans l'intervalle $[0, \eta]$:

$$K(\eta, \beta) = \sum_{i=1}^k K_i(e^{-\beta^T z_i} \eta) \quad (6.40)$$

et le nombre total de survivants avant l'instant η :

$$S(\eta, \beta) = \sum_{i=1}^k S_i(e^{-\beta^T z_i} \eta) \quad (6.41)$$

La loi de fiabilité peut être construite par l'estimateur de Kaplan-Meier : pour tous $x \leq \max_i(e^{\beta^T z_i} \log(N_i))$

$$R_{s_0}(x, \beta) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\Delta K(\eta, \beta)}{S(\eta, \beta)} \right) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^k \Delta K_j(e^{-\beta^T z_j} \eta)}{\sum_{j=1}^k S_j(e^{-\beta^T z_j} \eta)} \right) \quad (6.42)$$

où $\Delta K(\eta, \beta) = K(\eta, \beta) - K(\eta-, \beta)$ et $\Delta K_j(\eta, \beta) = K_j(\eta) - K_j(\eta-)$

La fonction de vraisemblance est définie par :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{m_i} \left[R_{s_0}(e^{\beta^T z_i} \log(N_{ij-}), \beta) - R_{s_0}(e^{\beta^T z_i} \log(N_{ij}), \beta) \right] \times \left(R_{s_0}(e^{\beta^T z_i} \log(N_i), \beta) \right)^{n_i - m_i} \quad (6.43)$$

en approximant la fonction densité $f_{s_0} = -R_{s_0}'$ inconnue par :

$$R_{s_0}(e^{\beta^T z_i} \log(N_{ij-}), \beta) - R_{s_0}(e^{\beta^T z_i} \log(N_{ij}), \beta) \quad (6.44)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous obtenons une estimation de $\hat{\beta}$ permettant de construire la loi de fiabilité dans les conditions nominales.

6.4.5 Exemple par simulation d'un essai de fatigue

6.4.5.1 Exemple d'application d'un modèle paramétrique

Pour illustrer le modèle paramétrique, nous allons considérer l'exemple d'une sévèrisation par la température T et la contrainte d'amplitude σ_a . Les paramètres de simulation sont donnés dans le tableau 6.3.

	température °C	σ_a en MPa	R_m en MPa	σ_D en MPa	Moyenne μ (tirée de eq (6.27))	$\log(\mu)$	Ecart- type
conditions nominales	50	330	435	330	9,41E+06	6,97	0,2
essai 1	100	400	514	341	1,68E+05	5,23	0,2
essai 2	100	450	514	341	8,26E+03	3,92	0,2
essai 3	200	400	577	368	1,45E+06	6,16	0,2
essai 4	200	450	577	368	9,59E+04	4,98	0,2

Table 6.3 – Paramètres de simulation

A partir de ces paramètres, nous simulons des valeurs de $\log(N_{ij})$ avec les distributions normales suivantes :

- essai 1 : $\log(N_{1j})$ selon $N(5.23, 0.2)$
- essai 2 : $\log(N_{2j})$ selon $N(3.92, 0.2)$
- essai 3 : $\log(N_{3j})$ selon $N(6.16, 0.2)$
- essai 4 : $\log(N_{4j})$ selon $N(4.98, 0.2)$

Les résultats de simulation sont donnés dans le tableau 6.4.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
essai1	4,86	5,05	5,06	5,07	5,08	5,15	5,17	5,18	5,19	5,19	5,23	5,24	5,33	5,36	5,37	5,37	5,45	5,52	5,63	5,80
essai2	3,71	3,72	3,78	3,80	3,83	3,88	3,93	3,94	3,95	3,99	3,99	4,00	4,01	4,06	4,07	4,10	4,12	4,16	4,22	4,30
essai3	5,59	5,73	5,78	5,88	5,94	6,00	6,03	6,06	6,09	6,10	6,13	6,14	6,16	6,19	6,26	6,33	6,38	6,40	6,43	6,64
essai4	4,54	4,60	4,63	4,74	4,87	4,88	4,88	4,91	4,93	4,95	5,02	5,02	5,07	5,07	5,08	5,16	5,18	5,29	5,37	45,50

Table 6.4 – Résultats de simulation

Des 4 séries d'essais simulés, nous pouvons tracer les droites d'Henry.

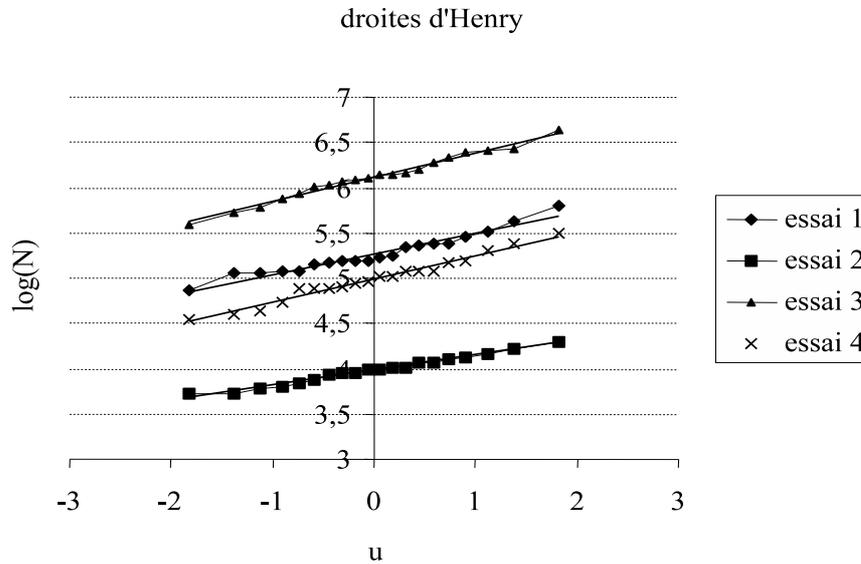


Figure 6.19 – Droites d'Henry des 4 séries d'essai

Nous choisissons un modèle d'Eyring (pour plus de détail voir l'Annexe A.4) pour caractériser la fonction $r(s)$ dépendant des stress température T et contrainte d'amplitude σ_a :

$$r(T, \sigma_a) = e^{\beta_0 - \log(T) + \beta_1 \frac{1}{T} + \beta_2 \sigma_a + \beta_3 \frac{\sigma_a}{T}}$$

En considérant une loi normale pour caractériser la fonction de fiabilité, nous obtenons par le maximum de vraisemblance les résultats suivants pour le vecteur β et l'écart type σ :

- $\hat{\beta}_0 = 2904,33$
- $\hat{\beta}_1 = 5513,53$
- $\hat{\beta}_2 = 0,02$
- $\hat{\beta}_3 = -17,76$
- $\hat{\sigma} = 0,22$

D'où la moyenne en conditions nominales :

$$\mu^{(0)} = e^{2904,33 - \log(273+50) + 5513,53 \frac{1}{273+50} + 0,02 \cdot 330 - 17,76 \frac{330}{273+50}} = 7,36$$

Ainsi, nous pouvons définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales (figure 6.20).

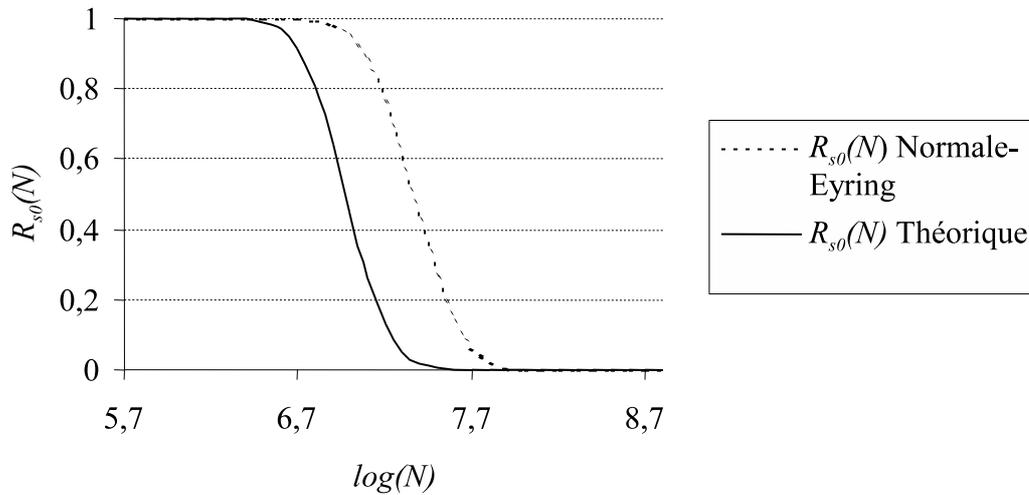


Figure 6.20 – Loi de fiabilité par le modèle paramétrique

Nous avons appliqué ce plan sur un exemple concret en étudiant la tenue à la déformation d'un trombone papier (voir l'article intitulé "Estimation de la fiabilité par les essais accélérés" en annexe B.2)

6.4.5.2 Exemple d'application d'un modèle semi paramétrique

Pour illustrer les modèles semi paramétriques, nous allons considérer seulement la contrainte d'amplitude comme stress de sévèrisation. Les paramètres de simulation sont les suivants :

	température °C	σ_a en MPa	R_m en MPa	σ_D en MPa	Moyenne μ tirée de eq 6.27	$\log(\mu)$	écart type
conditions nominales	50	330	435	330	9,41E+06	6,97	0,2
essai 1	50	335	435	330	5,10E+06	6,71	0,2
essai 2	50	340	435	330	2,79E+06	6,45	0,2

Table 6.5 – Paramètres de simulation

A partir de ces paramètres, nous simulons des valeurs de $\log(N_{ij})$ avec les distributions normales suivantes :

- essai 1 : $\log(N_{1j})$ selon $N(6.71, 0.2)$
- essai 2 : $\log(N_{2j})$ selon $N(6.45, 0.2)$

Les résultats de simulation sont donnés dans le tableau 6.6.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
essai1	6,8	6,2	6,8	6,6	6,4	6,8	6,6	6,4	6,9	7,0	6,3	7,0	6,7	7,0	7,0	7,0	6,5	6,9	7,1	6,9
essai2	6,4	6,1	6,6	6,2	6,3	6,4	6,5	6,4	6,5	6,3	6,6	6,4	6,3	6,4	6,4	6,7	6,7	6,5	6,6	5,9

Table 6.6 – Résultats de simulation

Pour le modèle semi paramétrique, nous considérons un modèle puissance inverse (pour plus de détail voir annexe A.3) pour caractériser le taux de défaillance (eq 6.46) :

$$e^{\beta^T z} = e^{\beta_0 + \beta_1 \log(\sigma_a)}$$

Par le maximum de vraisemblance partielle (eq 6.48) nous estimons le vecteur β :

- $\hat{\beta}_0 = 6,9$
- $\hat{\beta}_1 = - 0,91$

Par l'estimateur de Kaplan-Meier nous déduisons les fonctions de fiabilité sous les 2 niveaux de contraintes d'amplitude (eq 6.51). Cela nous permet d'estimer les taux de défaillance sous les 2 niveaux de stress et de déduire le taux de défaillance de base par l'équation (eq 6.55). Ensuite, nous construisons la fonction de fiabilité dans les conditions nominales (eq 6.56 et voir figure 6.21).

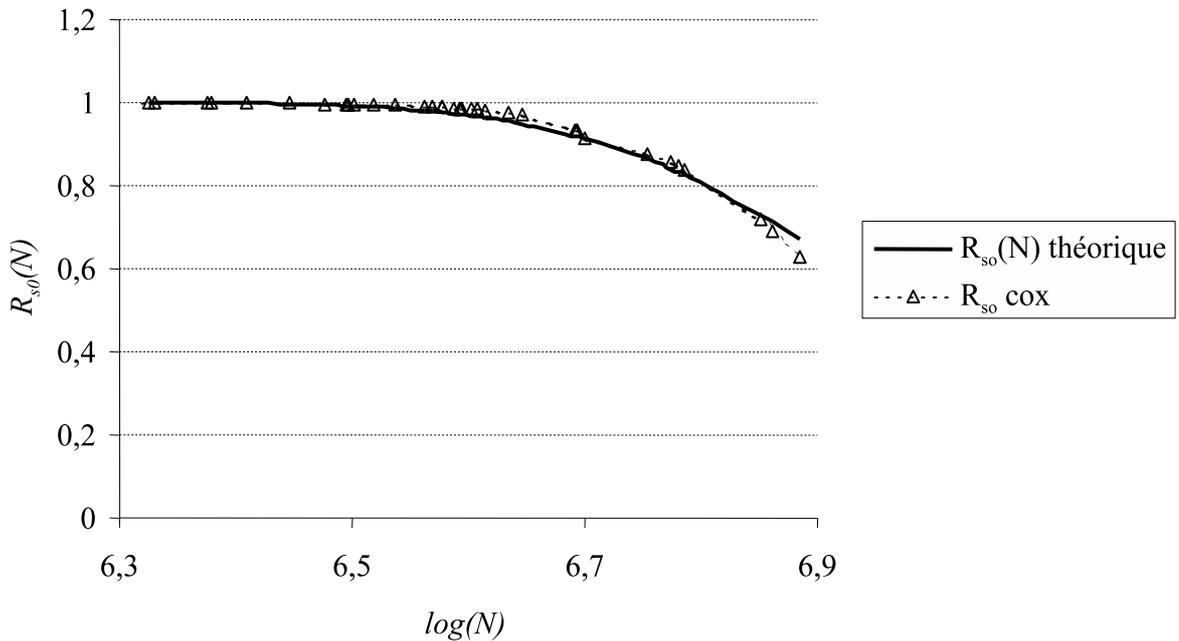


Figure 6.21 – Loi de fiabilité par le modèle semi paramétrique

Nous trouvons une bonne adéquation du modèle semi-paramétrique (modèle de Cox) par rapport à la distribution théorique (ayant servie à générer les valeurs aléatoires $\log(N_{ij})$). Par contre la fonction de fiabilité est connue que partiellement et le modèle utilisé ne permet pas d'extrapoler. Il existe un modèle généralisé ([Bagdonavicius and Nikulin, 1995b], [Hoang, 2003], [Shyur et al., 1999]...) permettant

l'extrapolation :

$$\lambda(t, z) = \lambda_0(t e^{\beta^T z}) e^{\alpha^T z}$$

6.4.5.3 Exemple d'application d'un modèle non paramétrique.

Nous considérons les mêmes données de simulation que dans l'exemple précédent (tableau 6.6). Pour le modèle non paramétrique, nous considérons également un modèle puissance inverse pour la loi de fiabilité :

$$e^{\beta^T z} = e^{\beta_0 + \beta_1 \log(\sigma_a)}$$

Nous construisons la loi de fiabilité dans les conditions nominales par l'estimateur de Kaplan-Meier (eq 6.42) et nous déduisons par le maximum de vraisemblance (eq 6.45) le vecteur β :

- $\hat{\beta}_0 = -17,3$
- $\hat{\beta}_1 = 2,95$

Finalement, nous obtenons la loi de fiabilité dans les conditions nominales (voir figure 6.22).

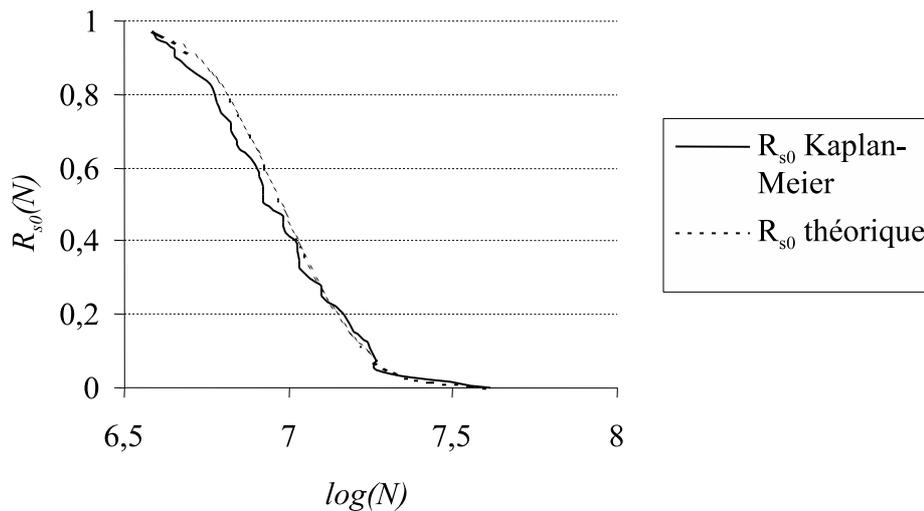


Figure 6.22 – Loi de fiabilité par le modèle semi paramétrique

Nous avons appliqué ce plan sur un exemple concret en étudiant la tenue à la déformation d'un trombone papier (voir l'article intitulé "Estimation de la fiabilité par les essais accélérés" en annexe B.2)

Analyse des résultats Nous constatons une bonne adéquation des modèles paramétriques, semi-paramétrique et non paramétriques avec les distributions théoriques. Toutefois, ce type de plan d'essai par régression nécessite une bonne connaissance de la fonction $r(s)$ ce qui n'est pas toujours évident surtout dans les cas où de nombreuses variables sont utilisées pour sévérer les essais. Par conséquent, cela impose de réaliser des essais avec différentes combinaisons de niveaux de stress afin d'estimer les paramètres de $r(s)$. De plus, les niveaux de stress retenus pour réaliser les essais sont relativement élevés

par rapport aux conditions nominales et les différentes estimations sont entachées d'incertitude. Cela provoque par régression une plus grande incertitude sur l'estimation de la loi de fiabilité dans les conditions nominales (voir figure 6.23).

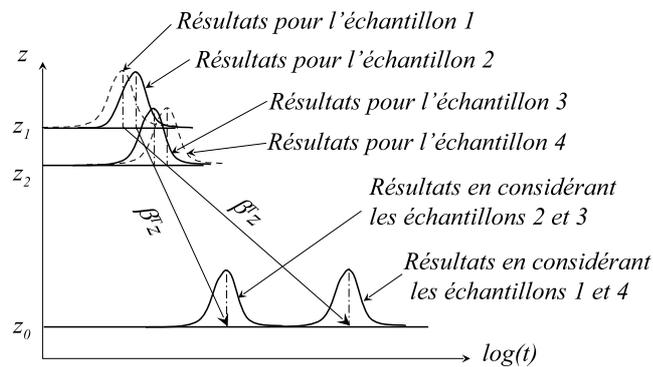


Figure 6.23 – Exemple de propagation d'incertitude

6.5 Plan d'essai avec endommagement préalable accéléré

6.5.1 Définition du plan d'essai

Dans les paragraphes précédents, nous avons montré les difficultés de mener un essai accéléré par régression à l'aide des modèles classiques. Nikulin et Bagdonavicius présentent, dans [Bagdonavicius et al., 2000], une alternative en partant du principe que pour les systèmes hautement fiables la plupart des défaillances se produiront après un nombre de cycles N_2 importants. Il propose de procéder par un essai avec 2 groupes de composants. Le premier groupe sera testé sous un stress sévéré s_1 et le deuxième sous un stress échelonné : sous le stress s_1 jusqu'au nombre de cycles $N_1 < N_2$ et sous stress nominal s_0 . Les pièces soumises au stress s_1 emmagasineront beaucoup d'endommagement jusqu'au nombre de cycles N_1 permettant d'obtenir des défaillances dans l'intervalle $[N_1, N_2]$.

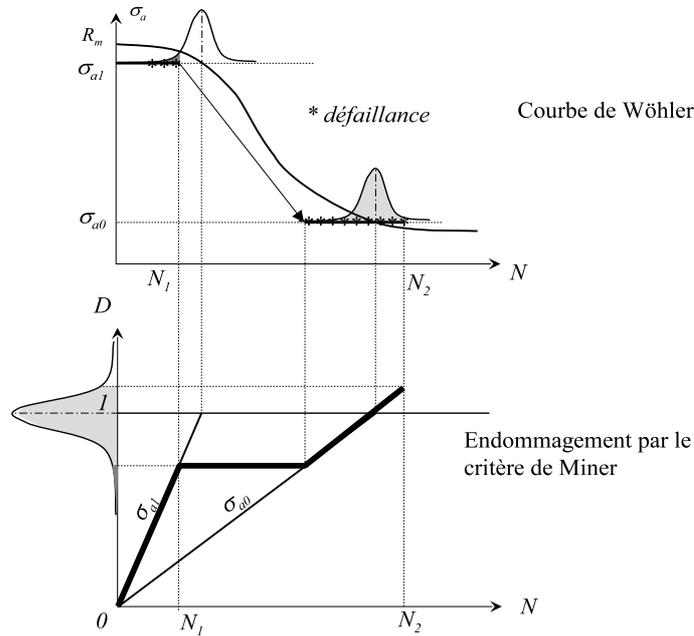


Figure 6.24 – Définition du plan d’essai avec endommagement préalable

Dans ce plan d’essai, il n’est pas nécessaire de paramétrer la fonction $r(s)$. Si le premier échantillon est testé sous le stress s_1 et le deuxième selon le profil de stress suivant :

$$s_2(\eta) = \begin{cases} s_1 & \text{si } 0 \leq \eta \leq N_1 \\ s_0 & \text{si } N_1 < \eta \leq N_2 \end{cases}$$

Alors le modèle (6.13) implique que

$$R_{s_1}(\eta) = R_{s_0}(r\eta) \tag{6.45}$$

et

$$R_{s_2}(\eta) = \begin{cases} R_{s_0}(r\eta) & 0 \leq \eta \leq N_1 \\ R_{s_0}(r \log(N_1) + \eta - \log(N_1)) & N_1 \leq \eta \leq N_2 \end{cases} \tag{6.46}$$

La figure suivante illustre la méthode (avec $f_{s_1} = -R_{s_1}'$, $f_{s_2} = -R_{s_2}'$ et $f_{s_0} = -R_{s_0}'$).

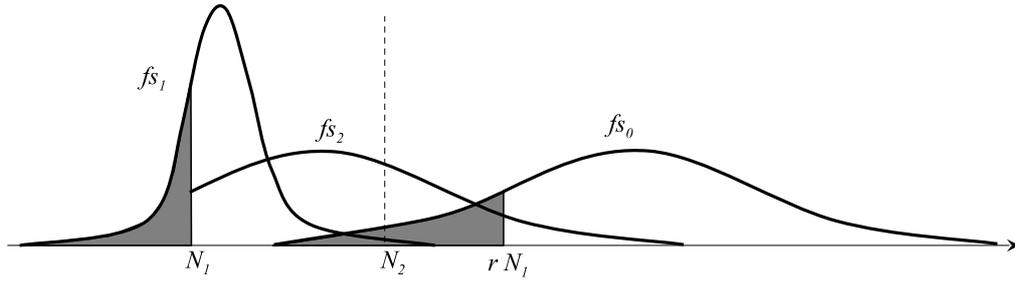


Figure 6.25 – Définition du plan d’essai

Les 2 paragraphes suivants présentent l’application de ce plan d’essai, proposé par Bagdonavicius et Nikulin ([Bagdonavicius et al., 2000], [Tebbi et al., 2004b], [Tebbi et al., 2004c]), dans les cas :

- paramétrique
- non paramétrique

6.5.2 Application du modèle SVA paramétrique

Le premier échantillon de taille n_1 est testé sous stress sévéré s_1 et on obtient les nombres de cycles à rupture aux instants : N_{11}, \dots, N_{1n_1} . Le deuxième échantillon, de taille n_2 , est testé sous le stress échelonné suivant :

$$s_2(\eta) = \begin{cases} s_1 & \text{si } 0 \leq \eta \leq N_1 \\ s_0 & \text{si } N_1 < \eta \leq N_2 \end{cases}$$

Nous obtenons un échantillon censuré des nombres de cycles à rupture N_{21}, \dots, N_{2m_2} (avec $m_2 \leq n_2$) dont k_2 défaillances sous le stress s_1 , $m_2 - k_2$ défaillances sous le stress s_0 et $n_2 - m_2$ systèmes survivants à l’issue de N_2 cycles.

Supposons que les $\log(N)$ suivent une loi normale :

$$R_{s_0}(\log(N)) = 1 - \phi\left(\frac{\log(N) - \mu}{\sigma}\right) \tag{6.47}$$

où ϕ représente la fonction de répartition de la loi normale standard

μ la moyenne

σ l’écart type

Donc le modèle (6.13) peut être écrit :

$$R_s(\log(N)) = R_{s_0}(r \cdot \log(N)) = 1 - \phi\left(\frac{r \cdot \log(N) - \mu}{\sigma}\right) \tag{6.48}$$

Ainsi, on obtient

$$R_{s_1}(\log(N)) = 1 - \phi\left(\frac{r \cdot \log(N) - \mu}{\sigma}\right) \tag{6.49}$$

$$R_{s_2}(\log(N)) = 1 - \phi\left(\frac{r \cdot \log(N_1) + \log(N) - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right) \tag{6.50}$$

La vraisemblance est définie par :

$$L(r, \mu, \sigma) = \prod_{i=1}^{n_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r \cdot \log(N_{1i}) - \mu}{\sigma}\right)^2} \prod_{j=1}^{k_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r \cdot \log(N_{2j}) - \mu}{\sigma}\right)^2} \prod_{l=k_2+1}^{m_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r \cdot \log(N_1) + \log(N_{2l}) - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right)^2} \times \left(1 - \phi\left(\frac{r \cdot \log(N_1) + \log(N_2) - \log(N_1) - \mu}{\sigma}\right)\right)^{n_2 - m_2} \quad (6.51)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons des estimateurs de \hat{r} , $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$R_{s_0}(\log(N)) = 1 - \phi\left(\frac{\log(N) - \mu}{\hat{\sigma}}\right) \text{ avec } N > 0 \quad (6.52)$$

6.5.3 Application du modèle SVA non paramétrique

Ce dernier cas consiste à ne faire aucune hypothèse de loi de fiabilité. Pour cela, on construit la loi de fiabilité à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier.

Le premier échantillon de taille n_1 est testé sous stress sévéré s_1 et on obtient les nombres de cycles à rupture aux instants : N_{11}, \dots, N_{1n_1} . Le deuxième échantillon, de taille n_2 , est testé sous le stress s_1 jusqu'au nombre de cycles N_1 et ensuite sous le stress s_0 jusqu'à N_2 . Ainsi, nous obtenons un échantillon censuré des nombres de cycles à rupture N_{21}, \dots, N_{2m_2} (avec $m_2 \leq n_2$) dont k_2 défaillances sous le stress s_1 , $m_2 - k_2$ défaillances sous le stress s_0 et $n_2 - m_2$ systèmes survivants à l'issue de N_2 cycles.

Le modèle (6.13) implique que

$$R_{s_1}(\eta) = R_{s_0}(r \cdot \eta) \text{ et } \begin{cases} R_{s_2}(\eta) = R_{s_0}(r \cdot \eta) \text{ pour } \eta \leq \log(N_1) \\ R_{s_2}(\eta) = R_{s_0}(r \cdot \log(N_1) + \eta - \log(N_1)) \text{ pour } \eta \geq \log(N_1) \end{cases}$$

où η représentant l'instant en échelle logarithmique.

Les nombres de cycles $r \cdot N_{2i}$ (avec $i \leq k_2$) et $r \cdot N_{1i}$ peuvent être interprétés comme des moments de défaillance obtenus dans un essai pendant lequel $n_1 + n_2$ systèmes de fonction de fiabilité R_{s_0} ont été observés, $r \cdot N_2$ correspondant à l'instant où ont lieu les $n_2 - m_2$ censures du second échantillon (sous la loi R_{s_0}).

Notons :

- $K_1(l)$ le nombre de défaillances observées du premier échantillon dans l'intervalle $[0, l]$,
- $K_2(l)$ le nombre de défaillances observées du deuxième échantillon dans l'intervalle $[0, l]$,
- $S_1(l)$ le nombre de survivants du premier échantillon avant l'instant l ,
- $S_2(l)$ le nombre de survivants du deuxième échantillon avant l'instant l (y compris les $n_2 - m_2$ systèmes censurés).

Soit le nombre total de défaillance dans l'intervalle $[0, \eta]$ (η représentant toujours l'instant en échelle logarithmique) :

$$\begin{cases} K(\eta) = K_1\left(\frac{\eta}{r}\right) + K_2\left(\frac{\eta}{r}\right) \text{ pour } \eta \leq \log(N_1) \\ K(\eta) = K_1\left(\frac{\eta}{r}\right) + K_2\left(r \cdot \log(N_1) + \eta - \log(N_1)\right) \text{ pour } \eta > \log(N_1) \end{cases} \quad (6.53)$$

et le nombre total de survivants avant l’instant η :

$$\begin{cases} S(\eta) = S_1\left(\frac{\eta}{r}\right) + S_2\left(\frac{\eta}{r}\right) & \text{pour } \eta \leq \log(N1) \\ S(\eta) = S_1\left(\frac{\eta}{r}\right) + S_2(r \cdot \log(N1) + \eta - \log(N1)) & \text{pour } \eta > \log(N1) \end{cases} \quad (6.54)$$

La loi de fiabilité peut être construite par l’estimateur de Kaplan-Meier :

$$R_{s_0}(x, r) = \prod_{\eta \leq x} \left(1 - \frac{\Delta K(\eta)}{S(\eta)}\right) \quad (6.55)$$

où $\Delta K(\eta) = K(\eta) - K(\eta-)$

La fonction de vraisemblance est définie par :

$$\begin{aligned} L(r) = & \prod_{i=1}^{n_1} [R_{s_0}([r \cdot \log(N_{1i})] - r) - R_{s_0}(r \log(N_{1i}), r)] \prod_{j=1}^{k_2} [R_{s_0}([r \log(N_{2j})] - , r) - R_{s_0}(r \log(N_{2j}), r)] \\ & \prod_{l=k_2+1}^{m_2} [R_{s_0}([r \log(N_1) + \log(N_{2l}) - \log(N_1)] - r) - R_{s_0}([r \log(N_1) + \log(N_{2l}) - \log(N_1)], r)] \\ & [R_{s_0}([r \log(N_1) + \log(N_2) - \log(N_1)], r)]^{n_2 - m_2} \end{aligned} \quad (6.56)$$

en approximant la fonction densité $f_{s_0} = -R_{s_0}'$ inconnue par :

$$R_{s_0}(\eta-, r) - R_{s_0}(\eta, r) \quad (6.57)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous obtenons une estimation de \hat{r} permettant de construire la loi de fiabilité dans les conditions nominales.

6.5.4 Exemple par simulation

Pour illustrer ce plan d’essai, nous allons considérer l’exemple d’une sévérisation par la température T et la contrainte d’amplitude σ_a . Les paramètres de simulation sont donnés dans le tableau 6.7 permettant de tirer aléatoirement des nombres de cycles à rupture selon le modèle 6.27.

	température °C	Contrainte d’amplitude σ_a en MPa	Limite à la rupture R_m en MPa	Limite d’endurance σ_D en MPa	Moyenne \bar{N} tirée de l’équation (6.27)	$\mu = \log(\bar{N})$	Ecart-type σ proposé par Lalanne [Lalanne, 1999]
conditions nominales s_0	50	330	435	330	9,41E+06	6,97	0,2
conditions sévérisées s_1	200	450	577	368	9,59E+04	4,98	0,2

Table 6.7 – Paramètres de simulation

La simulation consiste à reproduire le plan d’essai étudié de la manière suivante :
 échantillon 1 : 20 valeurs de $\log(N_{1i})$ tirées selon la loi normale $N(4,98 ; 0,2)$ caractéristique des conditions sévérisées,

échantillon 2 : 20 valeurs de $\log(N_{2i})$ tirées selon la loi normale $N(4,98 ; 0,2)$ jusqu'à $\log(N_1)=5$ et selon la loi $N(6,97 ; 0,2)$ pour les suivantes.

A l'issue de la simulation, nous traitons les données en considérant les modèles paramétrique et non paramétrique :

pour le modèle paramétrique, la fonction de fiabilité est caractérisée par une loi normale, les estimateurs μ , σ et r sont évalués par le maximum de vraisemblance (eq (6.51))

pour le modèle non paramétrique, la loi de fiabilité dans les conditions nominales est construite à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier (eq (6.54)) et l'estimation de r est évaluée par le maximum de vraisemblance (eq (6.56)).

Cette simulation est répétée 50 fois permettant de calculer la moyenne et l'écart-type sur chacun des estimateurs (voir le tableau 6.8).

		Moyenne sur 50 simulations	Ecart-type sur 50 simulations
Estimation paramétrique	μ	6,9687	0,015
	σ	0,2136	0,0061
	r	1,4048	0,0142
Estimation non paramétrique	r	1,3885	0,0584

Table 6.8 – Résultats des simulations

A la fin de chaque simulation, nous traçons la fonction de fiabilité $R_{s0}(\log(N))$ dans les conditions nominales dans les cas paramétrique (Figure 6.26) et non paramétrique (Figure 6.27).

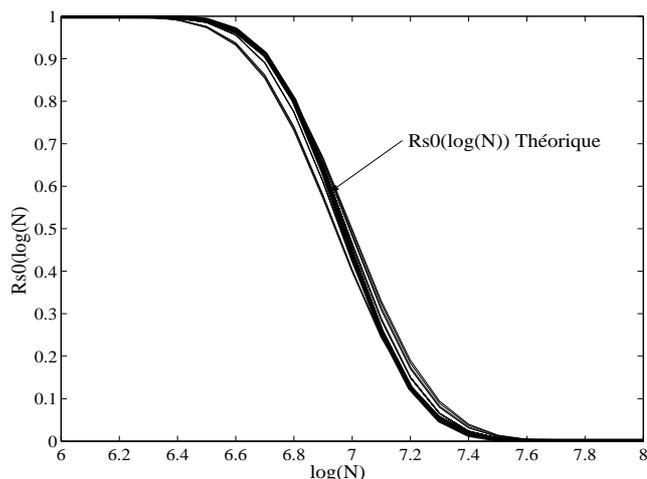


Figure 6.26 – Exemples d'application du modèle paramétrique

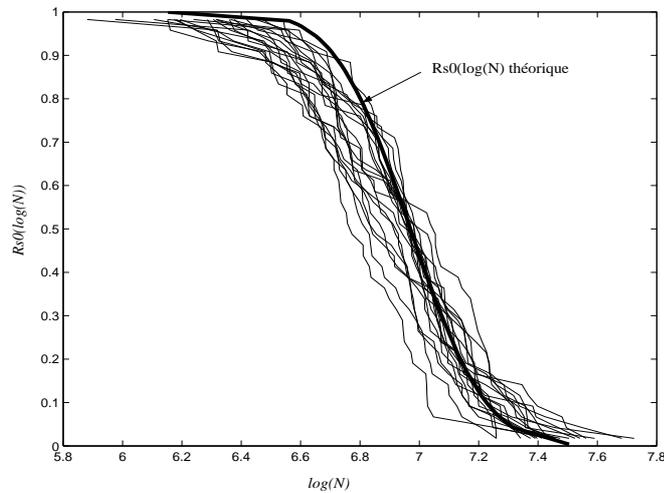


Figure 6.27 – Exemples d'application du modèle non paramétrique

Nous pouvons observer que les estimations par les 2 modèles sont correctes. Nous avons appliqué ce plan sur un exemple concret en étudiant la tenue à la déformation d'un trombone papier (voir l'article intitulé "Estimation de la fiabilité par les essais accélérés" en annexe B.2)

analyse Nous constatons une bonne adéquation des modèles paramétriques et non paramétriques avec la distribution théorique. Ce plan d'essai est très séduisant car il nécessite une faible paramétrisation de la fonction r qui peut être source d'erreur. On montre à travers ces quelques exemples l'intérêt à utiliser ce plan d'essai avec un endommagement préalable permettant d'obtenir de bons résultats. Néanmoins, dans cette étude, nous avons considéré que le paramètre de forme de la loi de fiabilité est constant quel que soit le niveau de stress. Or, en mécanique ce n'est pas toujours le cas. Notre étude se poursuit donc en intégrant ce dernier paramètre (thèse de Pascal Lantieri).

6.6 Plan d'essai en contraintes échelonnées

6.6.1 introduction

Une des difficultés pratiques dans le plan par régression, que nous avons vu précédemment, est de choisir correctement les niveaux de stress de sévrisation. En effet, s'ils sont choisis trop sévères, on risque de changer de mode de défaillance ou de provoquer des erreurs de régression trop importantes. Aussi, le plan d'essai en contraintes échelonnées a été proposé consistant à augmenter progressivement les niveaux de stress afin de précipiter plus rapidement les défaillances. On trouve de nombreux travaux comme : [Nelson, 1990], [Hoang, 2003], [Bai et al., 1989], [Linn, 1998b], [Linn, 1998a], [Devarajan and Ebrahimi, 1998], [Xiong, 1999], [Xiong and Milliken, 1999], [Tang et al., 1996], [Khamis and Higgins, 1996], [Yeo and Tang, 1999], [Bagdonavicius and Nikulin, 2002][Barton, 1994]. Dans le cadre de la thèse de Pascal Lantieri, nous l'avons appliqué aux systèmes mécaniques et à l'analyse des temps de défaillance obtenus lors d'un essai HALT imputable à une cause de fiabilité (voir le chapitre de livre intitulé "Applying accelerated life models to HALT testing" se trouvant en Annexe B.3).

6.6.2 Définition du plan d’essai

Considérons le plan d’essai où l’échantillon est testé selon le profil de stress suivant :

$$s(\tau) \begin{cases} s_1, & 0 \leq \tau < t_1; \\ s_2, & t_1 \leq \tau < t_2; \\ \dots, & \dots; \\ s_m, & t_{m-1} \leq \tau < t_m. \end{cases}$$

Alors le modèle 6.13 implique que :

$$R_{s(\cdot)} = R_{s_0} (r(s(\tau)) \cdot \tau) \tag{6.58}$$

Soit

$$R_{s(\cdot)} = R_{s_i} (\tau - t_{i-1} + t_{i-1}^*) \tag{6.59}$$

où $t_{i-1}^* = R_{s_i}^{-1}(R_{s_{i-1}}(t_{i-1} - t_{i-2} + t_{i-2}^*))$

La figure 6.28 suivante représente le principe de l’essai.

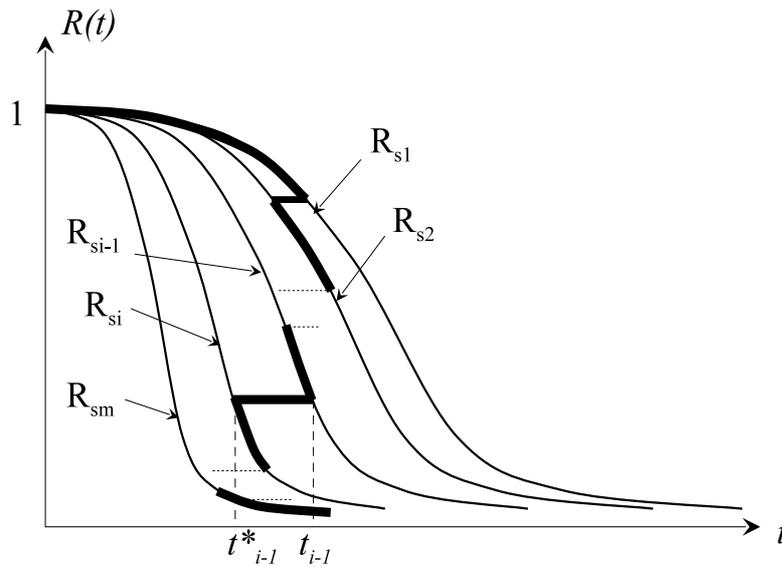


Figure 6.28 – Changement de loi de fiabilité en fonction du niveau de stress

6.6.3 Application du modèle SVA paramétrique en contraintes échelonnées à la fatigue

Supposons que les $\log(N)$ suivent une loi normale :

$$R_{s_0}(N) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N) - \mu}{\sigma} \right) \tag{6.60}$$

où ϕ représente la fonction de répartition de la loi normale standard, μ la moyenne et σ l’écart type.

L'échantillon de taille n est testé sous les stress échelonnés suivants :

$$s(\eta) \begin{cases} s_1, & 0 \leq \eta < \log(N_1); \\ s_2, & \log(N_1) \leq \eta < \log(N_2); \\ \dots, & \dots; \\ s_m, & \log(N_{m-1}) \leq \eta < \log(N_m). \end{cases}$$

Nous obtenons les nombres de cycles à rupture aux instants N_{ij} (j -ième défaillance) avec m_i défaillances au niveau de stress s_i et k défaillances au total à la fin de l'essai..

Donc le modèle 6.13 peut être écrit :

$$R_s(\log(N)) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N) - \gamma^T z}{\sigma} \right) \quad (6.61)$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} R_{s_1}(\log(N_{1j})) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N_{1j}) - \gamma^T z^{(1)}}{\sigma} \right) \\ R_{s_2}(\log(N_{2j})) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N_1)^* + \log(N_{2j}) - \log(N_1) - \gamma^T z^{(2)}}{\sigma} \right) \\ \dots \\ R_{s_i}(\log(N_{ij})) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N_{i-1})^* + \log(N_{ij}) - \log(N_{i-1}) - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma} \right) \end{cases} \quad (6.62)$$

où $\log(N_1)^* = R_{s_2}^{-1}(R_{s_1}(\log(N_1)))$ et $\log(N_{i-1})^* = R_{s_i}^{-1}(R_{s_{i-1}}(\log(N_{i-1}) - \log(N_{i-2}) + \log(N_{i-2})^*))$

La vraisemblance est définie par :

$$\begin{aligned} L(\gamma, \sigma) &= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^{k_i} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(N_{i-1})^* + \log(N_{ij}) - \log(N_{i-1}) - \gamma^T z^{(i)}}{\sigma} \right)^2} \\ &\times \left(1 - \phi \left(\frac{\log(N_{m-1})^* + \log(N_m) - \log(N_{m-1}) - \gamma^T z^{(m)}}{\sigma} \right) \right)^{n-k} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons des estimateurs de $\hat{\gamma}$ et $\hat{\sigma}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$R_{s_0}(\log(N)) = 1 - \phi \left(\frac{\log(N) - \hat{\gamma}^T z^{(0)}}{\hat{\sigma}} \right) \text{ avec } N > 0 \quad (6.64)$$

6.6.4 Exemple numérique :

Pour cet exemple, nous considérons un composant mécanique soumis à la fatigue. On souhaite déterminer la loi de fiabilité en condition normale d'utilisation où la contrainte d'amplitude est de 330 MPa. Pour ce faire, nous allons simuler un essai accéléré sous chargement en escalier en considérant le modèle de simulation 6.27 avec les paramètres de simulation suivants :

$N = 50$ (taille de l'échantillon)

$S_0 = 330$ MPa

$\Delta T = 5$ (durée de palier)

Le profil d'essai et les paramètres des lois normales de simulation sont définis dans le tableau 6.9.

niveau de contrainte en MPa	moyenne (eq 6.27)	écart type
350	5.93	0.2
360	5.43	0.2
370	4.95	0.2
380	4.48	0.2
390	4.02	0.2

Table 6.9 – résultats

Nous obtenons les temps $\log(N_{ij})$ par tirage aléatoire et on en déduit les résultats d'essai (tableau 6.10).

niveau de contrainte s_i en MPa	k_i	n_i	k_i cumulé	R_i exp par eq 2.2	$\log(N_i)^*$	R_i mod par eq 6.62
350	0	50	0	1	5	1
360	0	50	0	1	4.766	0.996
370	12	38	12	0.76	5.116	0.838
380	12	26	24	0.52	5.294	0.416
390	26	0	50	0	5.356	0.113

Table 6.10 – résultats

avec

- k_i nombre de défaillances au palier i
- n_i nombre de systèmes testés au palier i
- $\log(N_i)^*$ temps équivalent au palier i

Nous considérons un modèle puissance inverse (pour plus de détail voir annexe A.3), pour sa forme indentique à celle du modèle de Basquin, pour caractériser la moyenne :

$$\gamma^T z^{(i)} = \gamma_0 + \gamma_1 \log(s_i)$$

Par le maximum de vraisemblance (eq 6.63) nous estimons le vecteur γ et l'écart type σ :

- $\hat{\sigma} = 0.277$
- $\hat{\gamma}_0 = 16.842$
- $\hat{\gamma}_1 = -1.7$

Nous pouvons en déduire la fonction de fiabilité $R_{s_0}(\log(N))$ en condition nominale ($S_0=330$ MPa) (voir figure 6.29).

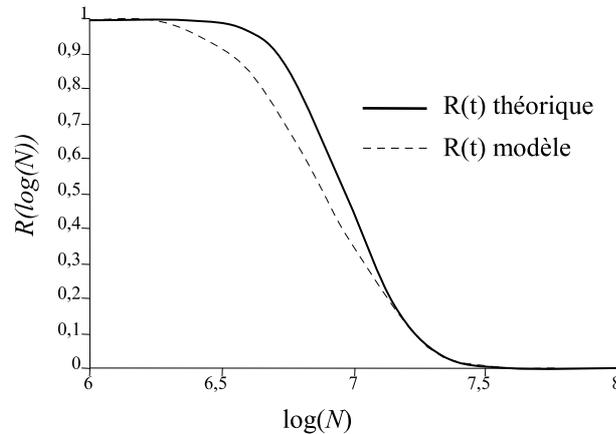


Figure 6.29 – Fonction fiabilité en condition nominale

6.6.5 Conclusion

Ce plan d'essai est intéressant puisqu'il permet de construire la fonction de fiabilité lorsque l'on ne maîtrise pas le comportement du produit sous l'effet de stress. Ainsi, il est possible de commencer l'essai à un niveau relativement faible de stress et d'augmenter progressivement en maîtrisant le mode de défaillance. Nous avons appliqué également ce plan d'essai à l'analyse des résultats d'essai aggravé HALT (voir l'article intitulé "Applying accelerated life models to HALT testing." en annexe B.3).

6.7 Plan d'essai avec réparation

L'idée de départ de ce plan d'essai était de pouvoir lancer une campagne de tests sur des prototypes en faible nombre. Ainsi, si l'on exécute des réparations à l'issue de chaque défaillance il est possible d'obtenir un échantillon de données en taille suffisante pour estimer la fonction de fiabilité. Coccozza dans [Coccozza-Thivent, 1997] propose un plan d'essai classique (sans accélération) avec réparation. Une première approche de plan d'essai accéléré avec réparation a été proposée par Guida dans [Guida and Giorgio, 1995]. Nous avons donc complété cette étude ([Guerin and Dumon, 2004b]) sur la définition d'un plan d'essai accéléré avec réparation en considérant que les temps de défaillance sont décrits par des processus de Poisson homogène et non-homogène.

6.7.1 Rappels sur les plans d'essais avec réparation

Supposons que l'on observe les instants successifs de défaillance d'un matériel de taux de défaillance $\lambda(t)$, ce matériel étant neuf à l'instant initial. Lorsqu'une défaillance survient, le matériel est réparé immédiatement. Nous supposons que la réparation effectuée est une "petite réparation", appelée encore réparation minimale : cela signifie que le matériel est remis en état de marche, mais son taux de défaillance est celui qu'il avait juste avant la panne (aussi mauvais que vieux). Nous nous intéresserons au plan d'essais dont la durée τ est fixée a priori. Nous observons n matériels qui sont réparés instantanément lors d'une défaillance. Le matériel i est observé jusqu'à l'instant τ , le nombre de défaillances survenues pour ce matériel est K_i (aléatoire) et les instants de défaillance sont les T_j^i ($0 \leq j \leq K_i$) (voir Figure 6.30).

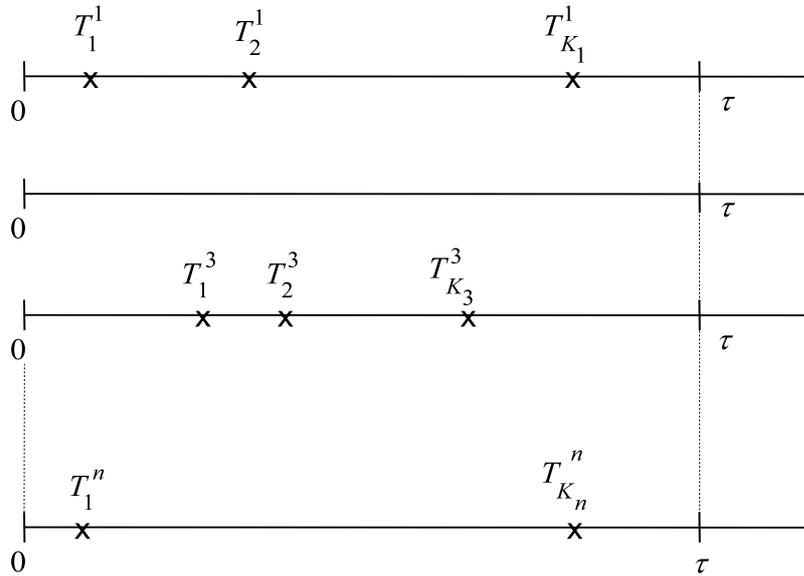


Figure 6.30 – Définition du plan d'essai classique avec réparation

Cas d'un processus de Poisson homogène :

L'observation du matériel i correspond à l'observation d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ sur l'intervalle de temps $[0, \tau]$. La log-vraisemblance du paramètre λ s'écrit :

$$\log(L(\lambda)) = \left(\sum_{i=1}^n K_i \right) \log(\lambda) - n\lambda\tau \quad (6.65)$$

L'estimateur de λ est donné par :

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n K_i}{n\tau} \quad (6.66)$$

Cas d'un processus de Poisson non homogène (processus de Weibull) :

Nous regardons maintenant un processus de Weibull de paramètre β et η , c'est-à-dire un processus de Poisson d'intensité :

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \quad (6.67)$$

Il modélise les instants successifs de défaillance d'un matériel dont le taux de défaillance est de type de Weibull et qui subit de "petites réparations".

La log-vraisemblance des paramètres β et η s'écrit :

$$\log(L(\beta, \eta)) = (\log \beta - \beta \log \eta) \left(\sum_{i=1}^n K_i \right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{K_i} \log T_j^i - n \left(\frac{\tau}{\eta} \right)^\beta \quad (6.68)$$

Les estimateurs du maximum de vraisemblance de β et η sont déduits de :

$$\frac{1}{\hat{\beta}} = \log \tau - \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_i} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{K_i} \log (T_j^i) \tag{6.69}$$

$$\log \hat{\eta} = \log \tau + \frac{1}{\hat{\beta}} \log (n) - \frac{1}{\hat{\beta}} \log \left(\sum_{i=1}^n K_i \right) \tag{6.70}$$

6.7.2 Modèles de vie accélérée de systèmes réparables

Considérons un plan d’essai dans lequel chaque système i de l’échantillon de taille n est testé sous le stress s_i jusqu’à l’instant τ et réparé immédiatement après chaque défaillance. Un échantillon censuré de temps de défaillance T_j^i ($0 \leq j \leq K_i$) est obtenu (voir figure 6.31).

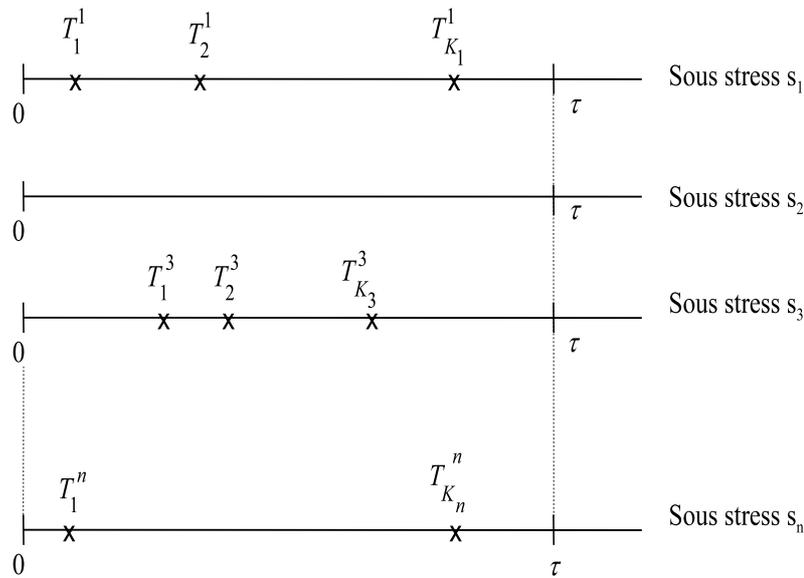


Figure 6.31 – Définition du plan d’essai classique avec réparation

Nous appliquons les SVA en considérant les modèles paramétriques dans le cas des processus de Poisson homogène et non homogène.

Application des SVA dans le cas d’un processus de Poisson homogène

Pour construire la fonction de fiabilité nous considérons que le taux de défaillance constant est défini par le modèle de COX :

$$\lambda_s = \lambda_0 e^{\gamma^T z} \tag{6.71}$$

avec λ_0 le taux de défaillance dans les conditions nominales.

Ainsi, la loi de fiabilité s'écrit :

$$R_{s_0}(t) = e^{-\lambda_s e^{-\gamma^T z} t} \quad (6.72)$$

La log-vraisemblance est définie par :

$$\log(L(\lambda)) = \left(\sum_{i=1}^n K_i \right) \log(\lambda_0) + \left(\sum_{i=1}^n K_i (\gamma^T z_i) \right) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0 e^{\gamma^T z_i \tau} \right) \quad (6.73)$$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons des estimateurs de $\hat{\lambda}_0$ et de $\hat{\gamma}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$R_{s_0}(t) = e^{-\lambda_0 t} \quad (6.74)$$

Exemple numérique : Pour cet exemple, nous considérons que la loi d'accélération est définie par le modèle d'Arrhénius (pour plus de détail voir l'annexe A.1) et l'essai se fait à deux niveaux de température. Le taux de défaillance à la température T_i est défini par :

$$\lambda(T_i) = \lambda_0 e^{\left(-\frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_0} \right) \right)} \quad (6.75)$$

avec :

- λ_0 le taux de défaillance dans les conditions nominales
- E_a l'énergie d'activation
- k la constante de Boltzman ($8.6171 \cdot 10^{-5}$ eV/K)
- T_i la température d'essai
- T_0 la température dans les conditions nominales

Les données sont simulées selon les paramètres suivants :

- $E_a = 0.37$ eV
- $N = 5$ (la taille de l'échantillon par niveau d'essai)
- $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5} \text{h}^{-1}$
- $\tau = 1000\text{h}$ (temps de censure)
- $T_0 = 30^\circ\text{C}$ (température nominale)
- $T_1 = 120^\circ\text{C}$ (température de l'essai 1)
- $T_2 = 200^\circ\text{C}$ (température de l'essai 2)

Les temps de défaillance sont obtenus par tirage aléatoire avec ces paramètres. Les taux de défaillance λ_1 et λ_2 sont obtenus en appliquant l'équation 6.75 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \lambda_0 e^{\left(-\frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) \right)} \\ \lambda_1 &= 5 \times 10^{-5} e^{\left(-\frac{0.37}{8.6171 \times 10^{-5}} \left(\frac{1}{273+120} - \frac{1}{273+30} \right) \right)} = 1.28 \times 10^{-3} \text{h}^{-1} \\ \lambda_2 &= \lambda_0 e^{\left(-\frac{E_a}{k} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0} \right) \right)} \\ \lambda_2 &= 5 \times 10^{-5} e^{\left(-\frac{0.37}{8.6171 \times 10^{-5}} \left(\frac{1}{273+200} - \frac{1}{273+30} \right) \right)} = 8.15 \times 10^{-3} \text{h}^{-1} \end{aligned}$$

Les temps locaux de défaillance sont simulés par

Température $T_1 = 120^\circ\text{C}$: $t_i = F(t)^{-1}$ avec $F(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t}$

Température $T_2 = 200^\circ\text{C}$: $t_i = F(t)^{-1}$ avec $F(t) = 1 - e^{-\lambda_2 t}$

Les temps cumulés sont définis par :

$$T_i = \sum_{j=1}^i t_j$$

Nous obtenons les données suivantes :

Matériels	Temps de défaillance ou de censure (gras)			Nombre de défaillances
1	397	872	1000	2
2	1000			0
3	646	1000		1
4	850	851	1000	2
5	69	1000		1

Table 6.11 – Résultats pour l’essai à température T=120°C et une censure à 1000 h

Matériels	Temps de défaillance et de censure (en gras)													n	
1	329	345	349	393	509	922	1000								6
2	39	79	109	189	502	551	730	1000							7
3	52	170	849	1000											3
4	175	206	223	246	268	288	302	543	545	612	663	848	1000	12	
5	79	234	337	600	650	710	735	971	994	1000				9	

Table 6.12 – Résultats pour l’essai à température T=200°C et une censure à 1000 h

Par le maximum de vraisemblance nous déduisons les estimateurs de λ_0 et E_a :

- $\hat{E}_a = 0.365$ eV (au lieu de 0.37 eV)
- $\hat{\lambda}_0 = 4,85 \cdot 10^{-5} \text{h}^{-1}$ (au lieu de $5 \cdot 10^{-5} \text{h}^{-1}$)

Nous pouvons constater que les estimateurs sont proches des données de départ et montre l’efficacité de la méthode.

Application des SVA dans le cas d’un processus de Poisson non homogène

Pour construire la loi de fiabilité nous considérons la distribution de Weibull :

$$R_s(t) = e^{\left(\frac{-t}{\gamma^T z}\right)^\beta} \tag{6.76}$$

En considérant le plan d’essai avec réparation la log-vraisemblance s’écrit :

$$\log((\beta, \gamma)) = \left(\sum_{i=1}^n K_i (\log \beta - \beta \log \gamma^T z_i) \right) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{K_i} \log T_j^i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\tau}{\gamma^T z_i} \right)^\beta \tag{6.77}$$

Par le maximum de vraisemblance, nous déduisons des estimateurs de $\hat{\gamma}$ et de $\hat{\beta}$ permettant de définir la loi de fiabilité dans les conditions nominales :

$$R_{s_0}(t) = e^{\left(\frac{t}{-\gamma T z^{(0)}}\right)^\beta} \quad (6.78)$$

où $z^{(0)}$ représente le vecteur stress dans les conditions nominales.

Exemple numérique :

Pour cet exemple, nous considérons que la loi d'accélération est définie par le modèle de Peck (voir annexe A.2) et l'essai se fait à trois niveaux de température. Le paramètre d'échelle η de la loi de Weibull est défini par :

$$\eta(T_i, H_i) = A H_i^{-m} e^{\frac{E_a}{kT_i}}$$

Avec

- A, m et E_a les paramètres de la loi d'accélération de Peck
- T la température
- H l'humidité
- k la constante de Boltzman ($8.6171 \cdot 10^{-5}$ eV/K)
- E_a l'énergie d'activation

Les données sont simulées selon les paramètres suivants :

- $E_a = 0.51$ eV
- $n = 5$ (la taille de l'échantillon par niveau d'essai)
- $m = 6,2$
- $A = 8,75 \cdot 10^5$ jours
- $\beta = 1.5$ paramètre de forme de la loi de weibull
- $T_1 = 65^\circ\text{C}$ (température de l'essai 1)
- $T_2 = 85^\circ\text{C}$ (température de l'essai 2)
- $T_3 = 85^\circ\text{C}$ (température de l'essai 3)
- $H_1 = 90\%$ (Humidité de l'essai 1)
- $H_2 = 90\%$ (Humidité de l'essai 2)
- $H_3 = 95\%$ (Humidité de l'essai 3)

Les résultats d'essai sont obtenus par tirage aléatoire en considérant les paramètres d'échelle η_1, η_2 et η_3 obtenus en appliquant le model de Peck :

$$\eta_1 = A H_1^{-m} e^{\frac{E_a}{kT_1}} = 8.75 \times 10^5 90\%^{-6.2} e^{\frac{0.51}{8.6171 \times 10^{-5} (273+65)}} = 26.93 \text{ jours}$$

$$\eta_2 = A H_2^{-m} e^{\frac{E_a}{kT_2}} = 8.75 \times 10^5 90\%^{-6.2} e^{\frac{0.51}{8.6171 \times 10^{-5} (273+85)}} = 10.13 \text{ jours}$$

$$\eta_3 = A H_3^{-m} e^{\frac{E_a}{kT_3}} = 8.75 \times 10^5 95\%^{-6.2} e^{\frac{0.51}{8.6171 \times 10^{-5} (273+85)}} = 7.24 \text{ jours}$$

Les temps de défaillance sont simulés par la méthode suivante (voir figure 6.32) :

$$T_1 = F(t)^{-1} \text{ avec } F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \text{ et } F(t) \in [0, 1]$$

$$T_2 = F(t)^{-1} \text{ avec } F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \text{ et } F(t) \in [F_1, 1] \text{ où } F_1 = F(T_1)$$

...

$$T_i = F(t)^{-1} \text{ avec } F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \text{ et } F(t) \in [F_{i-1}, 1] \text{ où } F_{i-1} = F(T_{i-1})$$

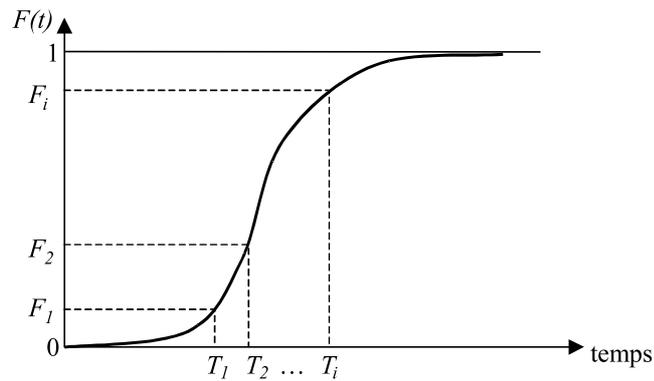


Figure 6.32 – Simulation des temps

Les différents résultats d’essai sont donnés dans les tableaux 6.13, 6.14 et 6.15.

	Temps de défaillance (en jours) et temps de censure en gras		
Système 1	4.83	6.88	20.00
Système 2	20.00		
Système 3	6.59	20.00	
Système 4	20.00		
Système 5	13.81	16.52	20.00

Table 6.13 – Résultats d’essai simulé pour T=65°C, H=90% et une censure à 20 jours

	Temps de défaillance (en jours) et temps de censure en gras			
Système 1	6.87	7.98	9.28	10.00
Système 2	1.34	10.00		
Système 3	1.25	6.00	10.00	
Système 4	10.00			
Système 5	10.00			

Table 6.14 – Résultats d’essai simulé pour T=85°C, H=90% et une censure à 10 jours

	Temps de défaillance (en jours) et temps de censure en gras				
Système 1	4.99	8.67	10.00		
Système 2	9.15	10.00			
Système 3	5.86	5.90	8.06	8.20	10.00
Système 4	0.88	2.28	9.00	10.00	
Système 5	10.00				

Table 6.15 – Résultats d'essai simulé pour T=85°C, H=95% et une censure à 10 jours

Par le maximum de vraisemblance, nous obtenons les estimations des paramètres inconnus :

- $\hat{\beta} = 1.4$ (au lieu de 1.5)
- $\hat{E}_a = 0.44$ eV (au lieu de 0.51 eV)
- $\hat{m} = 5.26$ (au lieu de 6.2)
- $\hat{A} = 1.19 \cdot 10^5$ jours (au lieu de $8.75 \cdot 10^5$ jours)

Nous pouvons constater que les estimateurs sont proches des données de départ (sauf pour A) et montre l'intérêt d'un tel plan.

6.7.3 Conclusion

Nous avons montré qu'il est possible d'estimer la fiabilité d'un produit au cours de son développement, période où on ne dispose que de très peu de prototypes, en réalisant des essais accélérés avec réparation lors d'une défaillance. Cette approche permet d'augmenter la précision sur les résultats d'estimation des paramètres de fiabilité (la précision étant liée au nombre de temps de défaillance dont on dispose). Néanmoins, ces modèles supposent de "petites réparations" n'engendrant aucune modification du taux de défaillance. C'est sur ce dernier point que nos travaux se poursuivent afin d'étudier l'influence des réparations sur le taux de défaillance. Ce plan est actuellement étudié expérimentalement dans le cadre du projet européen EUREKA/PIDEA/ACLIMAT.

6.8 Synthèse

Dans ce chapitre, nous avons présenté les travaux sur les essais accélérés en partie réalisés dans le cadre des thèses de Ouahiba Tebbi, Pascal Lantieri et de Sorin Voiculescu. L'objectif principal visé est d'étudier l'application de ces essais à des systèmes soumis à un vieillissement mécanique qui ont été très peu étudiés.

Dans un premier temps, nous avons introduit le principe des essais accélérés en listant les différents paramètres qui permettent de construire un plan d'essai.

Ensuite, nous avons présenté le modèle standard de vie accélérée, récemment publiés par Nikulin et Bagdonavicius, qui offre un formalisme unique pour décrire les lois d'accélération. Ces auteurs ont proposé deux types d'estimation :

- paramétrique (hypothèse d'une distribution),
- non paramétrique (pas d'hypothèse de distribution).

Dans le cadre de la thèse de Ouahiba Tebbi, nous avons introduit l'estimation semi-paramétrique (utilisation du modèle de Cox) du modèle SVA. Ce travail a fait l'objet de deux publications [CD37] et

[RN5].

Nikulin et Bagdonavicius ont étudié trois plans d'essai différents :

- par régression,
- avec endommagement préalable accéléré,
- sous stress échelonné,

Les auteurs n'ont fait quasiment aucune application de leur travaux. Aussi, nous avons appliqué le modèle SVA à des systèmes soumis à des dégradations mécaniques et plus particulièrement au phénomène de fatigue. Nous avons pu alors donner une signification physique à la fonction de transfert utilisée dans le modèle SVA (publication dans [Tebbi et al., 2004b] et [Tebbi et al., 2004c]). Pour étudier les différents plans et estimations, nous avons développé un simulateur d'essai de fatigue (dans le domaine de fatigue limitée) basé sur le modèle de Basquin. Ainsi, nous avons pu simuler de nombreux cas et montrer l'applicabilité du modèle SVA dans le domaine de la mécanique (publication dans [Tebbi et al., 2004b] et [Tebbi et al., 2001]). Pour compléter cette étude, nous avons réalisé une application expérimentale des plans par régression et avec endommagement préalable accéléré en considérant la déformation d'un trombone pour papier, et montré tout l'intérêt des essais accélérés (publication dans [Tebbi et al., 2004b] et [Tebbi et al., 2004c]).

Une application originale du plan d'essai sous stress échelonné a été faite en analysant les temps de défaillances (imputables à un problème de fiabilité) issus d'un essai HALT (voir la section sur les essais aggravés) permettant d'obtenir une première estimation de la loi de fiabilité (publication dans [Guerin et al., 2004d] et [Guerin et al., 2003c]).

Pour finir, nous avons étudié un nouveau plan consistant à réaliser des réparations au cours de l'essai. Les réparations sont intégrées en considérant deux types de processus de renouvellement : processus de Poisson homogène et non homogène (publication dans [Guerin and Dumon, 2004a]).

Ces différentes études ont mis en lumière toutes les difficultés numériques des estimations étudiées.

En terme de perspectives, j'envisage plusieurs voies de développement :

- Etendre le travail à d'autres types de dégradation (une thèse en co-tutelle doit débuter en 2004-2005 sur les essais accélérés appliqués aux systèmes soumis à l'usure)
- Définir les lois d'accélération, dans le cas de systèmes mécaniques, par un modèle éléments finis où les essais accélérés consisteront à le recalculer (étude débutée actuellement par Pascal Lantieri). L'idée vient du fait que la loi d'accélération est proportionnelle à la vitesse de dégradation et qu'elle peut être définie par un modèle éléments finis. Ainsi, il est possible de simuler le comportement mécanique (par exemple le nombre moyen de cycles à rupture dans le cas de la fatigue) du produit dans les différentes conditions sévérées et comparer à l'expérience. Ensuite, on recalcule le modèle éléments finis en recherchant ses paramètres optimum afin de minimiser l'erreur quadratique (entre les résultats du modèle EF et expérimentaux). Une fois le recalcul obtenu, nous appliquerons le modèle EF dans les conditions nominales pour connaître le comportement nominal du produit (par exemple le nombre moyen de cycles à rupture). En faisant l'hypothèse que le paramètre de forme est constant (il sera donc déduit à partir uniquement des résultats issus des essais sous conditions sévérées), il sera possible de construire la loi de fiabilité dans les conditions nominales.
- Considérer le cas où le paramètre de forme de la distribution caractérisant la fonction de fiabilité évolue en fonction des niveaux de stress (étude menée actuellement par Pascal Lantieri)
- Profiter de l'arrivée de l'environnement climatique du hall de technologie de l'ISTIA pour expérimenter

le plan d'essai avec réparation.

- Introduire l'approche bayésienne dans les essais accélérés pour améliorer la précision des estimations des paramètres de modèle SVA (Etude commencée par Sorin Voiculescu).

CHAPITRE 7

Conclusions et Perspectives

Ce document présente mes activités de recherche développées au sein du LASQUO de l'ISTIA durant ces dix dernières années. Ces activités de recherche s'articulent autour de l'estimation de la fiabilité par les essais appliqués aux systèmes mécaniques. De nombreux travaux de recherche ont été réalisés ou le sont dans le cadre de thèses (Emmanuel Usureau (soutenue en 2001), Ouahiba Tebbi (soutenance prévue en janvier 2005), Pascal Lantieri (soutenance prévue fin 2005) et Sorin Voiculescu (soutenance prévue fin 2006)). Plusieurs points de ces recherches sont des développements originaux parmi lesquels nous pouvons citer :

- définition des marges de robustesse (opérationnelle et de destruction) lors d'un essai aggravé.
- construction d'une distribution a priori à partir des études préliminaires de SdF
- pondération de la distribution a priori par un coefficient K traduisant le degré de compatibilité entre la distribution a priori et les premiers résultats d'essai.
- application du modèle standard de vie accélérée aux systèmes mécaniques en étudiant différentes estimations (paramétrique, semi paramétrique et non paramétrique) et différents plans d'essais (par régression, avec endommagement préalable accélérée, sous stress échelonné et avec réparation).

L'ensemble de ces travaux a été abordé en considérant les aspects théoriques (modélisation stochastique et estimation statistique) mais également pratiques. En effet, mon activité de recherche m'a amené à développer le transfert auprès des industriels en effectuant des formations spécifiques dans le domaine de la fiabilité, en réalisant des études, en participant à différents groupes de travail ("Essais en fiabilité" de l'IMdR et "Déverminage" de l'ASTE) et en étant co-responsable du projet européen EUREKA/PI-DEA/ACCLIMAT sur la fiabilisation des systèmes électroniques embarquées par les essais accélérés (en particulier AIRBUS A380).

En terme de perspective, je continuerai à participer au développement de l'équipe "Sûreté de fonctionnement des systèmes" sous la responsabilité du Professeur Bernard Dumon.

Je menerai un certain nombre d'actions que je peux résumer en trois catégories :

actions d'ouverture : l'estimation de la fiabilité par les essais étudiée par l'équipe se trouve à la croisée de plusieurs domaines de recherche développés par des laboratoires de mathématiques appliquées, pour ce qui concerne la modélisation stochastique des phénomènes aléatoires et l'analyse statistique des données d'essai, de métallurgie pour l'étude des mécanismes de dégradation des matériaux. Dans ce but, je souhaite développer des collaborations avec de tels laboratoires pour enrichir nos recherches. Ainsi, nous avons initié les premiers contacts avec les laboratoires LPMI¹, de l'ENSAM à Angers sur les problèmes de mécanisme de dégradation et A2X² de l'université de Bordeaux, dans le cadre du projet EUREKA/PI-DEA/ACLIMAT, sur les problèmes de modélisation stochastique. Ce travail est à poursuivre et à développer avec également des laboratoires étrangers.

¹Laboratoire Procédés, Matériaux et Instrumentation

²Laboratoire de théorie des nombres et algorithmique arithmétique

actions de développement du thème de recherche : dans le chapitre 2 j'ai déjà précisé un certain nombre d'évolutions des travaux en cours et de perspectives. Pour synthétiser, j'envisage de poursuivre le développement de mes recherches selon les axes suivants :

- profiter du hall de technologies de l'ISTIA pour expérimenter les différentes approches étudiées (essais aggravés, bayésiens et accélérés)
- étudier les essais accélérés basés sur les processus de dégradation et non plus uniquement sur les processus d'apparition des défaillances. En effet, en mécanique, même si la défaillance est brutale (généralement la rupture), le phénomène provoquant la défaillance est progressif (comme par exemple la propagation de fissures). Aussi, des travaux sont réalisés actuellement pour bâtir des essais accélérés basés sur le développement de modèle de processus de dégradation accéléré. Un thèse en co-tutelle doit commencer en 2004-2005 sur ce sujet en considérant le phénomène d'usure et en collaboration avec l'équipe tribologie du LPMI de l'ENSAM.
- développer des lois d'accélération en mécanique à l'aide de modèles éléments finis dont les paramètres inconnus sont estimés par les essais accélérés.

actions de transfert : la compétence acquise par l'équipe sur l'estimation de la fiabilité par les essais est aujourd'hui très demandée par les industriels. Actuellement nous y répondons au coup par coup et à travers principalement des projets étudiants de DESS. Il est indispensable de structurer cette activité et j'envisage d'y contribuer.

Bibliographie

- [Afnor, 1988] Afnor (1988). *Recueil de normes françaises : Fiabilité, Maintenabilité et Disponibilité*. Ed Afnor-Ute.
- [ASTE, 1993] ASTE (1993). *Le rôle des essais dans la maîtrise de la fiabilité*. ed ASTE.
- [Augé, 1998] Augé, J.-C. (1998). *Utilisation d'un modèle de hasard proportionnel pour estimer la fiabilité de composants mécaniques, modélisation de l'influence de l'environnement sur la fiabilité de vérins hydrauliques et pneumatiques, application aux Essais Accélérés*. Thèse, Ecole Centrale de Lyon.
- [Ayyub and Mccuen, 1997] Ayyub, B. and Mccuen, R. (1997). *Probability, Statistics & Reliability for engineers*. CRC Press New York.
- [Bagdonavicius et al., 2000] Bagdonavicius, V., Gerville-Reache, L., Nikoulina, V., and Nikoulin, M. (2000). Expériences accélérées : analyse statistique du modèle standard de vie accélérée. *Revue de Statistique Appliquée*, Vol XLVIII:5–38.
- [Bagdonavicius and Nikulin, 1995a] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1995a). On accelerated testing of systems. *European Journal of Diagnosis and Safety in Automation*, vol. 5 n°3:307–316.
- [Bagdonavicius and Nikulin, 1995b] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1995b). *Semi-parametrics Models in Accelerated Life Testing*. Queen's University.
- [Bagdonavicius and Nikulin, 1997] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (1997). Transfer functional and semi-parametric regression. *Biometrika*, vol. 84 n°2:365–378.
- [Bagdonavicius and Nikulin, 2001] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (2001). *Mathematical models in the theory of accelerated experiments*. World Scientific Publishing Co.
- [Bagdonavicius and Nikulin, 2002] Bagdonavicius, V. and Nikulin, M. (2002). *Accelerated life models*. Chapman&Hall/CRC.
- [Bai et al., 1989] Bai, D., Kim, M., and Lee, S. (1989). Optimum simple step-stress accelerated life tests with censoring. *IEEE transaction on reliability*, vol 38 n°2.
- [Barton, 1994] Barton, R. (1994). Optimum constant-stress accelerated life-test plans. *IEEE transaction on reliability*, vol 43 n°4.
- [Basu and Ebrahimi, 1982] Basu, A. and Ebrahimi, N. (1982). Nonparametric accelerated life testing. *IEEE Trans. On Reliab.*, Vol 31 n° 5:432–435.
- [Biolini, 1997] Biolini, A. (1997). *Quality and reliability of technical systems*. Ed Springer.
- [Bompas-Smith, 1973] Bompas-Smith, J. (1973). *Mechanical Survival : the use of reliability data*. Mc Graw Hill book.
- [Caruso and Dasgupta, 1998] Caruso, H. and Dasgupta, A. (1998). A fundamental overview of accelerated testing analytical models. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, USA.
- [Castillo et al., 1999] Castillo, E., Sarabia, J.-M., Solares, C., and Gomez, P. (1999). Uncertainty analyses in fault tree and bayesian networks using form/sorm methods. *Reliability Engineering & System Safety*, vol 65:29–40.

- [Clarotti, 1998] Clarotti, C. (1998). Les techniques fréquentielle et bayésienne au service le l'ingénieur de sûreté de fonctionnement. Technical report, ISDF.
- [Cocozza-Thivent, 1997] Cocozza-Thivent, C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*. Editeur Springer.
- [Congdon, 2001] Congdon, P. (2001). *Bayesian statistical modelling*. Ed Wiley.
- [Cooke, 1991] Cooke, R. (1991). *Experts in uncertainty : Expert opinion and subjective probability in science*. Oxford University Press.
- [Crowe and Feinberg, 2001] Crowe, D. and Feinberg, A. (2001). *Design for reliability*. Ed CRC Press.
- [Devarajan and Ebrahimi, 1998] Devarajan, K. and Ebrahimi, N. (1998). Nonparametric approach to accelerated life testing under multiple stress. *Naval Research Logistics*, Vol 45:629–644.
- [Dodson and Nolan, 1999] Dodson, B. and Nolan, D. (1999). *Reliability engineering handbook*. Publishing-Marcel Dekker Inc.
- [Doyle, 1991] Doyle, R. (1991). Mechanical reliability. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, USA.
- [F. Guerin and Usureau, 2002] F. Guerin, B. D. and Usureau, E. (2002). New methodology of weighting of prior distribution used bayesian approach applied to reliability estimation. In *Probability Method Conference*, Newport Beach, California, USA.
- [Ford et al., 1961] Ford, D., Graff, D., and Payne, A. O. (1961). Some statistical aspects of fatigue life variation. In *Proc 2nd ICAF Symposium : Fatigue aircraft structure*, Paris, France.
- [Guerin and Dumon, 1998] Guerin, F. and Dumon, B. (1998). Réduction du nombre d'essais par la méthode des escaliers couplée au bayésien. In $\lambda\mu 11$, Arcachon.
- [Guerin and Dumon, 1999] Guerin, F. and Dumon, B. (1999). Reduction of the numbers of tests by coupling together the sequential and bayesian methods. In *IEEE SMC'99*, Tokyo, Japan.
- [Guerin and Dumon, 2004a] Guerin, F. and Dumon, B. (2004a). Accelerated life testing on repairable system. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, Los Angeles-USA.
- [Guerin and Dumon, 2004b] Guerin, F. and Dumon, B. (2004b). Modélisation basée sur des essais aggravés en contraintes échelonnées. *Revue Phoebus*, n°28, Avril-Mai-Juin 2004:–.
- [Guerin et al., 2003a] Guerin, F., Dumon, B., and Usureau, E. (2003a). New methodology of weighting of prior distribution used bayesian approach applied to reliability estimation. In *Probability Method Conference*, Los Angeles, USA.
- [Guerin et al., 2003b] Guerin, F., Dumon, B., and Usureau, E. (2003b). Reliability estimation by bayesian method : definition of prior distribution using dependability study. *journal of Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 82:299–306.
- [Guerin et al., 2004a] Guerin, F., Dumon, B., and Usureau, E. (2004a). *Compatibility between prior and likelihood distributions and weighting approach applied to reliability*. Progresses In Quality and Dependability. Editors, Bacivarov, Dumon, Wiele. A paraître.
- [Guerin et al., 2004b] Guerin, F., Dumon, B., and Usureau, E. (2004b). Estimation bayésienne : vérification de la compatibilité de l'a priori avec la vraisemblance et pondération. *Journal de la Société française de statistique*, A paraître en Décembre 2004:–.
- [Guerin et al., 2003c] Guerin, F., Lantieri, P., and Dumon, B. (2003c). Applying accelerated life models to halt testing. In *The 9th ISSAT International Conference on Reliability And Quality In Design*, Honolulu, Hawaii, USA.

- [Guerin et al., 2004c] Guerin, F., Lantieri, P., and Dumon, B. (2004c). Approche théorique des essais aggravés. *Revue Phoebus*, n°28, Avril-Mai-Juin 2004:–.
- [Guerin et al., 2004d] Guerin, F., Lantieri, P., and Dumon, B. (2004d). *Reliability modeling, Analysis and Optimization*. Ed World Scientific,. Chapter : Applying accelerated life models to HALT testing, A paraître.
- [Guerin et al., 2001] Guerin, F., Tebbi, O., and Dumon, B. (2001). Accelerated testing based on mechanical damage model. In *IEEE International Conference on Reliability and Maintainability*, Philadelphia, Pennsylvania, USA.
- [Guida and Giorgio, 1995] Guida, M. and Giorgio, M. (1995). Reliability analysis of accelerated life-test data from a repairable system. *IEEE Transactions on Reliability*, vol 44 n°2:–.
- [Hoang, 2003] Hoang, P. (2003). *Handbook of reliability engineering*. ed Springer.
- [Ibrahim et al., 2001] Ibrahim, J., Chen, M., and Sinha, D. (2001). *Bayesian survival analysis*. Ed Springer.
- [kececioglu, 1944] kececioglu, D. (1944). *Reliability and life testing Handbook*. Ed Prentice Hall.
- [Kececioglu et al., 1998] Kececioglu, D., Jiang, M., and Sun, F.-B. (1998). A unified approach to random fatigue reliability quantification under random loading. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium*, USA.
- [kececioglu and Sun, 1999] kececioglu, D. and Sun, F.-B. (1999). *Environmental stress screening : its quantification, optimization and management*. Ed Prentice Hall.
- [Khamis and Higgins, 1996] Khamis, I. and Higgins, J. J. (1996). Optimum 3-step step-stress tests", iee transaction on reliability. *IEEE transaction on reliability*, vol 45 n°2.
- [Lalanne, 1999] Lalanne, C. (1999). *Dommage par fatigue - tome 4*. Hermes Science Publications.
- [Lannoy and Procaccia, 1994] Lannoy, A. and Procaccia, H. (1994). *Méthodes avancées d'analyse des bases de données du retour d'expérience industriel*. Ed Eyrolles.
- [Lannoy and Procaccia, 2001] Lannoy, A. and Procaccia, H. (2001). *L'utilisation du jugement d'expert en sûreté de fonctionnement*. Ed. TEC&DOC.
- [Lean, 1998] Lean, M. (1998). Managing halt issues. In *NEPCOM proceedings*, USA.
- [Lemaitre and Chaboche, 1996] Lemaitre, J. and Chaboche, J. (1996). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- [Ligeron and et M. Neff, 1984] Ligeron, J.-C. and et M. Neff, A. D. (1984). *La fiabilité en exploitation : Organisation et traitement des données*. Ed Techniques et Documentation-Lavoisier.
- [Linn, 1998a] Linn, J. A. M. (1998a). An inference method for temperature step-stress accelerated life testing. *Quality and Reliability Engineering International*, vol 17:–.
- [Linn, 1998b] Linn, J. A. M. (1998b). Ways to improve the analysis of multi-level accelerated life testing. *Quality and Reliability Engineering International*, vol 14:–.
- [Little and Ekvall, 1979] Little, R. and Ekvall, J. (1979). Statistical analysis of fatigue data. Technical report, American Society for Testing and Materials.
- [Madsen et al., 1986] Madsen, H., Krenk, S., and Lind., N. (1986). *Method of structural safety*. Ed Prentice-Hall.
- [Marts and Walter, 1982] Marts, H. and Walter, R. (1982). *Bayesian reliability analysis*. Ed John Willey& sons.

- [Masotti and Morelli, 1998] Masotti, B. and Morelli, M. (1998). Development of the accelerated testing process at otis elevator company. *Quality and Reliability Engineering International*, vol 14.
- [McLean, 2000] McLean, H. (2000). *HALT, HASS HASA Explained : Accelerated Reliability Techniques*. ASQ Quality press.
- [Motor, 2000] Motor, G. (2000). Highly accelerated life testing - test procedure analysis-general motor. Technical report, American Society for Testing and Materials.
- [Nelson, 1990] Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans and Data Analysis*. Ed. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.
- [O'Connor, 2003] O'Connor, P. (2003). Testing for reliability. *Quality and Reliability Engineering international*, vol 19:73–84.
- [Owen and Padgett, 1998] Owen, W. J. and Padgett, W. J. (1998). Accelerated test models for system strength based on birnbaum-saunders distributions. *Lifetime Data Analysis*, vol 5:133–147.
- [Pages and Gondran, 1980] Pages, A. and Gondran, M. (1980). *Fiabilité des systèmes*. Ed Eyrolles.
- [Peruggia, 1997] Peruggia, M. (1997). On variability of case-deletion importance sampling weights in the bayesian linear model. In *MMR'97*, Romania.
- [Phadke, 1999] Phadke, M. S. (1999). *Quality engineering using robust design*. Ed Prentice-Hall.
- [Procaccia and Morilhat, 1996] Procaccia, H. and Morilhat, P. (1996). *Fiabilité des structures des installations industrielles*. Ed. Eyrolles.
- [Procaccia et al., 1992] Procaccia, H., Piepszownik, L., and Clarotti, C. (1992). *Fiabilité des équipements et théorie de la décision statistique fréquentielle et bayésienne*. Ed Eyrolles.
- [Ringler, 1979] Ringler, J. (1979). Utilisation des techniques bayésienne dans le cas de système complexe. *Revue de Statistique Appliquée*, vol XXVII n°2:–.
- [Robert, 1992] Robert, C. (1992). *L'analyse statistique bayésienne*. Edition ECONOMICA.
- [Robert, 2001] Robert, C. P. (2001). *The Bayesian choice*. Ed Springer.
- [Ross, 2003] Ross, T. D. (2003). Accurate confidence intervals for binomial proportion and poisson rate estimation. *Computers in biology and medicine*, vol 33:509–531.
- [Sander and Badoux, 1991] Sander, P. and Badoux, R. (1991). *Bayesian Methods in Reliability*. Kluwer Academic Publisher.
- [Sendekyj, 2001] Sendekyj, G. P. (2001). Constant life diagrams – a historical review. *International journal of fatigue*, vol 23:347–353.
- [Shigley., 1972] Shigley. (1972). *Mechanical Engineering Design*. ed Mc GRAW Hill.
- [Shyur et al., 1999] Shyur, H.-J., Elsayed, E. A., and Luxhoj, J. T. (1999). A general model for accelerated life testing with time-dependent covariates. *Naval Research Logistics*, vol 46:303–321.
- [Tang et al., 1996] Tang, L., Sun, Y., and Ong, H. (1996). analysis of step-stress accelerated life test data : A new approach. *IEEE transaction on reliability*, vol 45 n°1.
- [Tebbi et al., 2001] Tebbi, O., Guerin, F., and Dumon, B. (2001). Comparative study of accelerated testing models with applications in mechanics. In *Seventh ISSAT, International Conference on Reliability and Quality in Design*, Washington, DC, USA.
- [Tebbi et al., 2004a] Tebbi, O., Guerin, F., and Dumon, B. (2004a). Estimation de la fiabilité des composants mécaniques par les essais accélérés. In *36ème Journée Statistique appliquée*, Montpellier.

- [Tebbi et al., 2004b] Tebbi, O., Guerin, F., and Dumon, B. (2004b). Estimation de la fiabilité par les essais accélérés. *Revue Mécanique et Industries*, A paraître:–.
- [Tebbi et al., 2004c] Tebbi, O., Guerin, F., and Dumon, B. (2004c). Plan d’essai avec endommagement préalable accéléré appliqué aux composants mécanique. *Revue Statistique appliquée*, A paraître:–.
- [Usureau et al., 2003] Usureau, E., Guerin, F., and Dumon, B. (2003). Demonstration of the reliability of a system using bayesian methods. *Asigurarea Calitati*, Vol. IX, n°34:–.
- [Usureau et al., 2004] Usureau, E., Guerin, F., and Dumon, B. (2004). *Démarche bayésienne et applications à la Sûreté de Fonctionnement*. éditions HERMES Lavoisier. Rédaction des chapitres Modélisation de l’a priori et compatibilité de l’a priori et de la vraisemblance.
- [Vassilious and Mettas, 2001] Vassilious, A. and Mettas, A. (2001). Understanding accelerated life-testing analysis. In *IEEE Proceedings Annual Reliability and Maintainability Symposium, USA*.
- [Villemeur, 1988] Villemeur, A. (1988). *Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels : Fiabilité, Facteurs humains et Informatisation*. Collection EdF - Ed Eyrolles.
- [Xiong, 1999] Xiong, C. (1999). Inference on a simple step-stress model with type-ii censored exponential data. *IEEE transaction on reliability*, vol 47 n°2.
- [Xiong and Milliken, 1999] Xiong, C. and Milliken, G. A. (1999). Step-stress life testing with random stress change times for exponential data. *IEEE transaction on reliability*, vol 48 n°2.
- [Yang and Yang, 1998] Yang, K. and Yang, G. (1998). Robust reliability design using environmental stress testing. *Quality and Reliability Engineering International*, vol 14:381–384.
- [Yeo and Tang, 1999] Yeo, K.-P. and Tang, L. (1999). Planing step-stress life-test with a target acceleration-factor. *IEEE transaction on reliability*, vol 48 n°1.
- [Zhang, 2002] Zhang, C. (2002). Mechanical component lifetime estimation based on accelerated life testing with singularity extrapolation. *Mechanical System and Signal Processing*, Vol 16:705–718.

Annexes

A.1 Modèle d'Arrhenius

Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température (en particulier : diélectrique, semi-conducteur, batterie, lubrifiant et graisse, plastique et filament de lampe incandescente). La loi d'Arrhenius modélise la durée de vie τ du produit comme fonction de la température T :

$$\tau = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)} \quad (\text{A.1})$$

avec :

- A et B constantes positives
- T température absolue

Le facteur d'accélération (FA) d'Arrhenius entre la durée de vie τ_1 pour une température T_1 et la durée de vie τ_2 pour une température T_2 est :

$$FA = \frac{\tau_1}{\tau_2} = e^{B\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)} \quad (\text{A.2})$$

A.2 Modèle de Peck

Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température T et à l'humidité H (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle est défini par :

$$\tau = A(H)^{-m} e^{\left(\frac{E_a}{kT}\right)} \quad (\text{A.3})$$

avec

- T : température absolue en °K
- H : humidité en %
- k : $8.6171 \cdot 10^{-5}$ eV/K constante de Boltzmann
- E_a : énergie d'activation en eV
- m paramètre du modèle

A.3 Modèle de puissance inverse

Il est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à un stress particulier (par exemple : diélectrique, roulement à billes ou rouleaux, composants optoélectroniques, composants mécaniques soumis à la fatigue et filament de lampe incandescente).

La loi de puissance inverse décrit la cinétique d'une dégradation sous stress constant V , la durée de vie est donnée par l'équation :

$$\tau = \left(\frac{A}{V}\right)^\gamma \quad (\text{A.4})$$

avec :

- V : stress constant
- A et γ : constantes dépendantes de la défaillance et de l'essai

Cas particulier : quand le stress est la température, la loi est appelée la loi de Coffin-Manson.

Le facteur d'accélération entre la durée de vie τ_1 pour un stress V_1 et la durée de vie τ_2 pour un stress V_2 est :

$$FA = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \quad (\text{A.5})$$

A.4 Modèle d'Eyring

Utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température et un stress V (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle est défini par :

$$\tau = \left(\frac{A}{T} \right) e^{\left(\frac{B}{kT} \right)} e^{V \left(C + \frac{D}{kT} \right)} \quad (\text{A.6})$$

avec:

- T : température absolue
- V : Stress donné
- k : $8.6171 \cdot 10^{-5}$ eV/K constante de Boltzmann
- A, B, C et D les paramètres du modèle

A.5 Conjuguée de la loi normale sans connaissance

Pour la trouver il suffit de considérer a priori aucune information sur μ et θ . Dans ce cas, nous caractérisons les deux paramètres par des lois uniformes non-informatives (hypothèse de Laplace):

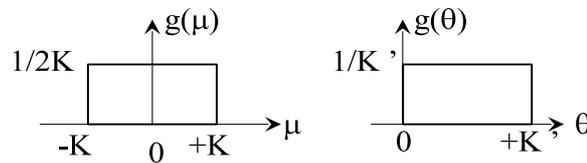


Figure A.1 – lois uniformes non-informatives

avec $K, K' \rightarrow \infty$

La vraisemblance, pour un échantillon de taille n , est donnée par :

$$L(x/\mu, \theta) = \frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \quad (\text{A.7})$$

Alors, le théorème de Bayes s'écrit :

$$f(\mu, \theta/x) = \frac{L(x/\mu, \theta) \Pi(\mu) \Pi(\theta)}{\int_{-K}^{+K} \int_0^{+K'} L(x/\mu, \theta) \Pi(\mu) \Pi(\theta) d\mu d\theta} \quad (\text{A.8})$$

avec $K, K' \rightarrow \infty$
soit

$$f(\mu, \theta/x) = \frac{\frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \frac{1}{2K} \frac{1}{K'}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \frac{1}{2K} \frac{1}{K'} d\mu d\theta} \quad (\text{A.9})$$

d'où

$$f(\mu, \theta/x) = \frac{\theta^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}{\underbrace{\int_0^{+\infty} \theta^{\frac{n}{2}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} d\mu}_{I_2} \right] d\theta}_{I_1}} \quad (\text{A.10})$$

L'intégrale I_2 est donnée par :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} d\mu \quad (\text{A.11})$$

soit

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n}{2}\theta \left(\mu^2 - 2\mu\bar{x} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \right)} d\mu \quad (\text{A.12})$$

d'où

$$I_2 = e^{-\frac{n}{2}\theta \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{n} - \bar{x}^2 \right)} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n\theta}{2} (\mu - \bar{x})^2} d\mu}_{I_3 = \sqrt{\frac{2\pi}{n\theta}}} \quad (\text{A.13})$$

L'intégrale I_1 devient

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{n\theta}} \theta^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} d\theta \quad (\text{A.14})$$

soit

$$I_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_0^{+\infty} \theta^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} d\theta \quad (\text{A.15})$$

d'où

$$I_1 = \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{n+1}{2}}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad (\text{A.16})$$

La distribution a priori s'écrit :

$$f(\mu, \theta/x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \theta^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (\text{A.17})$$

$$f(\mu, \theta/x) = \sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu - \bar{x})^2} \times \frac{\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right)^{\frac{(n+1)}{2}} \theta^{\frac{n+1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \quad (\text{A.18})$$

Finalement on obtient :

$$f(\mu, \theta/x) = \underbrace{\frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta}}_{G(a,b)} \underbrace{\sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu-c)^2}}_{N\left(c, \frac{1}{\sqrt{\theta(2a-1)}}\right)} \quad (\text{A.19})$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{n+1}{2} \\ b &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ c &= \bar{x} \end{aligned}$$

qui est une combinaison de distribution Gamma et Normal.

A.6 Définition de la distribution a posteriori de la loi normale avec connaissance

Nous disposons de l'information sur μ et θ . On est sûr aussi de disposer d'un a posteriori du même type que A.20 qui est donc conjugué de la loi normale. Nous avons :

$$f(\mu, \theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} \sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu-c)^2} \quad (\text{A.20})$$

alors, le théorème de Bayes s'écrit

$$f(\mu, \theta/x) = \frac{L(x/\mu, \theta) f(\mu, \theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} L(x/\mu, \theta) f(\mu, \theta) d\mu d\theta} \quad (\text{A.21})$$

soit

$$f(\mu, \theta/x) = \left(\frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} \sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu-c)^2} \right) / \quad (\text{A.22})$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\theta^{\frac{n}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} \sqrt{\frac{n\theta}{2\pi}} e^{-\frac{n\theta}{2}(\mu-c)^2} d\mu d\theta \right)$$

alors

$$f(\mu, \theta/x) = \left(\theta^{\frac{2a+n-1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}[n(\mu-\bar{x})^2 + (2a-1)(\mu-c)^2]} e^{-\frac{\theta}{2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b\right]} \right) / \quad (\text{A.23})$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \theta^{\frac{2a+n-1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}[n(\mu-\bar{x})^2 + (2a-1)(\mu-c)^2]} e^{-\frac{\theta}{2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b\right]} d\mu d\theta \right)$$

Le dénominateur I devient

$$I = \int_0^{+\infty} \theta^{\frac{2a+n-1}{2}} e^{-\frac{\theta}{2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2b + n\bar{x}^2 + (2a-1)c^2 - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)^2}{n+2a-1}\right]} \quad (\text{A.24})$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(n+2a-1)\theta}{2}\left(\mu - \frac{n\bar{x} + (2a-1)c}{n+2a-1}\right)^2} d\mu \right) d\theta$$

soit

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{n+2a-1}} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2b + n\bar{x}^2 \right. \quad (\text{A.25})$$

$$\left. + (2a-1)c - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)^2}{n+2a-1} \right)^{-\left(\frac{n}{2} + a\right)} \times \Gamma\left(\frac{n}{2} + a\right)$$

La distribution a priori s'écrit :

$$f(\mu, \theta/x) = \frac{\theta^{\frac{2a+n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + a\right)} \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2b + n\bar{x}^2 + (2a-1)c^2 - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)^2}{n+2a-1} \right)^{\left(\frac{n}{2} + a\right)} \quad (\text{A.26})$$

$$e^{\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + 2b + n\bar{x}^2 + (2a-1)c^2 - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)^2}{n+2a-1}\right)} \sqrt{\frac{(n+2a-1)\theta}{2\pi}} e^{-\frac{(n+2a-1)\theta}{2}\left(\mu - \frac{(n\bar{x} + (2a-1)c)}{n+2a-1}\right)^2}$$

d'où

$$f(\mu, \theta / \{x_i\}) = \frac{\theta^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}}{\int_0^{+\infty} \theta^{\frac{n}{2}} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\theta \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} d\mu \right]}_I d\theta} \quad (\text{A.27})$$

Finalement, nous obtenons la relation suivante :

$$f(\mu, \theta / x) = \underbrace{\frac{b'^{a'}}{\Gamma(a')} \theta^{a'-1} e^{-b'\theta}}_{G(a', b')} \underbrace{\sqrt{\frac{(2a'-1)\theta}{2\pi}} e^{-\frac{(2a'-1)\theta}{2}(\mu - c')^2}}_{N(c', \frac{1}{\theta(2a'-1)})} \quad (\text{A.28})$$

où

$$\begin{aligned} a' &= \frac{n}{2} + a \\ b' &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + b + \frac{n(2a-1)(\bar{x}-c)^2}{2(n+2a-1)} \\ c' &= \frac{n\bar{x} + (2a-1)c}{n+2a-1} \end{aligned}$$

qui est une combinaison de distributions Gamma et Normale comme l'a priori.

A.7 Moyenne et variance pour différentes distributions

Type	Fonction de densité	moyenne	variance
uniforme	$f(x) = \frac{1}{Max-Min}$	$m(x) = \frac{Max+Min}{2}$	$V(x) = \frac{(Max-Min)^2}{12}$
expo	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$	$m(x) = \frac{1}{\lambda}$	$V(x) = \frac{1}{\lambda^2}$
weibull	$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta}$	$m(x) = \eta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) + \gamma$	$V(x) = \eta^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right)$
gamma	$f(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}$	$m(x) = \frac{\alpha}{\beta}$	$m(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$
bêta	$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$m(x) = \frac{a}{a+b}$	$V(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$

Cette annexe regroupe 3 publications qui couvrent les différents aspects de mes recherches présentées chapitre 1.

B.1 Reliability estimation by Bayesian method : definition of prior distribution using dependability study

[Guérin et al., 2003a] GUERIN F., USUREAU E. and DUMON B.

Reliability estimation by Bayesian method : definition of prior distribution using dependability study

Reliability Engineering and System Safety, Vol. 82, p.299-306, 2003.

B.2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

[TEBBI et al., 2004a] TEBBI O., GUERIN F. and DUMON B.

Estimation de la fiabilité par les essais accélérés.

Revue Mécanique et Industries, à paraître.

B.3 Applying accelerated life models to HALT testing.

[GUERIN et al., 2004] GUERIN F., LANTIERI P. and DUMON B.

Reliability modeling, Analysis and Optimization.

Chapter : Applying accelerated life models to HALT testing.

, Ed World Scientific, to appear.

Estimation de la fiabilité par les essais

Fabrice GUÉRIN

Résumé

Ce mémoire a pour vocation de démontrer aux membres du jury ma capacité à diriger des recherches dans le cadre d'une activité d'enseignant-chercheur. Je présente une partie des travaux que j'ai initiés au cours de la dernière décennie. Dans un souci de cohérence d'ensemble, je n'ai présenté que les travaux relatifs à l'estimation de la fiabilité par les essais. Ils constituent le dénominateur commun aux quatre thèses que j'ai encadrées ou que j'encadre actuellement. Il est organisé de la manière suivante :

- le premier chapitre présente la problématique de l'estimation de la fiabilité par les essais.
- le deuxième rappelle les bases de la fiabilité nécessaires à la compréhension des chapitres suivants.
- le troisième chapitre regroupe les travaux portant sur l'analyse statistique des essais aggravés.
- le chapitre 4 présente l'approche bayésienne des essais.
- le suivant aborde les essais accélérés dans une perspective d'estimer la fiabilité de composants mécaniques.
- un bilan et des perspectives concluent le mémoire.
- en annexe sont regroupées quelques publications afférentes aux résultats énoncés dans le document.

Mots-clés : Fiabilité, Modèle standard de vie accélérée, Statistiques bayésiennes, Estimation