



Un petit peu
de géométrie algorithmique

Franck Hétroy

Table des matières

1	Introduction	5
2	Aperçu de topologie des surfaces	7
2.1	Surfaces topologiques	7
2.2	Classification des surfaces	8
2.3	Triangulations	9
2.4	Caractéristique d'Euler	11
3	Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay : définitions et propriétés	13
3.1	Diagramme de Voronoï	13
3.1.1	Définitions	13
3.1.2	Propriétés	14
3.2	Triangulation de Delaunay	15
3.2.1	Définitions	15
3.2.2	Propriétés simples	17
3.2.3	Propriété fondamentale	18
3.2.4	Propriété angulaire	19
4	Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay : algorithmes	21
4.1	Voronoï : intersection de demi-plans	21
4.2	Voronoï : construction incrémentale	21
4.3	Voronoï : diviser pour régner	22
4.4	Voronoï : algorithme par balayage	23
4.5	Delaunay : construction incrémentale	24
4.6	Quelques applications	26
4.6.1	Problème des bureaux de Poste	26
4.6.2	Cristallographie	26
4.6.3	Planification de trajectoire	26
4.6.4	Méthode des éléments finis	26
4.6.5	Arbre couvrant minimal	26
4.6.6	Reconstruction de surface	28
5	Extension : diagramme de Laguerre	29
5.1	Introduction	29
5.2	Définitions	30
5.3	Propriétés	30
	Annexe : lexique anglais-français	33
	Bibliographie	35

Chapitre 1

Introduction

Ce polycopié a pour but d'accompagner les quelques heures d'introduction à la *géométrie algorithmique* du cours de modélisation surfacique. La géométrie algorithmique (en anglais : *computational geometry*), comme son nom l'indique, a pour but le développement et l'étude d'algorithmes pour résoudre des problèmes de géométrie. C'est une discipline très ancienne, car Euclide en faisait déjà sans le savoir ! De manière plus récente, la géométrie algorithmique s'est développée à partir des années 1970 en réponse à des problèmes de conception assistée par ordinateur (C.A.O.), de robotique, de géographie (planification de trajectoires, ...), d'informatique graphique, de conception de circuits intégrés, etc.

Dans ce polycopié, nous nous restreignons à l'étude de deux structures de données classiques en géométrie algorithmique : le *diagramme de Voronoï* et la *triangulation de Delaunay*. Le premier chapitre donne un bref aperçu de notions de topologie des surfaces utiles pour la suite (variété, simplexe, triangulation, ...). Le deuxième introduit les deux concepts de diagramme de Voronoï et de triangulation de Delaunay, et en présente quelques propriétés. Le troisième chapitre est consacré à l'étude de quelques algorithmes de calcul de ces structures. Enfin, le quatrième et dernier chapitre aborde une extension du diagramme de Voronoï, appelée *diagramme de Laguerre*.

Chapitre 2

Aperçu de topologie des surfaces

2.1 Surfaces topologiques

Le but de ce chapitre est notamment de répondre à la question suivante : *qu'est-ce qu'une surface ?*

Vaste question ... Tous les objets suivants, plongés dans \mathbb{R}^3 , peuvent être considérés, à des degrés divers, comme des surfaces, même si le premier n'est pas connexe, si le deuxième possède un trou, si le troisième n'est pas orientable (il n'y a pas d'intérieur et d'extérieur !) et si le quatrième n'est pas borné.

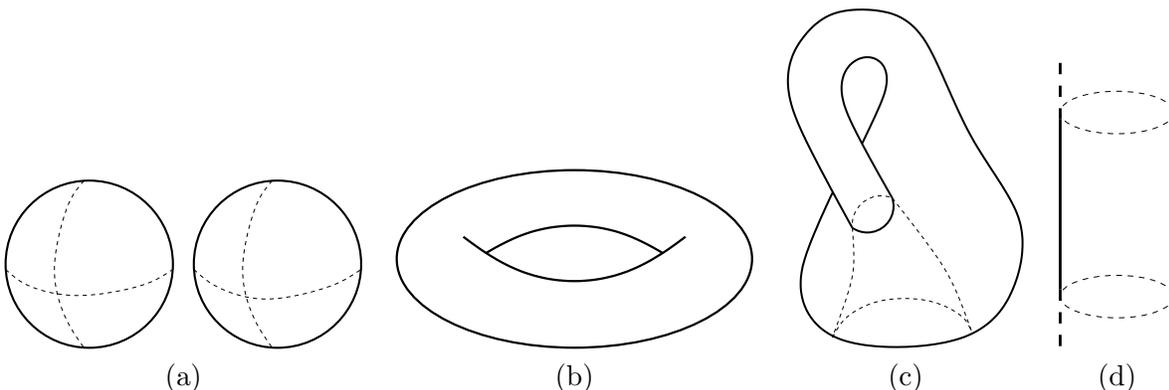


FIG. 2.1 – (a) Surface non connexe. (b) Tore. (c) Bouteille de Klein. (d) Cylindre infini.

En topologie, une surface va être définie comme un espace topologique particulier.

Définition 1 (Espace topologique). *Un espace topologique est un ensemble \mathbb{X} et un système X de sous-ensembles de \mathbb{X} tels que :*

- $\emptyset, \mathbb{X} \in X$;
- une union d'éléments de X est dans X ;
- une intersection finie d'éléments de X est dans X .

X est appelé une topologie et les éléments de X sont appelés les ouverts de \mathbb{X} . Un sous-espace topologique (\mathbb{Y}, Y) de (\mathbb{X}, X) est constitué d'un sous-ensemble $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ et de la topologie de sous-espace définie par $Y = \{\mathbb{Y} \cap A, A \in X\}$

Exemple. L'espace euclidien à d dimensions \mathbb{R}^d est un espace topologique.

Nous nous intéressons maintenant à des espaces topologiques particuliers. Nous rappelons qu'un *voisinage* d'un point $x \in \mathbb{X}$ est simplement un ensemble ouvert contenant x .

Définition 2 (Variété). *Un espace topologique \mathbb{X} est une k -variété si tout point $x \in \mathbb{X}$ possède un voisinage V dans \mathbb{X} homéomorphe à \mathbb{R}^k (c'est-à-dire qu'il existe une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ bijective, continue et d'inverse continue).*

Définition 3 (Variété à bord). *Soit \mathbb{H}^k le demi-espace à k dimensions : $\mathbb{H}^k = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k, x_1 \geq 0\}$. Un espace \mathbb{X} est une k -variété à bord si tout point $x \in \mathbb{X}$ possède un voisinage dans \mathbb{X} homéomorphe à \mathbb{R}^k ou à \mathbb{H}^k . La frontière (ou le bord) de \mathbb{X} est l'ensemble des points de \mathbb{X} qui ont un voisinage homéomorphe à \mathbb{H}^k . C'est soit une $(k - 1)$ -variété (sans bord), soit l'ensemble vide.*

La définition 2 implique que si M est une k -variété, alors on peut trouver un nombre dénombrable d'ensembles ouverts U_i et d'homéomorphismes $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^k$, tels que $M = \bigcup U_i$.

Définition 4 (Plongement, immersion). *On appelle plongement d'une k -variété \mathbb{X} dans \mathbb{R}^n une application $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dont la restriction à l'image de \mathbb{X} est un homéomorphisme. Si une telle application existe, on dit que \mathbb{X} est plongée dans \mathbb{R}^n . Si f est simplement injective de \mathbb{X} dans \mathbb{R}^n , on dit que f est une immersion.*

Nous pouvons maintenant définir une surface.

Définition 5 (Surface). *Une surface est une 2-variété.*

Définition 6 (Surface à bord). *Une surface à bord est une 2-variété à bord.*

2.2 Classification des surfaces

Nous allons maintenant utiliser les définitions précédentes afin de classer les surfaces. Les surfaces que nous allons étudier seront compactes, connexes et plongées dans \mathbb{R}^3 .

Définition 7 (Ensemble compact). *Un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, est dit compact s'il est à la fois fermé (c'est-à-dire que son complémentaire dans \mathbb{R}^n est un ouvert) et borné (inclus dans une boule euclidienne de rayon fini).*

Définition 8 (Surface connexe). *Une surface est dite connexe si deux points quelconques sur la surface peuvent être connectés par une courbe continue contenue dans la surface.*

Nous allons étudier les propriétés topologiques de telles surfaces. Deux surfaces seront considérées comme *topologiquement équivalentes* s'il existe un homéomorphisme entre elles. Il se trouve que, grâce à cette relation d'équivalence, il est possible de classer les surfaces.

Théorème 9 (Classification des surfaces). *Toute surface (sans bord) compacte connexe est homéomorphe soit à une sphère à g trous, $g \geq 0$, soit à une sphère à g bonnets croisés¹, $g \geq 1$. Une surface du premier type ne peut pas être homéomorphe à une surface du second type, et deux surfaces de même type mais avec des valeurs de g différentes ne peuvent pas être homéomorphes.*

Exemple. L'exemple de la figure 2.1 (a) n'est pas connexe, mais est composé de deux sphères. Le tore est lui homéomorphe à une sphère à un trou, et la bouteille de Klein à une sphère à un bonnet croisé. Le cylindre infini ne peut pas être classé selon le théorème précédent, car ce n'est pas une surface compacte (il n'est pas borné).

¹Un bonnet croisé (*cross cap* en anglais) est une surface sans bord analogue à un ruban de Möbius (figure 2.2)

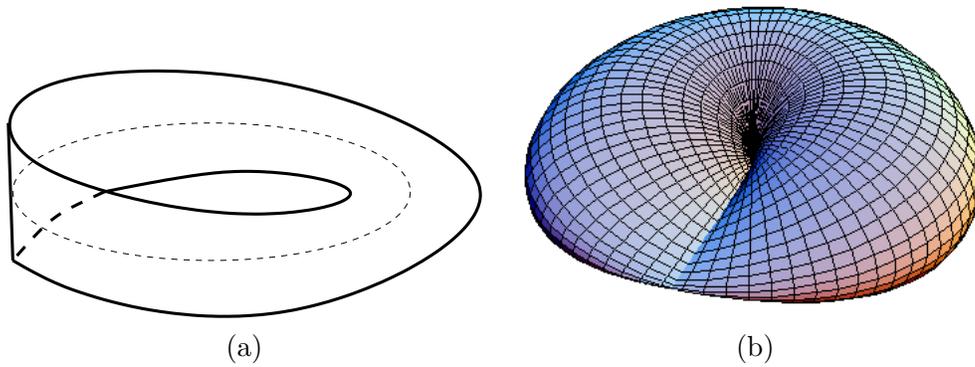


FIG. 2.2 – (a) Ruban de Möbius. (b) Bonnet croisé.

Définition 10 (Genre). g est appelé le genre de la surface.

Définition 11 (Surface orientable). Une surface homéomorphe à une sphère à g trous, $g \geq 0$, est dite orientable, et une surface homéomorphe à une sphère à g bonnets croisés, $g \geq 1$, est dite non orientable.

Propriété 12. Une surface orientable peut être plongée dans \mathbb{R}^3 . Une surface non-orientable ne peut pas être plongée dans \mathbb{R}^3 , mais peut y être immergée.

2.3 Triangulations

Les deux sections précédentes nous ont permis de définir rigoureusement une surface, d'un point de vue topologique. Nous allons maintenant nous restreindre au cas des surfaces *discrètes*, c'est-à-dire définies à partir d'un nombre fini de points. En effet, on travaille souvent en informatique sur de telles surfaces, qui sont généralement des approximations de surfaces réelles ou idéales : par exemple, le lapin de la figure 2.3 – le célèbre *bunny de Stanford* – est une surface maillée, créée en scannant un modèle réel en argile (le scanner détecte la position géométrique d'un certain nombre de points du modèle, et ces points sont ensuite reliés trois à trois pour former des triangles, grâce à un algorithme adéquat).

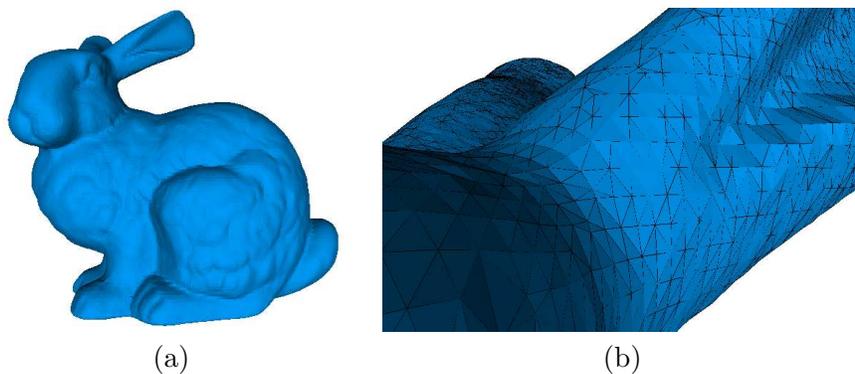


FIG. 2.3 – (a) Le *bunny de Stanford*. (b) Zoom sur les oreilles du bunny.

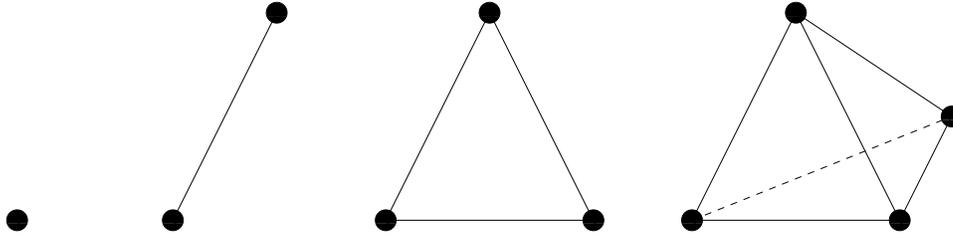


FIG. 2.4 – De gauche à droite : 0-simplexe, 1-simplexe, 2-simplexe et 3-simplexe de \mathbb{R}^3 .

Définition 13 (Simplexe). Soit e_0, \dots, e_n un ensemble de $n+1$ points linéairement indépendants dans un espace euclidien \mathbb{E}^m , $m \geq n \geq 0$. On appelle n -simplexe de sommets e_0, \dots, e_n l'enveloppe convexe σ de ces points. n est la dimension de σ . Par ailleurs, on appelle -1 -simplexe l'ensemble vide.

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 , un 0-simplexe est un sommet, un 1-simplexe une arête, un 2-simplexe un triangle et un 3-simplexe un tétraèdre (cf. figure 2.4).

Définition 14 (Face). Soit S un ensemble de points linéairement indépendants et σ son enveloppe convexe. Alors l'enveloppe convexe τ de tout sous-ensemble T de S est également un simplexe, sous-ensemble de σ . On dit que τ est une face de σ , et on note $\tau \leq \sigma$.

Définition 15 (Complexe simplicial). Un complexe simplicial est une collection K de faces d'un nombre fini de simplexes, tels que :

- $\sigma \in K \wedge \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in K$;
- $\sigma, \nu \in K \Rightarrow \sigma \cap \nu \leq \sigma, \nu$.

Autrement dit, si σ est dans K alors toute face de σ est aussi dans K , et si σ et ν sont dans K alors leur intersection est à la fois une face de σ et une face de ν .

La dimension d'un complexe simplicial est la dimension de son plus grand simplexe.

Nous définissons maintenant deux notions importantes concernant la structure locale d'un complexe simplicial.

Définition 16 (Étoilé, lien). Soit K un complexe simplicial et σ un simplexe dans K . L'étoilé de σ est l'ensemble des simplexes de K contenant σ : $St(\sigma) = \{\tau \in K, \sigma \leq \tau\}$. Notons $\overline{St(\sigma)}$ le plus petit sous-complexe de K contenant $St(\sigma)$. Le lien de σ est l'ensemble des faces des simplexes de l'étoilé de σ n'intersectant pas σ : $Lk(\sigma) = \{\tau \in \overline{St(\sigma)}, \tau \cap \sigma = \emptyset\}$.

Exemple. La figure 2.5 représente l'étoilé et le lien d'un sommet dans \mathbb{R}^3 .

Restreignons-nous maintenant aux espaces euclidiens \mathbb{R}^n .

Nous allons maintenant établir un lien entre la topologie d'un ensemble de points et la topologie combinatoire, plus exactement entre les notions d'espace topologique et de complexe simplicial. Rappelons que $\forall n \geq 1, \mathbb{R}^n$ est un espace topologique.

Définition 17 (Polyèdre). Soit K un complexe simplicial dans \mathbb{R}^n . L'union $|K|$ de tous les simplexes de K avec la topologie de sous-espace de \mathbb{R}^n est appelée le polyèdre (ou parfois l'espace sous-jacent) de K .

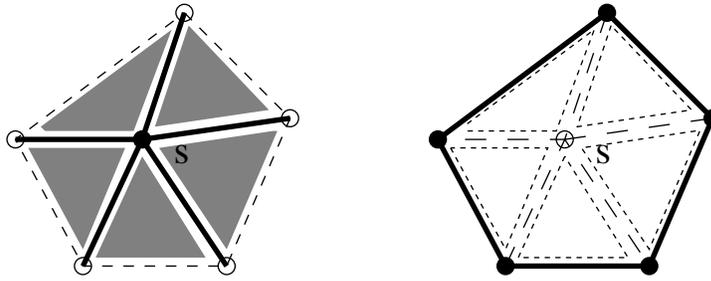


FIG. 2.5 – Exemple de complexe simplicial comportant six sommets, dix arêtes et cinq triangles. A gauche les arêtes en gras et les triangles grisés appartiennent à l'étoile de s ; à droite les sommets et arêtes en gras appartiennent au lien de s .

Définition 18 (Triangulation). *La triangulation d'un espace topologique \mathbb{X} est un complexe simplicial K dont le polyèdre $|K|$ est homéomorphe à \mathbb{X} . Si un tel complexe simplicial existe, on dit que \mathbb{X} est triangulée.*

Exemple. Une *surface triangulée* est une 2-variété homéomorphe au polyèdre d'un complexe simplicial.

2.4 Caractéristique d'Euler

Nous allons maintenant voir que les notions de *surface triangulée* et de *surface topologique* sont liées.

Définition 19 (Caractéristique d'Euler). *La caractéristique d'Euler χ_K d'un complexe simplicial K est la somme alternée du nombre de ses simplexes suivant leur dimension :*

$$\chi_K = \sum_{i=0}^d (-1)^i s_i, \quad (2.1)$$

où d est la dimension de K et $\forall 0 \leq i \leq d, s_i$ est le nombre de i -simplexes dans K .

Remarque. On peut réécrire χ_K sous la forme : $\chi_K = \sum_{\sigma \in K, \sigma \neq \emptyset} (-1)^{\dim(\sigma)}$, avec $\forall \sigma \in K, \dim(\sigma)$

la dimension de σ .

Exemple. Pour une surface triangulée, $\chi_K = V - E + F$, avec V le nombre de sommets de la triangulation, E son nombre d'arêtes et F son nombre de faces.

Propriété 20. *Soient A et B deux complexes simpliciaux. Alors $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$.*

Théorème 21 (Relation d'Euler). *La caractéristique d'Euler d'une surface M compacte, connexe, de genre g et à b_c bonnets croisés vaut $\chi_M = 2 - 2g - b_c$.*

Théorème 22 (Relation d'Euler généralisée). *La caractéristique d'Euler d'une surface M compacte, connexe, à bord, de genre g et à b_c bonnets croisés et dont la frontière est constituée de b_o composantes connexes (les bords) vaut $\chi_M = 2 - 2g - b_c - b_o$.*

Ces deux théorèmes nous indiquent en particulier que pour une surface triangulée, la quantité $V - E + F$ ne dépend que de sa topologie.

Chapitre 3

Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay : définitions et propriétés

Nous nous intéressons maintenant au problème suivant : *étant donné un ensemble E de points du plan ou de l'espace, quelle est la "meilleure" triangulation possible de E ?*

La réponse à cette question dépend bien entendu de l'application visée, mais généralement trois propriétés de la triangulation sont particulièrement recherchées :

- celle-ci doit être robuste (l'ajout ou la suppression d'un point à E ne nécessite pas la modification complète de la triangulation) ;
- elle doit être rapide à calculer ;
- elle doit contenir le moins possible de triangles allongés.

Cette dernière propriété est particulièrement intéressante pour de nombreuses applications, comme nous le verrons dans le chapitre suivant. Ce chapitre a pour but l'étude de la *triangulation de Delaunay*, dont nous prouverons qu'elle est la meilleure pour ce critère, et de sa structure duale, le *diagramme de Voronoï*.

3.1 Diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï, parfois appelé *tessellation de Dirichlet*, est une des structures géométriques les plus importantes en pratique, avec l'enveloppe convexe. Il a été introduit, dans le cas de \mathbb{R}^2 et de \mathbb{R}^3 , par le mathématicien allemand Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) en 1850. Le mathématicien russo-ukrainien Georgy Voronoï (1868-1908) a formalisé cette notion dans le cas général en 1908.

3.1.1 Définitions

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $P = \{p_i, 1 \leq i \leq n\}$ un ensemble fini de points de E .

Définition 23 (Cellule de Voronoï, germe). *On appelle cellule de Voronoï du point $p_i \in P$, et on note C_i , l'ensemble des points de E plus proches de p_i que de tout autre point de P : $C_i = \{q \in E, \forall j \neq i, \|qp_i\| \leq \|qp_j\|\}$. Le point p_i associé à une cellule C_i est appelé germe de cette cellule.*

Définition 24 (Diagramme de Voronoï). *On appelle diagramme de Voronoï de l'ensemble P , et on note $Vor(P)$, la subdivision de E en les cellules C_i associées aux points p_i de P :*

$$\text{Vor}(P) = \bigcup_{p_i \in P} C_i.$$

Définition 25 (Sommet, arête et face de Voronoï). Soit d la dimension de E . L'intersection de $d+1$ cellules de Voronoï, si elle est non vide, est appelée sommet de Voronoï. L'intersection de d cellules de Voronoï, si elle est non vide, est appelée arête de Voronoï. L'intersection de i cellules de Voronoï, $2 \leq i \leq d-1$, si elle est non vide, est appelée face de Voronoï.

Remarque. Dans la littérature, on trouve parfois seulement le terme *face de Voronoï* employé : dans ce cas, l'intersection de i cellules de Voronoï, $2 \leq i \leq d+1$, est appelée face de Voronoï.

Exemple. La figure 3.1 donne des exemples de diagramme de Voronoï de (a) 2, (b) 3 et (c) 27 points du plan. On remarquera que certaines cellules sont bornées et d'autres non.

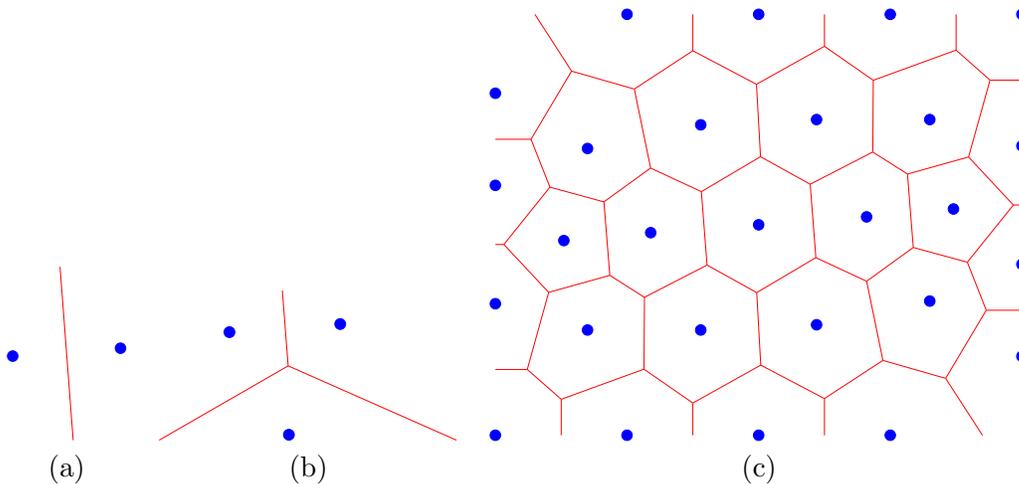


FIG. 3.1 – Diagrammes de Voronoï d'ensembles de points du plan.

3.1.2 Propriétés

Nous nous restreignons dorénavant au cas du plan : $E = \mathbb{R}^2$. Les propriétés suivantes sont néanmoins généralisables à un espace euclidien de dimension $d > 2$.

Propriété 26. Une arête de Voronoï, séparant deux cellules C_i et C_j , est portée par la médiatrice du segment $p_i p_j$.

Démonstration. En effet, tous les points situés sur cette arête de Voronoï sont à égale distance de p_i et de p_j . Ils sont donc sur la médiatrice de $p_i p_j$. \square

Propriété 27. Le sommet de Voronoï séparant trois cellules C_i , C_j et C_k est le centre du cercle circonscrit au triangle de sommets p_i , p_j et p_k .

Démonstration. Ce sommet est à égale distance des trois points p_i , p_j et p_k . \square

Remarque. Dans le cas où les trois points p_i , p_j et p_k sont alignés, le sommet de Voronoï n'existe pas.

Lemme 28. *L'intersection d'un nombre fini de demi-plans est une région convexe.*

Démonstration. Soit $C = \bigcap_{i=1}^n DP_i$ une intersection d'un nombre fini de demi-plans. Soient $a, b \in C$. Un demi-plan est trivialement une région convexe. Donc $\forall i$, comme $a \in DP_i$ et $b \in DP_i$, on a $\forall t \in [0, 1], ta + (1-t)b \in DP_i$. Donc finalement $\forall t \in [0, 1], ta + (1-t)b \in \bigcap_{i=1}^n DP_i = C$: C est bien une région convexe. \square

Propriété 29. *Une cellule de Voronoï, si elle est bornée, est un polygone convexe.*

Démonstration. Soit C_i une cellule de Voronoï. C_i est l'intersection d'un nombre fini de demi-plans (les demi-plans $\{x \in \mathbb{R}^2, \|xp_i\| \leq \|xp_j\|\}$), c'est donc une région convexe. La frontière de C_i est constituée d'une suite d'arêtes de Voronoï et de sommets de Voronoï. Si C_i est bornée, sa frontière est fermée ; C_i est donc un polygone. \square

La propriété suivante nous sera utile au chapitre 4, pour calculer les coûts des algorithmes.

Propriété 30. *Si $n \geq 3$, le nombre V de sommets d'un diagramme de Voronoï à n germes est au plus $2n - 5$, et son nombre E d'arêtes est au plus $3n - 6$.*

Démonstration. Nous allons utiliser la relation d'Euler généralisée (théorème 22), mais celle-ci n'étant valable que pour des surfaces compactes, il faut d'abord transformer le diagramme de Voronoï. Ajoutons virtuellement un sommet de Voronoï s_∞ à l'infini et relierons-y toutes les arêtes de Voronoï dont une extrémité est à l'infini (voir figure 3.2) : on a transformé le plan en surface homéomorphe à une sphère, donc le théorème 22 nous dit que $\chi_{Vor} = 2$. De plus, la définition 19 nous dit que $\chi_{Vor} = V' - E + F$, avec F le nombre de cellules de Voronoï du diagramme étendu et V' son nombre de sommets : $V' = V + 1$ et $F = n$, puisqu'on a ajouté un sommet sans créer ni supprimer de cellule. Comme chaque arête de Voronoï a exactement deux sommets extrémités, on a $2E = \sum_{s_i} \text{degre}(s_i)$ (le *degré* d'un sommet est son nombre de voisins). Si les germes ne sont pas alignés, on sait par définition que chaque sommet correspond à l'intersection de trois cellules, donc est voisin d'au moins 3 autres sommets, ce qui se traduit par $\sum_{s_i} \text{degre}(s_i) \geq 3(V + 1)$. On a donc $2E \geq 3(V + 1)$ et $V + 1 - E + n = 2$, d'où $V \leq 2n - 5$ et $E \leq 3n - 6$. \square

Remarque. Une arête de Voronoï étant adjacente à exactement deux cellules, une cellule de Voronoï a donc en moyenne moins de 6 côtés (car $\sum_{i=1}^n \text{nb_cotes}(C_i) = 2E < 6n$).

3.2 Triangulation de Delaunay

La notion de triangulation de Delaunay a été proposée en 1934 par un mathématicien russe élève de Georgy Voronoï : Boris Delaunay (d'où son nom).

3.2.1 Définitions

Définition 31 (Triangulation de Delaunay). *On appelle triangulation de Delaunay de l'ensemble P , et on note $Del(P)$, le dual du diagramme de Voronoï de P : les sommets de la triangulation de Delaunay sont les points $p_i \in P$, et deux sommets sont reliés par une arête dans la triangulation si les cellules de Voronoï correspondantes sont voisines.*

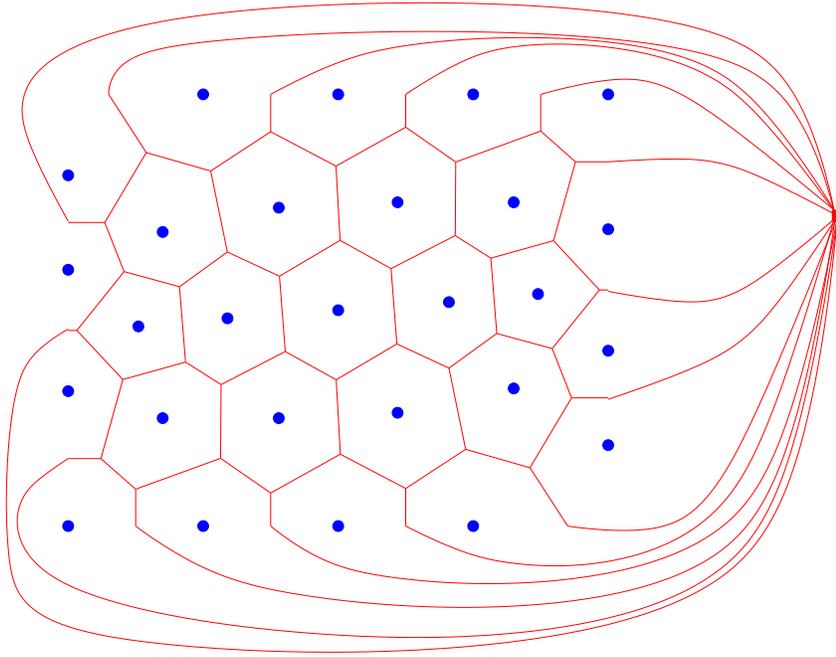


FIG. 3.2 – Diagramme de Voronoï étendu.

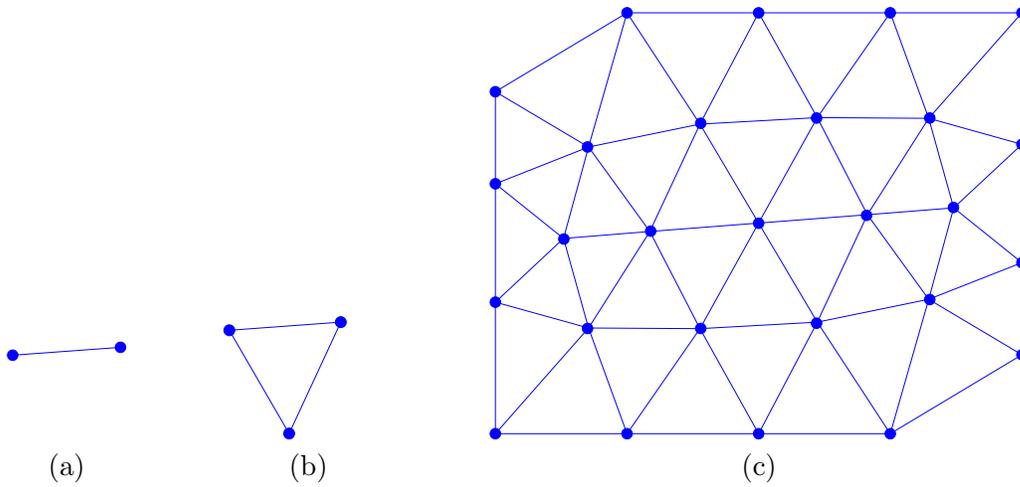


FIG. 3.3 – Triangulations de Delaunay duales des diagrammes de Voronoï de la figure 3.1.

Remarque. Même si cette définition est valide dans le cas d'un espace euclidien E de n'importe quelle dimension, le terme *triangulation* fait référence au cas du plan. Dans le cas de \mathbb{R}^3 , on parle parfois de *tétraédrisation de Delaunay*.

Définition 32 (Sommet de Delaunay, arête de Delaunay). *Les sommets d'une triangulation de Delaunay sont appelés sommets de Delaunay. Si $E = \mathbb{R}^2$, les arêtes d'une triangulation de Delaunay sont appelées arêtes de Delaunay.*

Exemple. La figure 3.3 montre les triangulations de Delaunay duales des diagrammes de Voronoï de la figure 3.1 : dans le premier cas (2 points), la triangulation n'est constituée que des deux points et d'une arête, et dans le deuxième cas (trois points), la triangulation n'est constituée que des trois points, de 3 arêtes et d'un triangle.

3.2.2 Propriétés simples

Propriété 33. *Si les points de P sont en position générale, c'est-à-dire si un sommet de Voronoï n'est jamais incident à plus de trois cellules, alors la triangulation de Delaunay correspond à une triangulation (au sens de la définition 18).*

Nous allons montrer cette propriété dans le cas du plan.

Démonstration. Par définition, les sommets de $Del(P)$ coïncident avec P . Comme $Del(P)$ est le dual de $Vor(P)$ et que les sommets de $Vor(P)$ ont tous exactement trois voisins (puisqu'ils sont incidents à trois cellules), les régions de $Del(P)$ sont des triangles. $Del(P)$ est donc une décomposition de \mathbb{R}^2 en triangles, dont les sommets sont exactement les points de P . Le fait que l'intersection de deux triangles σ et ν est soit vide, soit un sommet commun à σ et à ν , soit une arête commune à σ et à ν , ainsi que le fait qu'un sous-ensemble borné de \mathbb{R}^2 n'intersecte qu'un nombre fini de triangles, se montrent aisément. \square

Remarque. Dans le cas contraire, on parle parfois de *diagramme de Delaunay*.

Les propriétés suivantes se montrent de manière triviale.

Propriété 34. *La frontière de la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points P est l'enveloppe convexe de P .*

Propriété 35. *La cellule de Voronoï C_i associée à un germe p_i n'est pas bornée si et seulement si p_i appartient à l'enveloppe convexe de P .*

Pour les deux propriétés suivantes, nous nous plaçons dans le cas de \mathbb{R}^2 .

Propriété 36. *Le cercle centré en un sommet de Voronoï et passant par les trois germes voisins p_i , p_j et p_k est le cercle circonscrit au triangle de Delaunay $p_i p_j p_k$.*

Propriété 37. *Soit $p_i \in P$. Le point p_j de P le plus proche de p_i est tel que $p_i p_j$ est une arête de Delaunay.*

3.2.3 Propriété fondamentale

De la même manière, nous énonçons cette propriété dans le cas du plan, mais elle peut être étendu à un espace euclidien de dimension d quelconque.

Théorème 38 (Caractérisation des triangulations de Delaunay). *Soient p_i, p_j et p_k trois points de P . Alors le triangle de sommets p_i, p_j et p_k est un triangle de la triangulation de Delaunay de P si et seulement si le cercle circonscrit à ce triangle ne contient aucun autre point de P .*

Démonstration. Le triangle $p_i p_j p_k$ est un triangle de $Del(P)$ si et seulement si il est le dual d'un sommet de Voronoï s de $Vor(P)$. Par définition, si s existe, il est à égale distance des trois points p_i, p_j et p_k . C'est donc forcément le centre du cercle circonscrit à $p_i p_j p_k$. Or ce point est bien un sommet de Voronoï si et seulement si il n'y a pas d'autre point de P plus près de lui que p_i, p_j et p_k . Donc $p_i p_j p_k$ est un triangle de $Del(P)$ si et seulement si le cercle circonscrit à ce triangle ne contient aucun autre point de P . \square

De la même manière, on peut montrer la propriété suivante :

Propriété 39. *Soient p_i et p_j deux points de P . Alors le segment $p_i p_j$ est une arête de la triangulation de Delaunay de P si et seulement si il existe un cercle passant par p_i et p_j tel que le disque correspondant ne contienne aucun autre point de P .*

Démonstration. Supposons que $p_i p_j$ est une arête de Delaunay. Les cellules C_i et C_j sont donc voisines ; prenons un point q sur l'arête de Voronoï séparant C_i de C_j : par définition de cette arête, il n'y a aucun point de P à l'intérieur du cercle de centre q et passant par p_i et p_j (en effet sinon q appartient à la région de Voronoï associée au point de P correspondant). Supposons maintenant qu'il existe un cercle C passant par p_i et p_j tel que le disque correspondant ne contienne aucun autre point de P , et montrons que $p_i p_j$ est une arête de Delaunay. Soit q le centre de C . Comme q est équidistant de p_i et de p_j et qu'il n'existe pas d'autre point de P plus proche de q , q appartient à l'intersection des cellules de Voronoï C_i et C_j . Comme il n'y a pas d'autre point de P sur C , on peut agrandir ou rétrécir ce cercle de manière continue et infinitésimale en conservant le fait que p_i et p_j soient les seuls points de P sur C . Cela revient à déplacer q sur la médiatrice de $p_i p_j$: ceci engendre un segment non réduit à un point séparant C_i de C_j , donc $p_i p_j$ est une arête de Delaunay. \square

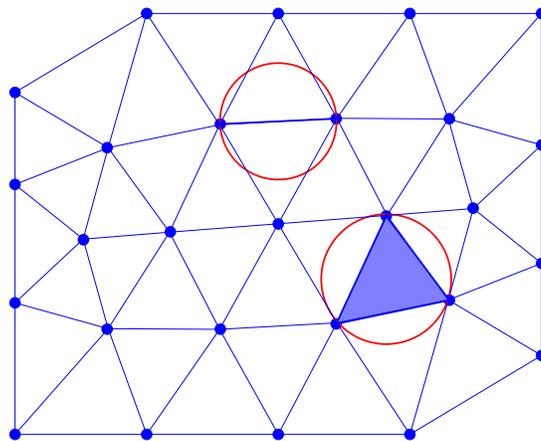


FIG. 3.4 – Illustration de la caractérisation des triangulations de Delaunay.

3.2.4 Propriété angulaire

Nous nous restreignons à nouveau au cas du plan. Soit P un ensemble de points du plan, et T une triangulation quelconque de P . Le nombre m de triangles de T ne dépend que du nombre de points de P , d'après la relation d'Euler appliquée au plan (quitte à ajouter un sommet virtuel à l'infini, comme pour la démonstration de la propriété 30). Trions les $3m$ angles des triangles de T par ordre croissant : ceci nous donne un $3m$ -uplet $(\alpha_1(T), \alpha_2(T), \dots, \alpha_{3m}(T))$ caractéristique de T , parmi toutes les triangulations de P . Nous pouvons donc ordonner les triangulations de P , selon l'ordre *lexicographique* sur les $3n$ -uplets : $T_1 > T_2$ si et seulement si il existe $k \in [1, 3m]$ tel que $(\forall i < k, \alpha_i(T_1) = \alpha_i(T_2))$ et $(\alpha_k(T_1) > \alpha_k(T_2))$.

Théorème 40 (Maximisation des angles). *La triangulation de Delaunay d'un ensemble de points P est maximale pour l'ordre lexicographique des angles.*

La démonstration de ce théorème est assez longue et nécessiterait l'introduction d'une nouvelle définition (triangulation *localement de Delaunay*) et de plusieurs lemmes ; elle n'est donc pas présentée ici. Elle utilise notamment le théorème 38 et la propriété 39.

La triangulation de Delaunay d'un ensemble de points est donc celle qui évite le mieux la création de triangles aplatis : les triangles ont, autant que possible, une forme proche d'un triangle équilatéral.

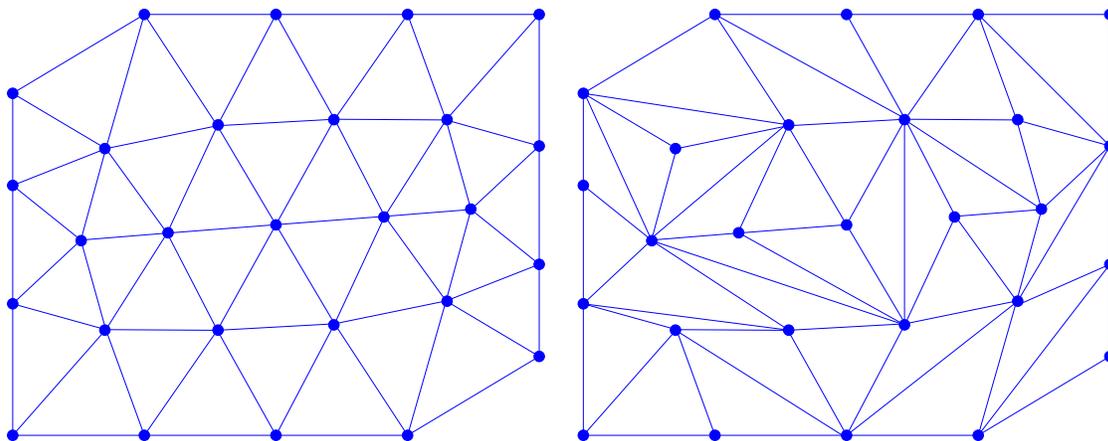


FIG. 3.5 – Deux triangulations d'un même ensemble de points du plan. Celle de gauche est la triangulation de Delaunay : l'angle minimum dans un triangle de cette triangulation est plus grand que l'angle minimum dans un triangle de la triangulation de droite.

Chapitre 4

Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay : algorithmes

Nous présentons dans ce chapitre quelques algorithmes de calcul d'un diagramme de Voronoï ou d'une triangulation de Delaunay, dans le cas du plan. L'objectif est bien sûr d'obtenir l'algorithme le plus rapide possible ; cependant l'algorithme doit pouvoir être implémentable !

Notons également qu'une fois qu'une des deux structures a été calculée, l'autre peut en être déduite automatiquement, par dualité.

4.1 Voronoï : intersection de demi-plans

L'idée la plus naturelle pour construire un diagramme de Voronoï est de construire chaque cellule C_i de manière indépendante, comme intersection des $n - 1$ demi-plans définis par les médiatrices des segments $p_i p_j, \forall j \neq i$. Cette construction est duale de la construction de l'enveloppe convexe de $n - 1$ points du plan (en effet, le dual d'un point (x, y) est la droite d'équation $b = xa - y$ et le dual d'une droite $y = ax + b$ est le point (a, b)), et comme (peut-être) vu en cours d'algorithmique 2 de première année Ensimag, cette enveloppe convexe peut être calculée en temps $O(n \log n)$.

La construction du diagramme de Voronoï se fait donc en temps $O(n^2 \log n)$.

4.2 Voronoï : construction incrémentale

Une autre idée afin de construire un diagramme de Voronoï consiste à procéder de manière incrémentale : supposons que le diagramme de Voronoï d'un ensemble $P_{n-1} = \{p_1, \dots, p_{n-1}\}$ de $n - 1$ points du plan a été construit ; que faut-il modifier à ce diagramme pour construire le diagramme d'un ensemble $P = P_{n-1} \cup \{p_n\}$?

Intuitivement, on comprend aisément que l'insertion d'un point p_n ne va modifier le diagramme de Voronoï que localement. Quels sont les sommets de Voronoï qui vont disparaître lors de cette insertion ? Ce sont ceux dont le cercle associé (circonsrit aux germes voisins) contient p_n , car on sait que l'intérieur des cercles centrés aux sommets de Voronoï et circonscrits aux germes voisins doit toujours être vide. Ces sommets sont dans une zone limitée du diagramme, ce qui conduit à un algorithme rapide (en $O(n)$) pour insérer p_n et mettre à jour le diagramme de Voronoï. Cet algorithme, proposé par Green et Sibson en 1978 [7], fonctionne de la manière suivante :

1. trouver le germe p_i tel que $p_n \in C_i$;
2. tracer la médiatrice du segment $p_i p_n$ et calculer ses intersections x_1 et x_2 avec la frontière de C_i (il n'y en a que deux car C_i est convexe) ;
3. $x_1 x_2$ est, par construction, une arête de Voronoï du diagramme de P ; c'est même l'arête séparant C_i de C_n . x_2 est lui sur une arête de Voronoï du diagramme de P_{n-1} , séparant C_i d'une autre cellule C_j ;
4. recommencer le processus en remplaçant p_i par p_j ;
5. itérer jusqu'à retomber sur x_1 ;
6. on a ainsi construit la frontière de C_n ; mettre à jour les arêtes de Voronoï qu'elle intersecte, en supprimant les morceaux à l'intérieur de C_n .

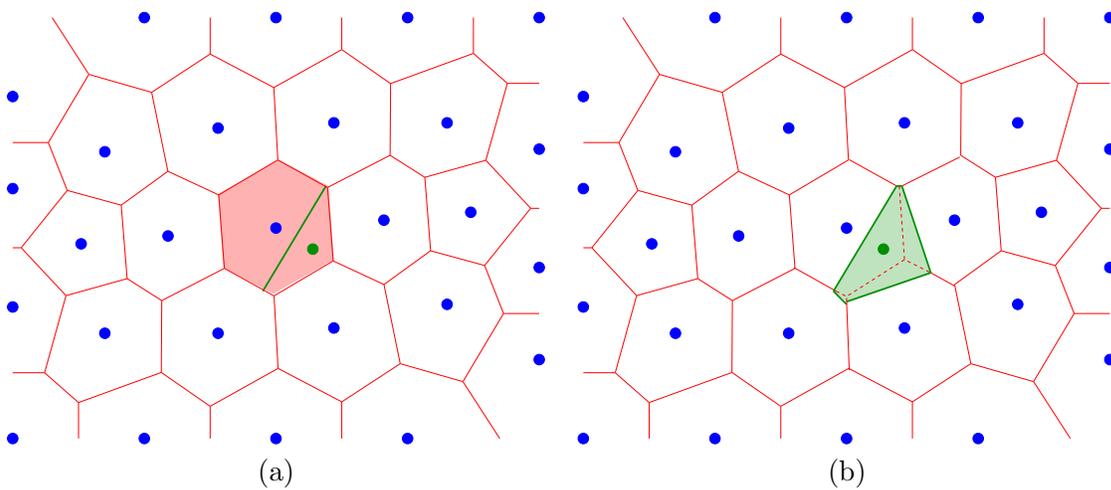


FIG. 4.1 – Construction incrémentale du diagramme de Voronoï. (a) Détection de la cellule C_i contenant p_n et construction de la médiatrice de $p_i p_n$. (b) Construction itérative de la frontière de C_n .

La cellule C_n peut avoir au pire $n - 1$ arêtes ; le temps de calcul de cette cellule est donc en $O(n)$. Puisqu'il y a n diagrammes de Voronoï successifs à calculer, la complexité totale de cet algorithme est en $O(n^2)$.

4.3 Voronoï : diviser pour régner

La complexité en $O(n^2)$ n'est pas optimale : un algorithme en $O(n \log n)$ a été proposé par Shamos et Hoey dès 1975 [10], avant celui de Green et Sibson. Cependant, cet algorithme n'est jamais utilisé en pratique car trop compliqué à implémenter. Il repose sur la stratégie bien connue "diviser pour régner" (cf. cours d'algorithmique 2 de première année Ensimag) : l'ensemble P est divisé en deux sous-ensembles P_1 et P_2 de tailles identiques, regroupant les points respectivement les plus "à gauche" et les plus "à droite" du plan. Les diagrammes de Voronoï de P_1 et de P_2 sont calculés récursivement, et toute la difficulté réside ensuite en la fusion de ces deux diagrammes pour obtenir celui de P . Ceci peut être fait en temps linéaire, mais nécessite quelques précautions.

4.4 Voronoï : algorithme par balayage

L'algorithme le plus utilisé actuellement pour calculer un diagramme de Voronoï est du à Steven Fortune [5]. En effet, il est plus rapide que l'algorithme de Green et Sibson car il calcule un diagramme de Voronoï de n points en temps $O(n \log n)$ ¹, plus simple que l'algorithme de Shamos et Hoey, et facilement implémentable.

Cet algorithme est dit *par balayage* car il “balaie” progressivement le plan par une ligne et selon une certaine direction, de telle manière qu'à tout moment, dans la zone déjà balayée, le diagramme de Voronoï est construit de manière définitive. Cela peut sembler impossible, car l'apparition d'un nouveau point de P lors du balayage va modifier certaines cellules de Voronoï avant ce point (voir figure 4.2). L'idée géniale de Fortune consiste à utiliser une troisième dimension, afin d'“anticiper” les modifications du diagramme (en quelque sorte, de “voir l'avenir”).

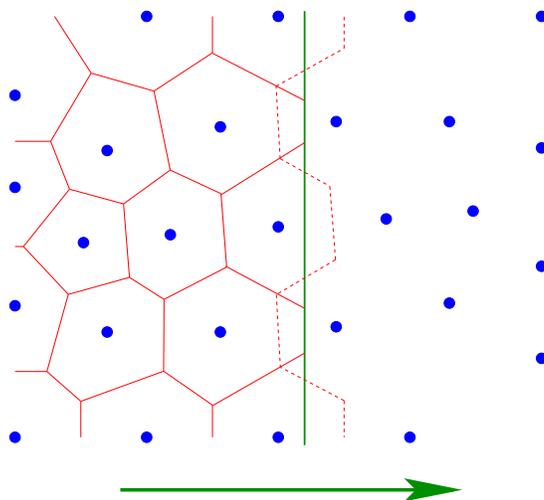


FIG. 4.2 – Algorithme par balayage.

Notons \vec{x} et \vec{y} les directions du plan, avec \vec{x} la direction de balayage. A chaque germe p_i , on associe le cône \mathcal{C}_i de sommet p_i , d'axe la troisième direction $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, et d'angle $\frac{\pi}{4}$ (le choix de cet angle est très important !). Intuitivement, si on interprète la direction \vec{z} comme étant le temps, un cône \mathcal{C}_i représente un cercle centré sur p_i et grossissant à vitesse constante : à $z = t_0$, si on suppose que l'équation du plan est $z = 0$, son rayon est de t_0 (car l'angle est de $\frac{\pi}{4}$...).

L'intersection de deux cônes voisins \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j sera une branche d'hyperbole, et comme les deux cônes ont même direction et même angle, celle-ci sera incluse dans le plan perpendiculaire au plan $z = 0$ et portant la médiatrice du segment $p_i p_j$ (voir figure 4.3 (a)). Ainsi, les arêtes de Voronoï correspondent aux intersections des cônes, projetées sur le plan $z = 0$.

L'algorithme proposé par Fortune balaie les cônes de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ avec un plan Π incliné de $\frac{\pi}{4}$ par rapport au plan $x = cst$ (voir figure 4.3 (b)). Le fait que Π ait la même inclinaison que les cônes est très important : Π rencontre un cône \mathcal{C}_i exactement quand la droite de balayage

¹En fait, on peut même montrer que cet algorithme est optimal : il existe une certaine configuration de n points pour laquelle n'importe quel algorithme aura besoin d'un temps au moins proportionnel à $n \log n$ pour calculer le diagramme de Voronoï des n points.

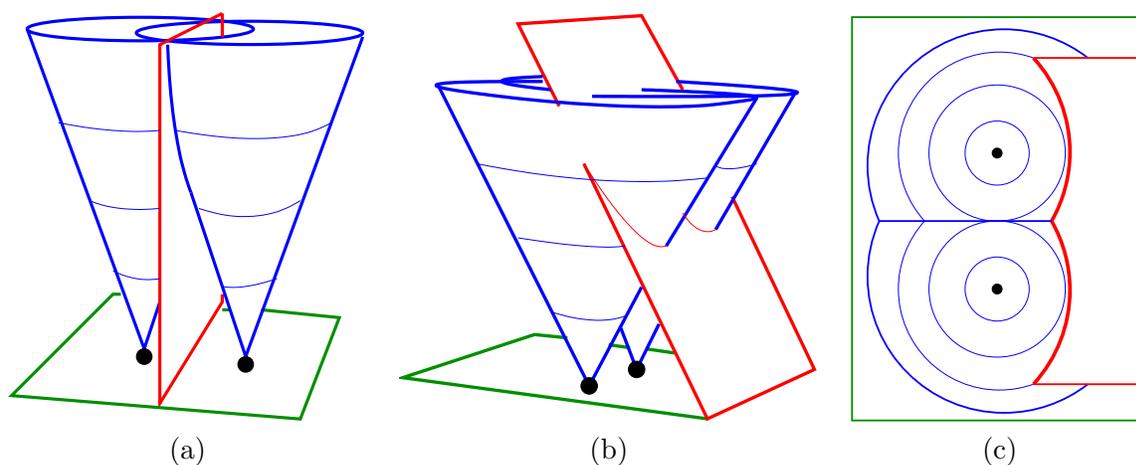


FIG. 4.3 – Algorithme de Fortune. (a) L’intersection de deux cônes se projette sur la médiatrice du segment reliant les deux germes correspondants. (b) Les cônes sont balayés par un plan Π incliné d’un angle identique à l’angle des cônes. (c) Vue du dessous : l’intersection du plan incliné Π avec l’ensemble des cônes correspond à un front parabolique.

(c’est-à-dire l’intersection de Π et du plan $z = 0$) rencontre le germe p_i . Ainsi une arête de Voronoï, qui correspond à l’intersection de deux cônes voisins \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j , ne sera créée qu’à partir du moment où la droite de balayage a rencontré les deux germes correspondant p_i et p_j .

L’intersection d’un plan avec un cône étant une parabole, la projection orthogonale sur le plan $z = 0$ de l’intersection de Π avec l’ensemble des cônes donne ce qu’on appelle un *front parabolique* (voir figure 4.3 (c)). Le diagramme de Voronoï n’est en fait pas construit à tout instant dans toute la zone déjà balayée, mais seulement “à gauche” du front parabolique. La mise à jour du diagramme ne concerne que ce front, qui est de taille $O(n)$, et peut se faire en temps $O(n \log n)$, en représentant le front par un arbre binaire de recherche équilibré (les ajouts et suppressions se font alors en temps $O(\log n)$). On a donc bien un temps de calcul en pire cas en $O(n \log n)$.

4.5 Delaunay : construction incrémentale

La triangulation de Delaunay peut être construite simplement à partir d’un des algorithmes précédents, puisqu’il s’agit du dual du diagramme de Voronoï. Il existe néanmoins quelques algorithmes de construction “purement Delaunay”. Nous allons en étudier un à présent.

Cet algorithme, proposé par Guibas, Knuth et Sharir [8], commence avec un triangle $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$ englobant l’ensemble des points de P (voir figure 4.4 (a)). Il construit ensuite la triangulation de Delaunay de $P \cup \{p_{-1}, p_{-2}, p_{-3}\}$, puis supprime p_{-1}, p_{-2}, p_{-3} et les arêtes et triangles incidents en ces trois sommets.

L’approche de Guibas, Knuth et Sharir est incrémentale : supposons la triangulation construite pour $m - 1$ points, et ajoutons un germe p_m . p_m appartient soit à l’intérieur d’un triangle $p_i p_j p_k$, soit à l’intérieur d’une arête $p_i p_l$. Dans chacun des cas, nous divisons le ou les triangles incidents (voir figure 4.4 (b)). La triangulation obtenue n’est pas forcément de Delaunay ; pour la rendre de Delaunay, il suffit de procéder à des échanges (“*flips*”) d’arêtes, entre d’un côté les arêtes du triangle ou du quadrilatère entourant p_m , et de l’autre côté de nouvelles arêtes partant de

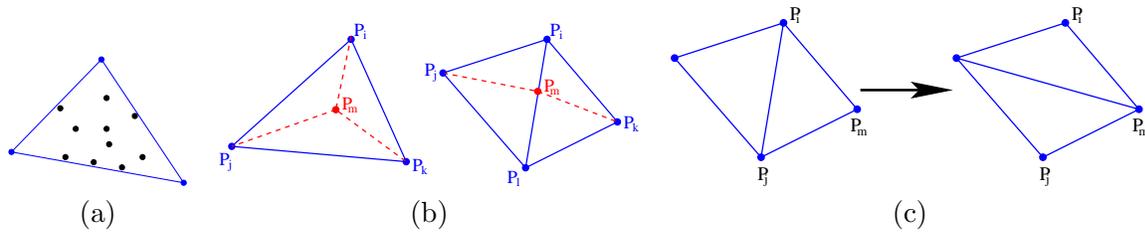


FIG. 4.4 – Construction incrémentale de la triangulation de Delaunay. (a) P est englobé dans un triangle $p_{-1}p_{-2}p_{-3}$. (b) Lors de l’ajout d’un nouveau germe, le ou les triangles incidents sont subdivisés. (c) *Flip* d’arêtes.

p_m (voir figure 4.4 (c)). En effet, une propriété importante de la triangulation de Delaunay dit que parmi les deux triangulations possibles d’un quadrilatère quelconque, une des deux est de Delaunay. Ainsi ici, si un ou des triangles ne vérifient pas la condition de Delaunay, il suffit de les supprimer en échangeant une de leurs arêtes dans un quadrilatère.

Ce qui est assez surprenant, c’est qu’on peut prouver que le nombre total de triangles créés (puis éventuellement détruits) par cet algorithme lors de l’ajout successif de tous les germes est inférieur ou égal à $9n - 1$. Ainsi, l’algorithme a un coût linéaire en mémoire, et le nombre total d’échanges d’arêtes est également en $O(n)$. L’algorithme est cependant en temps $O(n \log n)^2$, car il faut ajouter le coût des recherches successives de l’emplacement du germe à ajouter p_m . Pour cela, la structure de données utilisée est un DAG (graphe orienté sans cycle, cf. cours d’algorithmique 2 de première année Ensimag) : ses feuilles sont les triangles de la triangulation courante, ses nœuds internes les triangles des triangulations précédentes qui ont été détruits (voir figure 4.5). Il est à noter que chaque nœud interne a au plus trois fils, puisqu’un triangle est divisé en au plus trois sous-triangles. Pour savoir dans quel triangle est situé p_m , il suffit de parcourir récursivement le DAG en partant de la racine.

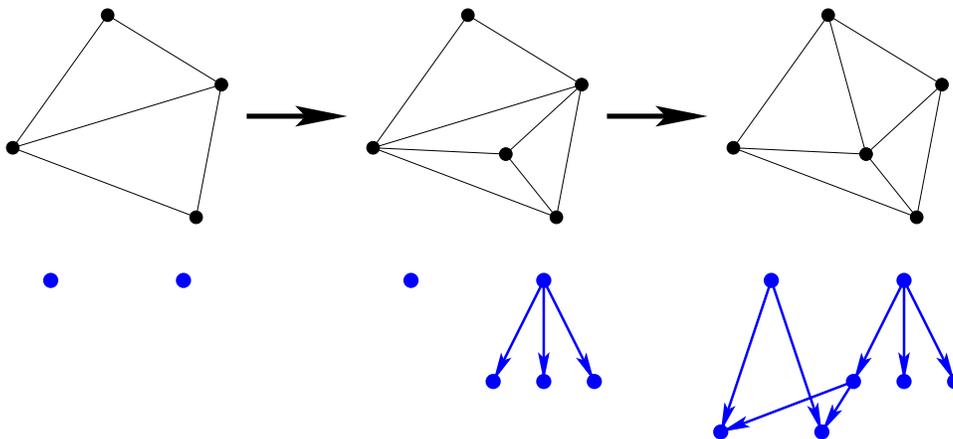


FIG. 4.5 – Utilisation d’un DAG pour la construction incrémentale de la triangulation de Delaunay.

²En faisant une hypothèse de *randomisation* : au niveau de l’ordre d’insertion des points, toutes les permutations sont supposées équiprobables, et le temps est calculé en moyenne.

4.6 Quelques applications

Nous présentons maintenant quelques applications pratiques du calcul du diagramme de Voronoï et de la triangulation de Delaunay dans le plan.

4.6.1 Problème des bureaux de Poste

Supposons que, dans une ville, on connaisse la position de tous les bureaux de Poste (ils sont par exemple indiqués sur une carte), et qu'on doive se rendre d'urgence dans le bureau le plus proche du lieu où on se trouve afin de poster un important colis. Comment trouver ce bureau de Poste ? Et si on se déplace, quel sera le nouveau bureau de Poste le plus proche ? Pour répondre à ces questions, il suffit de calculer le diagramme de Voronoï de l'ensemble des bureaux de Poste de la ville : en effet, le bureau de Poste le plus proche sera le germe de la cellule où on se trouve au moment où on se pose la question. Il est intéressant de noter que *le même* diagramme de Voronoï indiquera également le bureau de Poste le plus proche de toute position : construire un seul diagramme de Voronoï suffit.

4.6.2 Cristallographie

Dans le cas de la croissance d'un cristal (ou en biologie, d'un ensemble de cellules) à partir de germes, si la croissance se fait de manière uniforme sur les germes, un diagramme de Voronoï de ces germes représente l'aspect de l'ensemble des cristaux lorsque la croissance n'est plus possible.

4.6.3 Planification de trajectoire

Supposons que l'on dispose d'un robot devant évoluer dans un environnement jalonné d'obstacles ponctuels. Alors, afin de toujours être situé le plus loin possible d'un obstacle, le robot doit se déplacer sur les arêtes du diagramme de Voronoï des obstacles (voir figure 4.6 (a)). Il est à noter que des généralisations du diagramme de Voronoï existent, qui permettent de traiter le cas d'obstacles non ponctuels (par exemples polygonaux, ou circulaires).

4.6.4 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis permet d'approcher une fonction sur un certain domaine du plan, en ne connaissant sa valeur (grâce à des expérimentations) que sur un ensemble de points P bien précis du domaine. Pour cela, le domaine est décomposé en éléments simples (par exemple des triangles), appelés *mailles*, délimités par les points de P . La valeur de la fonction en tout autre point du domaine est alors calculée comme combinaison des valeurs aux sommets de la maille à laquelle appartient le point. La triangulation de Delaunay de P est souvent utilisée afin de décomposer le domaine en mailles (figure 4.6 (b)), car elle garantit l'absence de mailles "aplaties" (théorème 40), pour lesquelles le calcul peut être problématique (instabilités, erreurs d'arrondis).

4.6.5 Arbre couvrant minimal

Définition 41 (Arbre couvrant minimal). *Etant donné un ensemble P de points du plan, on appelle arbre couvrant minimal (minimum spanning tree) le graphe connexe, sans cycle, dont les sommets sont les points de P , et de longueur minimale (la longueur d'un graphe étant la somme des longueurs de ses arêtes).*

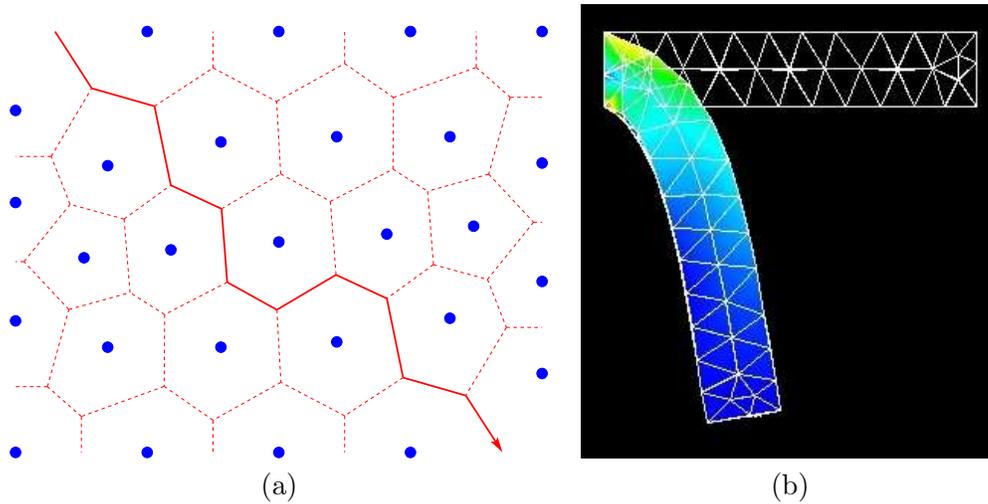


FIG. 4.6 – (a) Un chemin possible pour un robot souhaitant traverser un champ de mines en étant à chaque instant le plus loin possible d’elles. (b) Méthode des éléments finis : après déformation sous l’effet de forces physiques, les paramètres d’une poutre sont calculés à partir d’expérimentations en différents points et en construisant une triangulation de Delaunay.

Calculer un arbre couvrant minimal est un problème qui arrive fréquemment, par exemple lorsqu’on veut relier plusieurs machines entre elles à travers un réseau informatique, en utilisant le moins de câble possible.

Théorème 42. *L’arbre couvrant minimal d’un ensemble de points P du plan est inclus dans sa triangulation de Delaunay.*

Démonstration. Il suffit de montrer que toutes les arêtes de cet arbre sont des arêtes de Delaunay. Soit pq une arête de l’arbre couvrant minimal : si on l’enlève, celui-ci est déconnecté (sinon on aurait un autre arbre vérifiant les mêmes hypothèses et de longueur strictement inférieure). Appelons P_p et P_q les points de P appartenant à la partie de l’arbre connectée respectivement à p et à q . Le disque de centre p et de rayon pq ne contient pas de point r de P_q , car dans le cas contraire l’arbre obtenu en remplaçant l’arête pq par l’arête pr vérifierait les mêmes hypothèses et serait de longueur strictement inférieure à celle de notre arbre. De manière identique, le disque de centre q et de rayon pq ne contient pas de point de P_p . Comme le disque de diamètre pq est inclus dans l’intersection de ces deux disques, il ne contient aucun point de P en son intérieur, et l’arête pq est donc bien une arête de Delaunay d’après la propriété 39. \square

Ce théorème conduit à un algorithme très rapide pour calculer l’arbre couvrant minimal. En effet, avant qu’on s’intéresse aux triangulations de Delaunay, le meilleur algorithme connu pour construire l’arbre couvrant minimal d’un ensemble de points était du à Kruskal (1956) et fonctionnait en temps $O(n^2 \log n)$. En effet, cet algorithme calcule l’arbre couvrant minimal d’un graphe, et le graphe utilisé pour un ensemble quelconque de points était le graphe complet (tous les nœuds sont reliés par des arêtes) :

1. Trier les arêtes du graphe par longueur croissante : e_1, e_2, \dots
 $\Rightarrow O(|E| \log |E|)$, et $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ pour un graphe complet $\Rightarrow O(n^2 \log n^2) = O(n^2 \log n)$
2. Initialiser l’arbre couvrant minimal ACM à l’ensemble vide.
3. $i := 1$.
4. Tant qu’il reste des sommets non atteints par ACM faire :

- (a) si $ACM \cup \{e_i\}$ est sans cycle alors ajouter e_i à ACM ;
 - (b) $i := i + 1$;
- $\Rightarrow O(n^2)$ pour un graphe complet

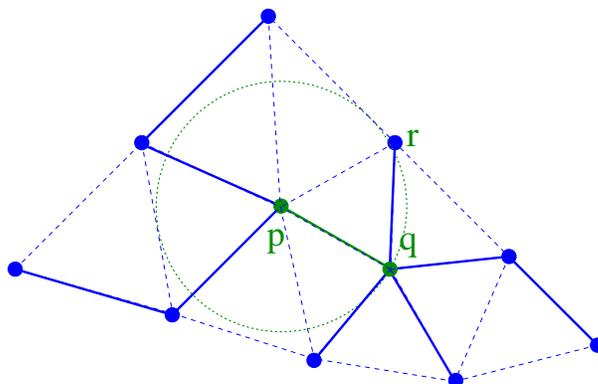


FIG. 4.7 – Un arbre couvrant minimal.

Si on calcule l'arbre couvrant minimal par l'algorithme de Kruskal en remplaçant le graphe complet par la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points, nous n'avons plus que $O(n)$ arêtes au lieu de $O(n^2)$ (propriété 30, et par dualité entre diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay). Par conséquent, le tri s'effectue en temps $O(n \log n)$, et la boucle "tant que" en temps $O(n)$. Comme le calcul de la triangulation de Delaunay s'effectue en temps $O(n \log n)$, la complexité totale est en $O(n \log n)$.

4.6.6 Reconstruction de surface

Dans de nombreux domaines (C.A.O., imagerie médicale, archéologie, exploration pétrolière, . . .), on a besoin de reconstituer virtuellement une surface en ne connaissant qu'un certain nombre de points de cette surface. Pour résoudre ce problème, de nombreuses méthodes utilisent la triangulation de Delaunay et le diagramme de Voronoï³. Une surface ainsi construite est une bonne approximation de la surface de départ, grâce aux propriétés des triangulations de Delaunay (notamment le théorème 40), et le calcul s'effectue de manière très rapide.

Parmi les méthodes existantes, citons l'algorithme du *Crust* et du *Power Crust* de N. Amenta et ses collaborateurs, *Cocone* et ses successeurs de T.K. Dey, S. Goswami et J. Giesen, ainsi que les algorithmes développés par J.-D. Boissonnat, F. Cazals et leurs collaborateurs à l'INRIA Sophia-Antipolis et implémentés dans la bibliothèque CGAL⁴. Voir [4] pour plus de détails sur cette application.

³Evidemment, P est ici un ensemble de points de \mathbb{R}^3 , et non plus du plan.

⁴<http://cgal.inria.fr/Reconstruction/>

Chapitre 5

Extension : diagramme de Laguerre

5.1 Introduction

Le diagramme de Voronoï a été généralisé de différentes manières. Par exemple, on peut étendre l'ensemble P afin qu'il contienne non plus seulement des points, mais également des segments : le diagramme contiendra une cellule associée à l'intérieur de chaque segment, plus une cellule associée à chaque point, extrémités des segments comprises. Dans ce cas, les arêtes du diagramme sont soit des segments, soit des arcs de parabole (voir figure 5.1 (a)).

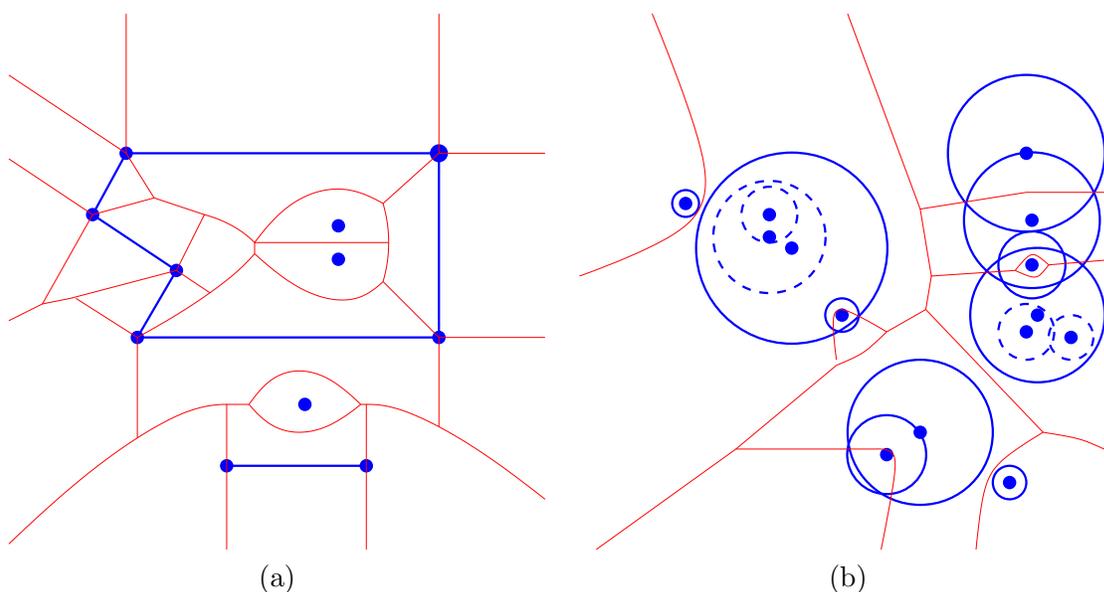


FIG. 5.1 – (a) Diagramme de Voronoï de points et segments. (b) Diagramme de Voronoï à poids additifs. Les cercles représentent les poids respectifs associés à chaque germe. Certains germes (ceux dont le cercle est en pointillés) ont une cellule associée vide.

On peut également vouloir donner une “influence” différente à chaque point de P . Pour ce faire, on associe un poids w_i à chaque point p_i . Intuitivement, ceci revient à remplacer chaque germe par une sphère (un disque dans le cas de points du plan) centrée en ce germe et de rayon proportionnel à son poids. Néanmoins, il reste à définir une distance pour ces “germes pondérés”. Les deux solutions les plus simples consistent à définir la distance entre un point quelconque x et un germe p_i par respectivement $d(x, p_i) = \|x - p_i\| - w_i$ et $d(x, p_i) = \frac{\|x - p_i\|}{w_i}$. Les dia-

grammes correspondant s'appellent respectivement *diagramme de Voronoï à poids additifs* et *diagramme de Voronoï à poids multiplicatifs*, et ont été proposés respectivement en 1985 par M. Sharir et en 1984 par F. Aurenhammer et H. Edelsbrunner. Ils sont aussi connus sous le nom générique de *diagrammes d'Apollonius*, du nom d'un géomètre grec de l'Antiquité (Apollonius de Perge, 262-190 av. J.-C.). La figure 5.1 (b) montre un exemple de diagramme à poids additifs.

Nous allons maintenant nous intéresser à une autre extension du diagramme de Voronoï, qui pondère également chaque germe par un poids. Cette extension, qui prend le nom de *diagramme de Laguerre* (du nom d'un mathématicien français du XIX^{ème} siècle) ou de *diagramme de puissance*, a été proposée pour la première fois par F. Aurenhammer en 1987 et est plus utilisée en pratique que les précédentes. La distance associée sera définie par $d(x, p_i) = \|x - p_i\|^2 - w_i^2$.

Il existe des généralisations encore plus complexes du diagramme de Voronoï, pour lesquelles on introduit deux poids w_i et w'_i associés à chaque point (voir [3] pour plus de détails) : $d(x, p_i) = w'_i \|x - p_i\| - w_i$ (diagramme de Voronoï à poids composés) ou $d(x, p_i) = w'_i \|x - p_i\|^2 - w_i^2$ (diagramme de Möbius). Ces diagrammes ont notamment des applications en biologie moléculaire.

5.2 Définitions

Définition 43 (Puissance d'un point). *On appelle puissance d'un point x par rapport à une sphère \mathcal{C} de centre c et de rayon r le réel positif défini par $\sigma_{\mathcal{C}}(x) = \|x - c\|^2 - r^2 = \|x - t\|^2$ (voir figure 5.2 (a)).*

Propriété 44. $\sigma_{\mathcal{C}}(x) < 0$ si et seulement si x est intérieur à la sphère \mathcal{C} de centre c et de rayon r .

Définition 45 (Diagramme de Laguerre). *Le diagramme de Laguerre (ou diagramme de puissance) associé à un ensemble de sphères \mathcal{C}_i de centres c_i et de rayons r_i est la décomposition de l'espace euclidien E en cellules C_i associées à chaque sphère, une cellule C_i contenant l'ensemble des points x de E dont la puissance par rapport à la sphère \mathcal{C}_i est inférieure à la puissance par rapport aux autres sphères : $C_i = \{x \in E, \forall j \neq i, \sigma_{\mathcal{C}_i} \leq \sigma_{\mathcal{C}_j}\}$.*

Exemple. La figure 5.2 (b) donne un exemple de diagramme de Laguerre associé à quatre sphères. On remarquera qu'une cellule associée à une sphère ne contient pas forcément le centre de cette sphère.

5.3 Propriétés

Propriété 46. *L'ensemble des points de E qui ont même puissance par rapport à deux sphères \mathcal{C}_i et \mathcal{C}_j est un hyperplan.*

Démonstration. Soit x un tel point : on a l'égalité $\|x - c_i\|^2 - r_i^2 = \|x - c_j\|^2 - r_j^2$, ce qui en développant donne $x^2 - 2x \cdot c_i + c_i^2 - r_i^2 = x^2 - 2x \cdot c_j + c_j^2 - r_j^2$, qui peut se réécrire $2(c_j - c_i) \cdot x = (c_j^2 - r_j^2) - (c_i^2 - r_i^2)$: c'est l'équation d'un hyperplan. \square

Exemple. La figure 5.3 donne trois exemples de tels hyperplans, dans le cas où $E = \mathbb{R}^2$ (donc ces hyperplans sont des droites).

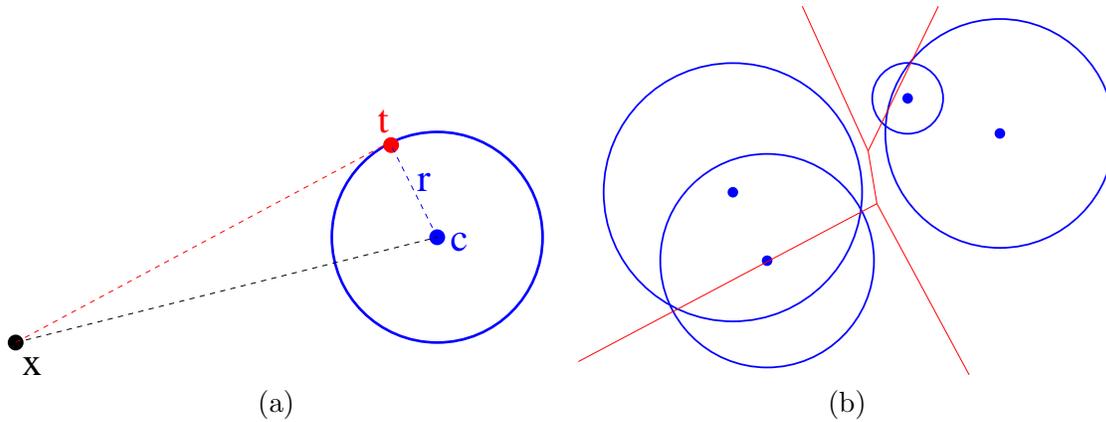


FIG. 5.2 – (a) Puissance d'un point par rapport à une sphère. (b) Diagramme de Laguerre.

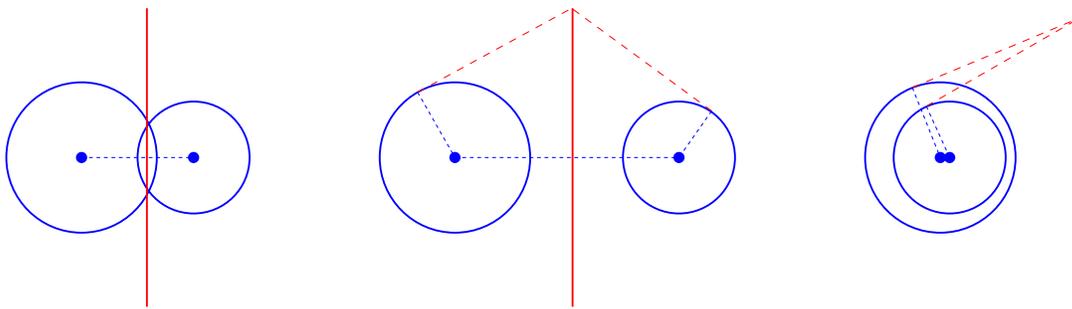


FIG. 5.3 – Trois exemples de droites des points ayant même puissance par rapport à deux sphères.

Contrairement aux trois types de diagrammes de Voronoï étendus présentés en introduction de ce chapitre, les cellules d'un diagramme de Laguerre ressemblent aux cellules de Voronoï.

Propriété 47. *Une cellule du diagramme de Laguerre est soit vide, soit un polytope convexe, éventuellement non borné.*

Démonstration. Dans le cas où une cellule C_i est non vide, son intersection avec toute autre cellule étant un hyperplan, C_i est une intersection de demi-espaces, et est donc convexe. \square

Comme dit en introduction, le diagramme de Laguerre est plus utilisé en pratique que les autres extensions du diagramme de Voronoï. Cela est principalement dû au résultat suivant, qui montre qu'un diagramme de Laguerre peut représenter des choses très générales.

Définition 48 (Diagramme affine). *Soient P un ensemble fini d'objets dans un espace euclidien \mathbb{R}^n et d une fonction continue entre n'importe quel point de \mathbb{R}^n et P (d n'est pas nécessairement une distance : en particulier, l'inégalité triangulaire n'est pas requise). Supposons que, quelques soient les objets O_i et O_j de P , l'ensemble des points x de \mathbb{R}^n tels que $d(x, O_i) = d(x, O_j)$ est un hyperplan. On appelle diagramme affine de P la partition de \mathbb{R}^n en cellules C_i regroupant les points de \mathbb{R}^n dont la valeur pour d par rapport à O_i est inférieure à la valeur pour d par rapport à tous les autres objets O_j .*

Théorème 49 (Aurenhammer, 1987). *Tout diagramme affine de \mathbb{R}^n est le diagramme de Laguerre d'un ensemble de sphères de \mathbb{R}^n .*

Annexe : lexique anglais-français

English	Français
Cell	Cellule
Circumcircle	Cercle circonscrit
Connected	Connexe
Convex hull	Enveloppe convexe
Cross cap	Bonnet croisé
Divide and conquer	Diviser pour régner
Edge	Arête
To embed	Plonger
Embedding	Plongement
Genus	Genre
Link	Lien
Manifold	Variété
Manifold with boundary	Variété à bord
Minimum spanning tree	Arbre couvrant de poids minimal
Polyhedron	Polyèdre
Seed	Germe
Simplex	Simplexe
Simplices	Simplexes
Simplicial complex	Complexe simplicial
Star	Etoilé
To sweep	Balayer
Vertex	Sommet
Vertices	Sommets

Bibliographie

- [1] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars, O. Schwarzkopf. *Computational Geometry : Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, 2000. <http://www.cs.uu.nl/geobook/>
- [2] J.-D. Boissonnat, M. Yvinec. *Géométrie Algorithmique*. Ediscience International, 1995. <http://www-sop.inria.fr/members/Mariette.Yvinec/livre.html>
- [3] J.-D. Boissonnat, C. Wormser, M. Yvinec. *Curved Voronoi diagrams*. in Effective Computational Geometry for Curves and Surfaces, Springer, 2006. <ftp://ftp-sop.inria.fr/geometrica/boissonnat/Papers/ecg-book-voronoi.pdf>
- [4] T.K. Dey. *Curve and Surface Reconstruction : Algorithms with Mathematical Analysis*. Cambridge University Press, 2006. <http://www.cse.ohio-state.edu/~tamaldehy/book/recon/preface.pdf>
- [5] S. Fortune. *A Sweepline Algorithm for Voronoi Diagrams*. Symposium on Computational Geometry, p. 313-322, 1986. Egalement dans *Algorithmica*, vol. 2, p. 153-174, 1987.
- [6] J. Goodman, J. O'Rourke eds. *Handbook of Discrete and Computational Geometry*. CRC Press, 1997. <http://maven.smith.edu/~orourke/books/discrete.html>
- [7] P. J. Green, R. R. Sibson. *Computing Dirichlet Tessellations in the Plane*. Computer Journal, vol. 21 nr 2, p. 168-173, 1978.
- [8] L. Guibas, D. Knuth, M. Sharir. *Randomized Incremental Construction of Delaunay and Voronoi Diagrams*. *Algorithmica*, vol. 7, p. 381-413, 1992.
- [9] J. O'Rourke. *Computational Geometry in C*. Cambridge University Press, 1998. <http://maven.smith.edu/~orourke/books/compgeom.html>
- [10] M. Shamos, D. Hoey. *Closest-Point Problems*. 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, p. 151-162, 1975.
- [11] *Computational Geometry Algorithms Library (CGAL)*. <http://www.cgal.org/>